

## DISEÑO DE UN CONTROL DE NIVEL DE UN SISTEMA HIDRÁULICO CON RESTRICCIONES UTILIZANDO LMI

C. A. Cappelletti<sup>†</sup> y E.J. Adam<sup>‡1</sup>

<sup>†</sup>Universidad Tecnológica Nacional – Facultad Regional Paraná.

<sup>‡</sup>Instituto de Desarrollo Tecnológico para la Industria Química (INTEC), CONICET –  
Universidad Nacional del Litoral (UNL).

Güemes 3450, (3000) Santa Fe – Argentina. Tel.: (0342) 455-9175/77 Fax: (0342) 455-0944.  
eadam@santafe-conicet.gov.ar, eadam@fiq.unl.edu.ar

**Resumen:** En este trabajo se presenta el diseño de un control de nivel de un sistema hidráulico que posee restricciones en el caudal manipulado, utilizando una herramienta matemática de optimización conocida como *desigualdad matricial lineal* (LMI). A tal efecto, el control óptimo incluye dos LMI's las que consideran una condición de estabilidad asintótica y una restricción para no superar un caudal máximo evitando el rebalsar el nivel de líquido de los tanques. Las simulaciones numéricas realizadas muestran el desempeño satisfactorio de la variable de control; mostrando ésta técnica de diseño mucho potencial para ser aplicada en la ingeniería de procesos.

**Palabras Claves:** Control de Nivel, Control Óptimo Lineal, LMI.

### 1. INTRODUCCIÓN

Muchas de las técnicas modernas de diseño de sistemas de control han mostrado ser exitosas en aplicaciones de la ingeniería electrónica, robótica o aeroespacial. Sin embargo, inconvenientes adicionales propios de la industria de procesos impiden alcanzar buenas performances con estas técnicas. La razón de esto se debe a los problemas que se presentan en la mayoría de los sistemas hallados en la ingeniería química, estos son, sistemas lentos (grandes constantes de tiempo), fuertemente acoplados y con claras características no lineales. Además, debe mencionarse que la región de operación de una planta química está generalmente limitada por una serie de restricciones que el sistema de control debe tener explícitamente en cuenta, y éstas restricciones no solamente se deben a condiciones para una operación conveniente sino frecuentemente a razones de seguridad.

La idea del diseño óptimo de un sistema de control persigue la obtención de plantas que funcionen garantizando robustez ante incertidumbres paramétricas y adecuadas características dinámicas ante las diversas situaciones tales como, cambios de consigna o bien rechazo de perturbaciones, cumpliendo con restricciones operativas en la variable de control y evitando saturaciones en los sensores y las variables manipuladas. En la última década, se ha mostrado que una amplia gama de problemas de diseño de controladores robustos que satisfacen restricciones pueden ser reducidos a un

problema de *optimización convexa* estándar utilizando *Desigualdades Lineales Matriciales* (LMI's), y uno de los primeros trabajos que realiza un gran aporte en el área es el de Boyd *et al.*, (1994).

En este trabajo se escogió el control de nivel de líquido en tanques con interacción ya que es un atractivo ejemplo para investigar la aplicación de estas técnicas en la industria de procesos. Claramente, en éste problema, están presentes restricciones operativas para los estados, límites en la variable de control y la manipulada, además de las típicas no linealidades presentes en los sistemas hidráulicos (ver Sección 2).

Para una clara exposición del tema en la Sección 2 se presenta el modelo matemático del sistema sistema hidráulico experimental de laboratorio. Luego, en la Sección 3 se plantea el control óptimo libre de offset del sistema sin restricciones donde los polos de lazo cerrado son adoptados para satisfacer el costo cuadrático mínimo. Dicha ley de control óptimo es determinada mediante planteo de una LMI basada en la ecuación algebraica de Ricatti (ARE). En la Sección 4 se incluyen restricciones en el nivel y en el caudal manipulado, mostrando la ventaja de utilizar LMI's en el diseño óptimo del sistema de control. Finalmente, en la Sección 5 se resumen las conclusiones.

### 2. SISTEMA EXPERIMENTAL DE LABORATORIO

Considere el sistema hidráulico experimental de laboratorio de dos tanque con interacción representado en

<sup>1</sup> Autor a quien enviar la correspondencia.

la Fig. 1, donde sus características físicas y operativas se informan en la Tabla 1.

