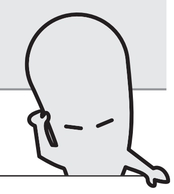
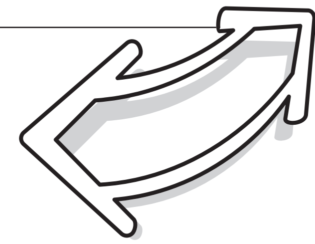
[Contratapa]



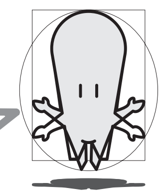
DESAFÍOS MATEMÁTICOS

Si y sólo si



Si y sólo si aborda distintos aspectos de la Matemática y sus intervenciones en la vida cotidiana. A partir del planteo de problemas, acertijos y juegos que desafían e invitan a la interacción, la Facultad de Ingeniería Química propone un nuevo espacio para la promoción de la cultura científica.

Este lema de cubrimiento fue planteado y resuelto por el matemático italiano Giuseppe Vitali (1885-1932). Por eso se conoce con el nombre de *Lema de Vitali* y forma parte de una familia de resultados que tienen numerosas aplicaciones en el campo matemático. La belleza del problema expuesto aquí es que su solución depende solamente de propiedades geométricas.

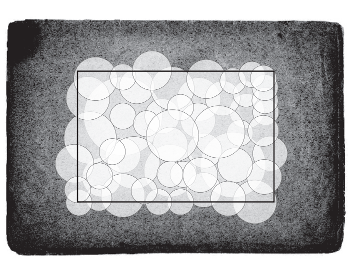


UN PROBLEMA DE CUBRIMIENTO

En diferentes puntos de una ciudad de forma rectangular están ubicadas farolas de luz de diferentes potencias. Para cada farola se considera un círculo cuyo tamaño es proporcional a la potencia de su lámpara y se conviene que está iluminado por esa farola lo que está dentro de dicho círculo y no iluminado lo que está fuera de él. En esta ciudad los círculos iluminados son tantos que se superponen desordenadamente, produciendo una exagerada luminosidad en algunos lugares y, por ende, un gran desperdicio eléctrico. El intendente decide consultar a un electricista para obtener una solución al problema aprovechando las farolas ya existentes.

Este técnico, que en sus ratos libres estudia Matemáticas, buscando en la bibliografía descubre que está en presencia de un problema de cubrimiento. Encuentra una solución y se la expone al intendente de la siguiente manera:

"De todas las farolas existentes en la ciudad puedo seleccionar algunas suficientemente distantes entre sí como para que sus círculos de luz no se toquen. Sin embargo, si triplicamos la potencia de dichas farolas ¡todo el barrio quedará iluminado!".



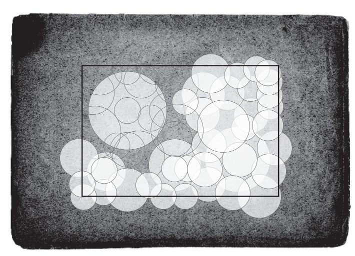
Como los radios de los círculos iluminados son proporcionales a la potencia suministrada, triplicar la potencia es equivalente a triplicar los radios de los círculos. El problema puede plantearse sobre papel dibujando los círculos iluminados cuyos centros representan las farolas existentes.

Entonces, lo que dice el electricista es que dado un rectángulo ***R*** y una familia finita de círculos que lo cubre, se pueden seleccionar algunos con la propiedad de ser disjuntos entre sí y tales que, triplicando sus radios, ***R*** quede completamente cubierto por los nuevos círculos.

En otros términos, el argumento del electricista es que se puede elegir un subconjunto de círculos suficientemente alejados entre sí, pero también suficientemente cercanos unos a otros, como para que triplicando sus radios, se cubra completamente a ***R***. En este sentido, la elección es óptima.

