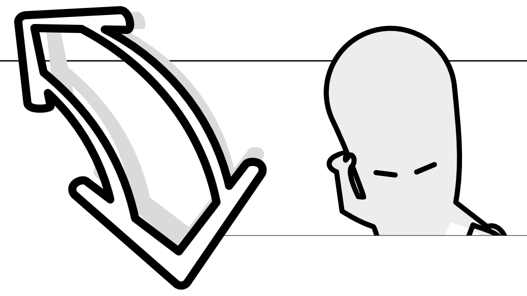
[Contratapa]

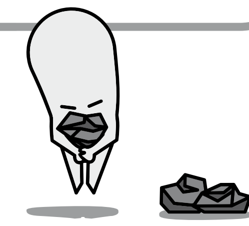
DESAFÍOS MATEMÁTICOS

Si y sólo si



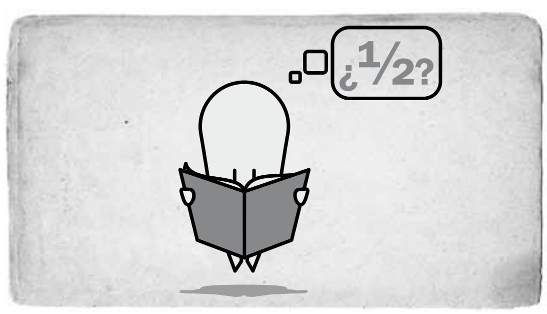
Si y sólo si aborda distintos aspectos de la Matemática y sus intervenciones en la vida cotidiana. A partir del planteo de problemas, acertijos y juegos que desafían e invitan a la interacción, la Facultad de Ingeniería Química propone un nuevo espacio para la promoción de la cultura científica.

La paradoja de Zenón de Elea (490-430 a. C.) y la piedra relata la historia en la cual Zenón está a ocho metros de un árbol y lanza una piedra, tratando de dar al árbol. La piedra, para llegar al objetivo, tiene que recorrer antes los primeros cuatro metros. Luego, para recorrer los siguientes cuatro metros deberá antes recorrer dos metros. Y así siempre deberá recorrer la mitad de lo que le falta para alcanzar el árbol. De este modo, la piedra nunca llegará al árbol. Esto es una paradoja puesto que la realidad nos indica que sí llegará.

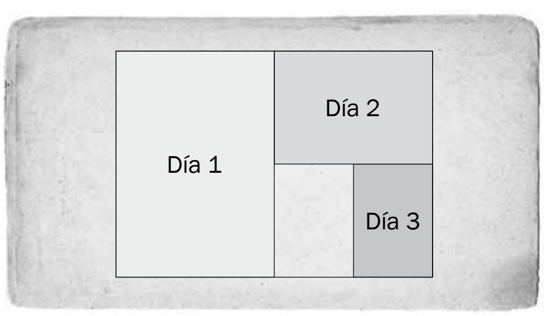


PARADOJAS MATEMÁTICAS

En este artículo expondremos que sumar una cantidad infinita de números puede dar como resultado un número. Para comprenderlo mejor le proponemos el siguiente plan de lectura: hoy puede leer la mitad de este artículo, mañana la mitad de lo que queda y así sucesivamente los demás días.



Siguiendo esta propuesta, podría preguntarse ¿en cuántos días terminaré de leerlo? Intuitivamente se dará cuenta que necesitará muchos días para terminarlo. También podría preguntarse ¿qué proporción del artículo leí al finalizar, por ejemplo, el tercer día? Para responder esta última pregunta podemos pensar en el siguiente gráfico:

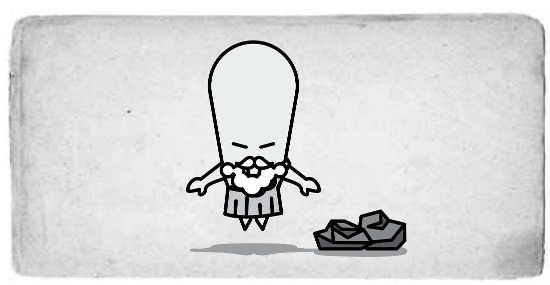


Podemos suponer que la cantidad leída es proporcional al tamaño de la hoja y que ésta tiene una superficie igual a 1. Entonces el primer día habremos leído 1/2, el segundo 1/2 de 1/2, o sea 1/2x1/2; el tercero 1/2x1/2x1/2. Por lo tanto, si sumamos, resulta que hemos leído 7/8 del artículo. Es decir, al finalizar el tercer día nos falta leer 1/8 del artículo.