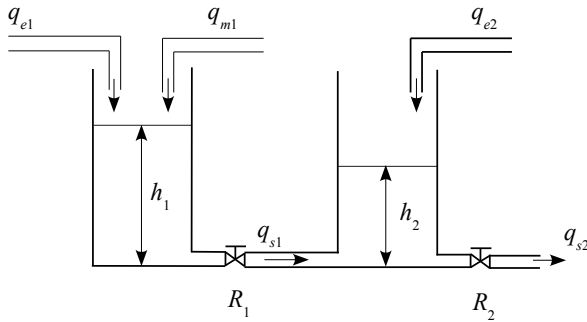


Fig. 1: Sistema hidráulico de dos tanques que interactúan entre sí.

**Tabla 1.** Características técnicas del sistema experimental de laboratorio de la Fig. 1

Dimensiones	
diámetros	$d_1 = d_2 = 0.04$ m
rango de caudales de las válvulas	0 y 3.3 l/min
Resistencias hidráulicas	$R_1 = 90000$ m s /m <sup>3</sup> $R_2 = 144000$ m s /m <sup>3</sup>
alturas máximas	$h_{1\max} = h_{2\max} = 0.60$ m

Antes de presentar el modelo matemático no lineal y lineal del sistema de tanques con interacción de la figura anterior, resulta importante remarcar la siguiente hipótesis de modelo relacionada con la interacción entre los tanques:

*Hipótesis de Modelo.* Cuando el caudal de líquido se dirige del tanque 1 al 2 (esto es  $h_1 \geq h_2$ ) dicho caudal es función de la diferencia de presión entre ellos y es aceptablemente modelado mediante la expresión,  $q_{s1} = C_{v1} \sqrt{h_1 - h_2}$ . Si hay una inversión de flujo (esto es,  $h_1 < h_2$ ) dicho caudal se modela como,  $q_{e3} = C_{v1} \sqrt{h_2 - h_1}$ .

Las ecuaciones de balance que definen un modelo matemático no lineal en variables de desviación se resume a,

$$A_1 \frac{d\bar{h}_1}{dt} = -(C_{v1} \sqrt{h_1 - h_2} - q_{s1}^0) + \bar{q}_{e1} + \bar{q}_{m1} \quad (1)$$

$$A_2 \frac{d\bar{h}_2}{dt} = (C_{v1} \sqrt{h_1 - h_2} - q_{s1}^0) - (C_{v2} \sqrt{h_2 - h_2} - q_{s2}^0) + \bar{q}_{e2} \quad (2)$$

con condiciones iniciales  $h_1(t=0) = h_1^0$ ,  $h_2(t=0) = h_2^0$  o bien,  $\bar{h}_1=0$  y  $\bar{h}_2=0$  y donde aquella variable indicada como  $\bullet$  representa a la variable escrita como desviación del estado estacionario inicial.

Linealizando por serie de Taylor y reordenando las ecuaciones se obtiene el modelo matemático lineal en el dominio del tiempo, resultando éste,

$$A_1 \frac{d\bar{h}_1}{dt} = -\frac{1}{R_1} \bar{h}_1 + \frac{1}{R_1} \bar{h}_2 + \bar{q}_{e1} + \bar{q}_{m1}, \quad (3)$$

$$A_2 \frac{d\bar{h}_2}{dt} = \frac{1}{R_1} \bar{h}_1 - \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) \bar{h}_2 + \bar{q}_{e2}, \quad (4)$$

donde  $R_1$  y  $R_2$  son las resistencias hidráulicas de las válvulas manuales indicadas en la Fig. 1 y cuyos valores experimentales se resumen en la Tabla 1.

Note que la Ec. (3) y (4) se pueden llevar a la forma de representación de estados,

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= A x(t) + B u(t) + E l(t) \\ y(t) &= C x(t) \end{aligned} \quad (5)$$

donde se define  $x := [x_1 \quad x_2]^T$ ,  $x_1(t) := \bar{h}_1(t)$ ,  $x_2(t) := \bar{h}_2(t)$  e  $y(t) := x_2(t)$ , y por tanto se tiene que,

$$\begin{aligned} A &= \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -1/R_1 A_1 & 1/R_1 A_1 \\ 1/R_1 A_2 & -(1/A_2)(1/R_1 + 1/R_2) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (6)$$

$$B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/A_1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (7)$$

$$E = \begin{bmatrix} 1/A_1 \\ 1/A_2 \end{bmatrix} \quad (8)$$

$$C = [0 \quad 1] \quad (9)$$

Aquí  $u(t)$  es la variable manipulada ( $q_{m1}$ ) y  $l(t)$  son las perturbaciones de entrada ( $q_{e1}$  y  $q_{e2}$ ) y los estados  $x_1$  y  $x_2$  son medibles ya que representan los niveles de líquido en los tanques, los que son monitoreados a lo largo de su operación mediante sensores de nivel.