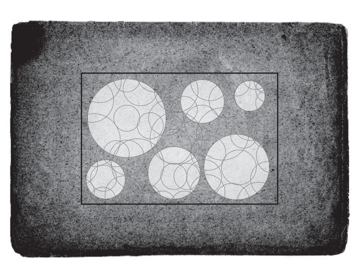
El procedimiento que utiliza el electricista para elegir los círculos es el siguiente:

En el primer paso elige el círculo de luz más grande que corresponde a la farola de mayor potencia. Si hay varios de esos círculos selecciona uno cualquiera y lo llama B_1 y a la farola que está en el centro f_1. A continuación apaga todas las farolas cuyos círculos de luz **cortan** a B_1 y las descarta. Si no quedan farolas encendidas, salvo por f_1, termina su selección acá.

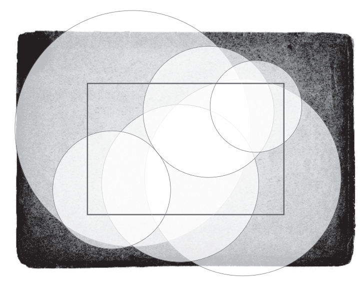


Si aún hay farolas encendidas, porque todavía quedan círculos iluminados que no cortan a B_1, encara el segundo paso. Entre todos los círculos que permanecen iluminados –no cortan a B_1 y son más pequeños que él– selecciona el más grande, lo llama B_2 y f_2 a la farola correspondiente. Apaga todas las farolas cuyos círculos **cortan** a B_2 y las descarta. Si no quedan más farolas encendidas, termina su selección quedando f_1 y f_2 en su lista. En caso contrario continúa el proceso.

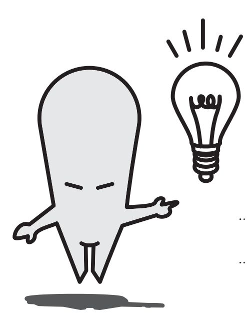
Claramente, después de un número finito de pasos no quedan más círculos iluminados que los de las farolas que están en la lista del electricista, llamémosla Φ.



Veamos que el conjunto encontrado es una solución para el problema de la ciudad. En primer lugar, por el procedimiento de elección ninguno de los círculos seleccionados se corta con otro del mismo tipo. Por otra parte, como los círculos de luz del principio cubren todo ***R*** -la ciudad- cada punto de ***R*** está en alguno de aquellos. Entonces será suficiente ver que cada círculo de los iniciales es cubierto, en el peor de los casos, por un círculo en cuyo centro está una farola f de Φ pero su radio es el triple del que corresponde a f. Si *B* es un círculo cualquiera, pueden pasar dos cosas: la farola f en su centro está en Φ y B está iluminado y, por lo tanto, no es necesario hacer cambios, o f fue apagada y *B* eliminado. En este caso, *B* corta a alguno de los círculos, digamos *B*', más grande o igual que *B* y correspondiente a una farola f' de Φ. Es fácil ver que B está cubierto por el círculo 3B', de radio triple que *B*'. Entonces bastará reemplazar f' por una del triple de potencia para iluminar todo *B*. Así, el electricista resolvió el problema.



¿Te animás a probar que la suma de las áreas de los círculos elegidos es por lo menos 1/9 del área de R?



Solución en página 2

DRA. SILVIA HARTZSTEIN
> *Docente-investigadora, Departamento de Matemática FIQ-UNL. IMAL (UNL-CONICET)*

LIC. MAURICIO RAMSEYER
> *Docente, Departamento de Matemática FIQ-UNL. Becario doctoral IMAL (UNL-CONICET)*

LIC. CAROLINA REVUELTA
> *Directora de Cultura Científica FIQ*

GUILLERMO VALAROLO
> *Imagen Cultura Científica FIQ*

[+] **info**
www.fiq.unl.edu.ar/animate
www.facebook.com/culturacientifica