### 3. CONTROL ÓPTIMO POR RELIMENTACIÓN DE ESTADOS SIN RESTRICCIONES USANDO LMI

La idea en principio es implementar un feedback óptimo de estados conocido como regulador lineal cuadrático (LQR) y para ello planteamos como funcional objetivo el clásico funcional cuadrático que busca minimizar la energía consumida por el actuador y por los estados. Así, la integral a minimizar resulta ser,

$$J = \int_0^{\infty} (x^T(t) Q x(t) + u^T(t) R u(t)) dt \quad (10)$$

donde  $x(t)$  es el vector de estados del sistema. Es bien conocida que la ley de control óptimo que asegura estabilidad asintótica (Rautenberg y D'atellis,

2004, entre muchos otros) y que minimiza la formulación matemática (10) resulta ser,

$$u_{opt}(t) = -K_{opt} x_{opt}(t) \quad (11)$$

donde,  $u_{opt}(t)$  y  $x_{opt}(t)$  resultan ser los valores óptimos de la manipulada y los estados, y la ganancia óptima buscada es,

$$K_{opt} = R^{-1} B^T P, \quad (12)$$

de acuerdo con los textos clásicos (Ogatta, 1993; Rautenberg y D'attellis, 2004; entre otros).

Aquí,  $P$  es una matriz incógnita que se determina resolviendo la ARE,

$$A^T P + P A - P B R^{-1} B^T P + Q = 0 \quad (13)$$

con,

$$P = P^T = \begin{bmatrix} p_1 & p_2 \\ p_2^T & p_3 \end{bmatrix}. \quad (14)$$

Note que reemplazando el valor de  $u_{opt}$  en el funcional (10) se llega a,

$$J_{min} = \int_0^{\infty} x_{opt}^T(t) [Q + P^T B R^{-1} B^T P] x_{opt}(t) dt \quad (15)$$

### 3.1. Conceptos Básicos de LMI.

Una LMI es una restricción o condición de diseño que puede ser escrita bajo la forma canónica general (Boyd et al., 1994),

$$\mathcal{F}(\pi) = F_0 + \pi_1 F_1 + \pi_2 F_2 + \dots + \pi_m F_m < 0 \quad (16)$$

donde  $F_0, F_1, F_2, \dots, F_m$  son matrices simétricas conocidas y el vector  $\pi = [\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_m]^T$  es la variable de decisión a determinar tal que,  $\mathcal{F}(\pi) < 0$ . Es posible demostrar que la LMI escrita bajo la forma (16) define una región convexa sobre la variable  $\pi$  (Boyd, 1994; Gahinet et al., 1995)<sup>2</sup>.

Cuando sistema de control posee múltiples restricciones, cada una de éstas pueden ser expresada como una LMI,  $\mathcal{F}_1 < 0, \mathcal{F}_2 < 0, \dots, \mathcal{F}_k < 0$ , para luego escribir una única LMI de la forma,

$$\mathcal{F}(\pi) := \text{diag}[\mathcal{F}_1(\pi), \mathcal{F}_2(\pi), \dots, \mathcal{F}_m(\pi)] < 0. \quad (17)$$

Así, disponiendo de dos o más LMI's donde cada una define una región convexa, la región de búsqueda de la

<sup>2</sup> Ahora, el vector  $\pi$  que se restringe al dominio a la región convexa donde pueden aplicarse los algoritmos de optimización para la búsqueda de su solución.

solución resulta de la intersección de las regiones individuales de cada LMI. Por tanto, dado que la intersección de dos o más regiones convexas es otra región convexa, entonces, todo mínimo local es global, asegurando que el mínimo hallado es el óptimo dentro de este nuevo marco de limitaciones.

*Solución de la Ecuación de Ricatti via LMI.* Basándose en la Ec. (15) el problema podría haber sido pensado definiendo un función  $J$  tal que,

$$J = \int_0^{\infty} x^T(t) [Q + \Pi^T B R^{-1} B^T \Pi] x(t) dt \quad (18)$$

donde  $\Pi$  es una matriz simétrica variable definida como,

$$\Pi := \begin{bmatrix} \pi_1 & \pi_2 \\ \pi_2^T & \pi_3 \end{bmatrix} \quad (19)$$

tal que  $J = J_{min}$ , cuando  $\Pi = P$ . Por tanto, minimizar la integral (18) implica minimizar el corchete de dicha integral. Entonces se podría plantear un problema de optimización como sigue:

$$\min_{\Pi} [Q + \Pi^T B R^{-1} B^T \Pi] \quad (20)$$

s. a,

restricciones a determinar<sup>3</sup>.

De manera que en este punto, el objetivo es determinar las restricciones del problema de optimización anterior tal que la solución del problema de optimización (20) nos lleve a la solución de la ARE. Por ejemplo, en este caso  $\Pi$  será tal que

$$A^T \Pi + \Pi A + Q - \Pi B B^T \Pi < 0 \quad (21)$$

y así la condición de estabilidad asintótica (13) queda expresada como una inecuación y pasa a formar parte del problema de optimización.

Por tanto, nuestro objetivo es minimizar un funcional cuadrático asociado a la ARE y dado que ésta es una **ecuación** matricial simétrica **no lineal** y las LMIs, como su nombre lo indica son **inecuaciones lineales** entonces, se debe transformar la inecuación (21) en una inecuación matricial lineal. Para ello, se utiliza el complemento de Schur, y por tanto, el problema de optimización (18) quedará sujeto a un conjunto de restricciones convexas determinadas por la LMI.

**Remarca 1.** Sea  $\Pi$  según (19) y

$$\mathcal{F}_i(\Pi) := \begin{bmatrix} F_{11}(\Pi) & F_{12}(\Pi) \\ F_{12}^T(\Pi) & F_{22}(\Pi) \end{bmatrix} \quad (22)$$

<sup>3</sup> Note que,  $P$  deja de ser una matriz con términos constantes, para transformarse en  $\Pi$ , una matriz con términos variables.

ambas matrices simétricas luego,  $\mathcal{F}(\Pi)$  es definida negativa si y sólo si se cumple que las matrices que definen al complemento de Schur

$$F_{11}(\Pi) < 0 \quad (23)$$

y

$$F_{11}(\Pi) - F_{12}(\Pi)F_{22}^{-1}(\Pi)F_{12}^T(\Pi) < 0 \quad (24)$$

son definidas negativas.

**Demostración.** Li y Mathias, 2000. ■

Por tanto, el objetivo es encontrar  $\mathcal{F}(\Pi)$  tal que el complemento de Schur resultante sea coincidente con la ARE escrita como inecuación. Para ello se designa,

$$F_{11}(\Pi) = A^T \Pi + \Pi A + Q \quad (25)$$

$$F_{12}(\Pi) = \Pi B \quad (26)$$

$$F_{12}^T(\Pi) = B^T \Pi \quad (27)$$

$$F_{11}(\Pi) = A^T \Pi + \Pi A + I = \begin{bmatrix} 2a_{11}\pi_1 + 2a_{21}\pi_2 + 1 & a_{12}\pi_1 + (a_{11} + a_{22})\pi_2 + a_{21}\pi_3 \\ a_{12}\pi_1 + (a_{11} + a_{22})\pi_2 + a_{21}\pi_3 & 2a_{12}\pi_2 + 2a_{22}\pi_3 + 1 \end{bmatrix} \quad (30)$$

$$F_{12}(\Pi) = X B = \begin{bmatrix} b_1\pi_1 \\ b_1\pi_2 \end{bmatrix} \quad (31)$$

$$F_{12}^T(\Pi) = B^T \Pi = \begin{bmatrix} b_1\pi_1 & b_1\pi_2 \end{bmatrix} \quad (32)$$

y

$$F_{22}(\Pi) = 1 \quad (33)$$

donde en (30) se asume que  $Q = I$ . Si estas expresiones se reemplazan en (29) se arriba a,

$$\mathcal{F}(\Pi) = \begin{bmatrix} 1 + 2a_{11}\pi_1 + 2a_{21}\pi_2 & a_{12}\pi_1 + (a_{11} + a_{22})\pi_2 + a_{21}\pi_3 & b_1\pi_1 \\ a_{12}\pi_1 + (a_{11} + a_{22})\pi_2 + a_{21}\pi_3 & 1 + 2a_{12}\pi_2 + 2a_{22}\pi_3 & b_1\pi_2 \\ b_1\pi_1 & b_1\pi_2 & 1 \end{bmatrix} < 0 \quad (34)$$

o bien,

$$\mathcal{F}(\Pi) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{12} & 0 & 0 \\ b_1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \pi_1 + \begin{bmatrix} 2a_{21} & a_{11} + a_{22} & 1 \\ a_{11} + a_{22} & 2a_{12} & b_1 \\ 0 & b_1 & 0 \end{bmatrix} \pi_2 + \begin{bmatrix} 0 & a_{21} & 0 \\ a_{21} & 2a_{22} & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \pi_3 < 0 \quad (35)$$

Notar que (35) tiene la forma canónica de la LMI (16),

$$\mathcal{F}(\Pi) = F_0 + F_1\pi_1 + F_2\pi_2 + F_3\pi_3 < 0 \quad (36)$$

y

$$F_{22}(\Pi) = 1 \quad (28)$$

Note que operando con (25) a (28) en la Ec. (22) se llega a,

$$\mathcal{F}(\Pi) = \begin{bmatrix} A^T \Pi + \Pi A + Q & \Pi B \\ B^T \Pi & 1 \end{bmatrix} < 0 \quad (29)$$

Así, el complemento de Schur de (29) resulta ser la ARE expresada como inecuación. Note que (29) es otra forma de escribir la condición de estabilidad asintótica (21) como una LMI. Es posible demostrar que la inecuación (29) puede ser escrita como una LMI en su forma canónica (16) sin mayores esfuerzos.

**Remarca 2.** Sea  $A$  y  $B$  las matrices de la representación de estado del sistema hidráulico LTI (5) (con  $A$  y  $B$  según (6) y (7)) luego, la inecuación (29) es una LMI de la forma (16).

**Demostración.** Sea  $A$  y  $B$  matrices reales tal que,  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$  y  $B \in \mathbb{R}^{2 \times 1}$  (según (6) y (7) respectivamente) luego, de acuerdo con (25) a (28) resulta sencillo probar que,

con  $F_i = F_i^T$ ,  $\forall i=0,1,2,3$ . ■

Ahora, el objetivo es minimizar una función objetivo (Ec. (20)), definida sobre la región factible, de manera que el vector  $\pi$  alcance la solución de la ARE, esto es,  $\Pi = P$ . Dado que a la matriz (29) (o bien para nuestro caso particular la Ec. (35)) se le pide que sea definida negativa, por el criterio de Sylvester (Ref. Ogatta, 1993) se deberá cumplir que,

$$1 + 2a_{11}\pi_1 + 2a_{21}\pi_2 < 0 \quad (37)$$

$$\det(F_{11}(\Pi)) > 0 \quad (38)$$

y

$$\det(\mathcal{F}(\Pi)) < 0 \quad (39)$$

Por tanto, la intersección de las tres inecuaciones polinómicas escritas anteriormente dan como resultado una región convexa o conjunto factible donde buscar la solución.

Recordemos que buscamos aquella combinación que minimiza el volumen o traza de la elipsoide y que resulta ser coincidente con la solución de la ARE. Por tanto, el problema de minimizar la integral (18) ahora se puede escribir como sigue:

$$\min_{\Pi} [Q + \Pi^T B R^{-1} B^T \Pi] \quad (40)$$

s. a,

restricciones (36), (37) y (38).

Dado que  $Q$ ,  $B$ , y  $R$  son matrices reales constantes entonces, encontrar  $\Pi$  que minimiza  $[Q + \Pi^T B R^{-1} B^T \Pi]$  implica minimizar la traza de  $\Pi$ . La Fig. 3 busca clarificar al lector la idea planteada en esta sección.

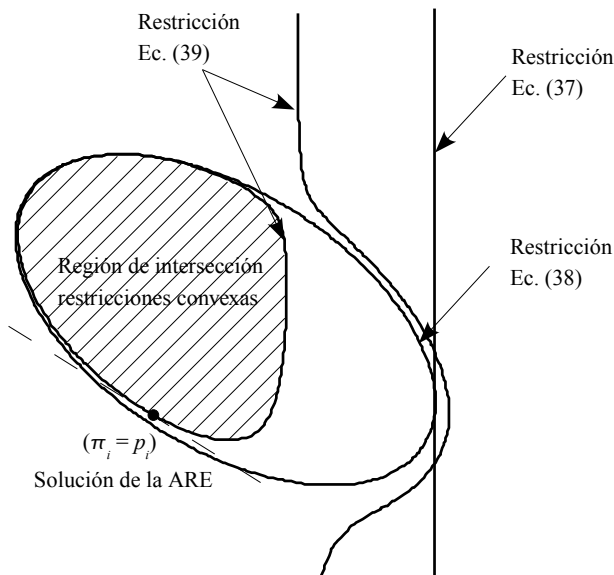


Fig. 2: Un diagrama cualitativo que intenta explicar lo detallado en la Sección 3.1.

### 3.2. Diseño Libre de Offset vía LMI

Resulta de suma importancia en el control de procesos la performance en estado estacionario, es decir su capacidad de absorber perturbaciones sin alejarse del punto de operación deseado o bien, lograr alcanzar sin error el estado estacionario de nuevos puntos de operación (Muske y Badwell, 2002; Mader y Morari, 2007 y González et al., 2008). También en la literatura clásica (Ogatta, 1993; entre otros) aparecen alternativas que combinan el diseño óptimo por realimentación de estados y la eliminación de offset. La Fig. 3 muestra la realimentación de estados propuesta para el sistema hidráulico con la ley de control óptimo (11), de acuerdo con Ogatta (1993)..

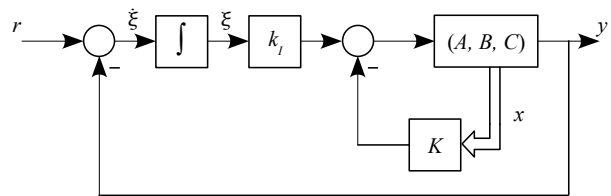


Fig. 3: Realimentación de estados que incluye un modo integral para eliminar offset en la variable de control.

Dicha figura muestra que además del feedback de estado se ha incluido un integrador con el objeto de eliminar offset debido a que el sistema hidráulico a lazo abierto es tipo cero, como se puede constatar en el modelo lineal (3)-(4). Por tal motivo, siguiendo a autores clásicos (Ogata, 1993; entre otros) la dinámica del sistema realimentado puede ser escrita como,

$$\begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{\xi}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ -C & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ \xi(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix} u(t) + \begin{bmatrix} E \\ 0 \end{bmatrix} l(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} r(t) \quad (41)$$

donde se define,  $\dot{\xi}(t) := r(t) - y(t) = r(t) - Cx(t)$ . De acuerdo con la Fig. 3 la ley de control ahora resulta,

$$u(t) = -Kx(t) + k_i \xi(t) \quad (42)$$

Basado en lo anterior, es posible definir,

$$\hat{A} := \begin{bmatrix} A & 0 \\ -C & 0 \end{bmatrix} \quad (43)$$

y

$$\hat{B} := \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix} \quad (44)$$

Ahora, la condición de estabilidad asintótica (29) puede ser escrita en términos de  $\hat{A}$  y  $\hat{B}$ , y por tanto,

$$\widehat{\mathcal{F}}(\Pi) = \begin{bmatrix} \hat{A}^T \Pi + \Pi \hat{A} + Q & \Pi \hat{B} \\ \hat{B}^T \Pi & -1 \end{bmatrix} < 0 \quad (45)$$

y el problema de optimización (40) equivale a la LMI (45) sujeto a las restricciones correspondientes, pudiéndose escribir ahora,

$$\min_{\Pi} [\widehat{Q} + \Pi^T \widehat{B} R^{-1} \widehat{B}^T \Pi] \quad (46)$$

s. a,

$$1 + 2 a_{11} \pi_1 + 2 a_{21} \pi_2 < 0 \quad ,$$

$$\det(\widehat{A}^T \Pi + \Pi \widehat{A} + Q) > 0 \quad ,$$

$$\det(\widehat{\mathcal{F}}(\Pi)) < 0 \quad .$$

Finalmente, la solución a dicho problema resulta ser,

$$\widehat{K}_{opt} = [K \quad -k_I] \quad (47)$$

donde  $K$  y  $k_I$  se corresponden con el feedback de estados y el modo integrador presentados en la Fig. 3.

#### 4. CONTROL POR RELIMENTACIÓN DE ESTADOS CON RESTRICCIONES DE DISEÑO USANDO LMI

En esta sección la idea en principio es implementar un feedback óptimo de estados que contemple las restricciones operativas. Para ello, de acuerdo con lo detallado en la Sección 3.1 se necesita incorporar otra LMI tal que considere a las restricciones operativas enunciadas en la Tabla 1. Autores como Khotare *et al.* (1996) han estudiado la manera de incorporar restricciones en las variables manipulada y en la controlada respectivamente. En este trabajo, proponemos una forma sencilla de incorporar una LMI que contemple la posibilidad de evitar la saturación de la manipulada.

Es bien conocido que uno de los principales problemas en los sistemas de control es la saturación de las válvulas de control, en nuestro caso, el caudal manipulado debe variar entre 0 y un valor máximo, que para el caso del sistema hidráulico de laboratorio es de 3.3 l/min. Teniendo en cuenta la ley de control óptima (11) es posible escribir,

$$u_{opt}^2(t) = |K_{opt} x_{opt}(t)|^2 \leq |K_{opt}|^2 |x_{opt}(t)|^2 \quad (48)$$

Dado que el sistema de tanques puede ser considerado como un sistema disipativo entonces,

$$|x_{opt}(t)| \leq |x^0| \quad \forall t \geq 0 \quad (49)$$

donde  $x^0$  es el vector de condiciones iniciales. Esto último nos lleva a que,

$$u_{opt}^2(t) \leq |K_{opt}|^2 |x^0|^2 \quad \forall t \geq 0 \quad (50)$$

Definimos  $u_{max}$  como cota superior de la manipulada, de manera que se cumpla,

$$|K_{opt}|^2 |x^0|^2 < u_{max}^2 \quad (51)$$

Remplazando en la ley de control se tiene que,

$$u_{opt}^2(t) \leq |K_{opt}|^2 |x^0|^2 < u_{max}^2 \quad (52)$$

obteniendo así una cota superior para el vector de ganancias,

$$|K_{opt}|^2 < u_{max}^2 / |x^0|^2 =: L \quad (53)$$

Siendo,  $|K_{opt}|^2 = K_{opt} K_{opt}^T$  luego, si se pide que  $K_{opt} K_{opt}^T < L$  entonces surge una restricción planteada como desigualdad cuadrática,  $K_{opt} K_{opt}^T - L < 0$  o bien,

$$R^{-1} \widehat{B}^T \Pi \Pi \widehat{B} (R^{-1})^T - L < 0 \quad (54)$$

Ya que ahora se dispone de una restricción para el caudal máximo, ésta puede ser llevada a la forma matricial mediante la desigualdad de Shur, resultando

$$\begin{bmatrix} -L & R^{-1} \widehat{B}^T \Pi \\ \Pi \widehat{B} (R^{-1})^T & -1 \end{bmatrix} < 0 \quad (55)$$

Disponiendo ahora dos LMI's, y por lo expresado en la Sección 3.1, se tiene garantía de mínimo global, si este existe. Así, atendiendo a lo expresado en (17) es posible escribir el sistema completo como,

$$\begin{bmatrix} \widehat{A}^T \Pi + \Pi \widehat{A} + Q & \Pi \widehat{B} & 0 & 0 \\ \widehat{B}^T \Pi & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -L & R^{-1} \widehat{B}^T \Pi \\ 0 & 0 & \Pi \widehat{B} (R^{-1})^T & -1 \end{bmatrix} < 0 \quad (56)$$

##### 4.1. Ejemplo

Considere el sistema hidráulico experimental cuyas dimensiones físicas y restricciones operativas se listan en la Tabla 1.

La idea es implementar un feedback de estados tal que el sistema quede libre de offset, como se detalla en la Sección 3.2, tal que evite la saturación de la manipulada y el rebalse los tanques.

Note que los estados son los niveles de líquidos en los tanques y estos son medibles, de manera que no es necesario implementar un observador.

Dado que la válvula de control está sobredimensionada en el sistema experimental, esto es, los tanques no pueden desalojar todo el líquido para cuando el caudal es de 3.3 l/min, entonces se pone como restricción que el caudal máximo soportado es de 1.5 l/min. Así para el sistema lineal de (6) a (9) con las dimensiones físicas indicadas en

la Tabla 1 queda definida la LMI (56). La resolución fuera de línea de dicha LMI utilizando el toolbox de Matlab (Gahinet *et al.*, 1995) da como resultado,  $K_{opt} = [-0.2226 \cdot 10^{-5} \quad 0.1609 \cdot 10^{-5} \quad 0.8121 \cdot 10^{-5}]$ , donde  $K_{opt}$  es definido según (47). Aquí se destaca que un especial cuidado se debe tener con el escalado del sistema. La Fig. 4 muestra las simulaciones numéricas utilizando el modelo no lineal (1) y (2), y donde se verifica que no hay saturación de la manipulada ( $q_{mi}$ ) así como también no hay rebalse de líquido para las tres situaciones estudiadas (cierre de lazo de control, cambio en set-point y eliminación de perturbación).

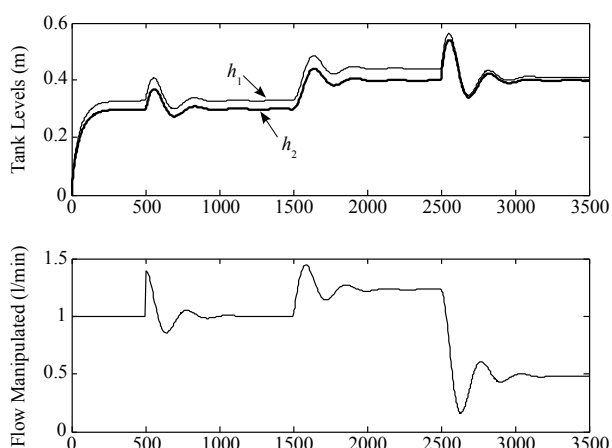


Fig. 4: Niveles de líquido en los tanques y caudal manipulado.

Note que en  $t = 500$  seg. el lazo de control se cierra y el sistema de control elimina la diferencia de nivel con respecto al valor de consigna, sin saturar la manipulada. Luego en  $t = 1500$  seg., se realiza un cambio en consigna y en  $t = 2500$  seg. se ingresa una perturbación escalón de amplitud de un 400% por encima del valor de estado estacionario en  $q_{e2}$ . Dicha magnitud de cambio fue adoptada para evidenciar claramente el cambio implementado. Si la magnitud de los cambio fuese considerablemente mayor y dado que en el diseño del sistema de control sólo se considera la resolución de un problema de optimización *fuera de línea*, se podría saturar la manipulada debido a que por el momento no se ha incorporado una optimización *en línea* que incluya la posibilidad de satisfacer restricciones.

#### 4. CONCLUSIONES

Este trabajo presenta el diseño un sistema de control óptimo aplicable a un sistema hidráulico incorporando restricciones en la variable manipulada. El diseño tradicional LQR fue reformulado de manera tal que permita eliminar offset e incorporar una restricción operativa relacionada a la manipulada, conservando la condición de estabilidad asintótica mediante el uso de dos LMI's. Así, la matriz de ganancias resultante a la resolución del problema anterior no pierde optimalidad. Los buenos resultados obtenidos mediante simulaciones numéricas del sistema hidráulico de laboratorio alienta a seguir trabajando con esta metodología de diseño aplicable a sistemas ingenieriles.

#### RECONOCIMIENTO

Los autores agradecen a la Universidad Nacional del Litoral por el soporte financiero recibido (CAI+D 2005 – # 04/0016).

#### REFERENCIA

- Boyd, S., L. El Ghaoui, E. Feron, V. Balakrishnan (1994), *Linear Matrix Inequalities in Systems and Control Theory*. Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM).
- Khotare, M., V. Balakrishman y M. Morari (1996), "Robust Constrained Model Predictive Control Using Linear Matrix Inequalities", *Automatica*, **32**, 10, 1361-1379.
- Li, C.-K. Y R. Mathias (2000), "External Characterization of the Schur Complement and Resulting Inequalities", *SIAM – Review*, **42**, 2, 233-246.
- Gahinet, P., A. Nemirovski, A. J. Laub y M. Chilali (1995). *Matlab, LMI's Toolbox (version 1)*. The Mathworks Inc.
- González A. H., E. J. Adam y J. L. Marchetti (2007), "Conditions for Offset Elimination in State Space Receding Horizon Controllers: A Tutorial Analysis", *Chemical Engineering and Processing*, doi:10.1016/j.cep.2007.11.011. (en prensa).
- Mäder U. y M. Morari (2007), "Offset – Free Reference Tracking for Predictive Controllers", *IEEE Conference on Decision and Control*, New Orleans – USA, Dec. 2007.
- Muske K. R. y T. A. Badgwell (2002), "Disturbance Modeling for Offset – Free Linear Model Predictive Control", *Journal of Process Control*, **12**, 617-632.
- Ogata, K. (1993). *Ingeniería de Control Moderna*. Prentice Hall Hispanoamérica S. A., Segunda Edición.
- Rautenberg, C. N. y C. E. D'attellis (2004). *Control Lineal Avanzado y Control Óptimo*. Asociación Argentina de Control Automático (AADECA), Buenos Aires.