Ahora imaginemos que la porción de texto no leída (el rectángulo que ha quedado en blanco) es la que teníamos originalmente. De esta manera, al finalizar el sexto día nos faltará 1/8 de 1/8 del total del artículo. Esto es 1/64 del artículo total; al noveno día nos faltará 1/8 de 1/64, es decir, 1/512 del artículo total, y así sucesivamente. Observamos que, si bien al pasar los días nos falta menos por leer, nunca terminaríamos de hacerlo en una cantidad finita de días.

Para mostrar esto, usaremos el concepto de *series geométricas*, herramienta importante utilizada en la resolución de muchos problemas modernos. Una serie geométrica de razón **r** es una suma de infinitos términos comenzando desde un número **a** y luego cada término siguiente es igual al anterior pero multiplicado por **r**, es decir: $a+ar+ar^2+ar^3+ar^4+\ldots$

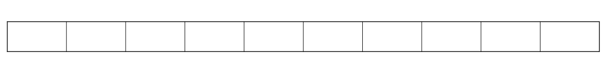
Nos preguntamos entonces en qué caso esta suma nos dará un número. En el diagrama anterior, la intuición nos muestra que $1/2 + (1/2)^2 + (1/2)^3+\ldots =1$. Es decir, como cada término está asociado a un día distinto, el razonamiento que acabamos de hacer nos muestra que necesitamos infinitos días para completar la lectura. Esto es una paradoja puesto que sabemos que es posible leer un artículo en su totalidad en cierta cantidad de días. Una situación similar es planteada en la paradoja de Zenón de Elea y la piedra, en la cual Zenón lanza una piedra tratando de dar a un árbol.



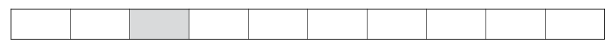
En general, vale que si $-1<r<1$ entonces $a+ar+ar^2+ar^3+ar^4+\ldots = \mathbf{a}/(1-\mathbf{r})$. En particular para $\mathbf{a}=1/2$ y $\mathbf{r}=1/2$ se verifica la fórmula.

Ahora mostraremos otro problema, estrechamente vinculado con *series geométricas*, que también desafía nuestra intuición. Pensemos en el intervalo [0,1], es decir todos los números mayores o iguales que 0 y menores o iguales que 1. Su longitud, calculada como extremo derecho menos extremo izquierdo es 1 – 0 = 1. Si al intervalo [0,1] le sacamos los números que tienen 2 en su expresión decimal ¿cuál es la longitud del conjunto resultante? Sorprendentemente, es 0. Sin embargo, en él han quedado muchos números.

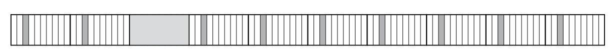
Para mostrar este hecho pensaremos en etapas. En la primera etapa queremos sacar los números cuya representación decimal tiene un 2 inmediatamente luego de la coma. Para ello dividimos el intervalo en 10 porciones iguales como muestra la siguiente figura:



En la primera porción se encuentran los números entre 0 y 0,1; por ejemplo el 0,019. Esto es, aquellos que tienen un 0 en el primer lugar después de la coma. Así, en la segunda porción, se encuentran los que tienen un 1, y de esta forma, en la tercera porción están los números que debemos eliminar en esta primera etapa, cuya longitud es 1/10.



En la segunda etapa, queremos eliminar aquellos números que tienen un 2 en las centésimas. Para esto repetimos el procedimiento anterior con cada una de las 9 porciones restantes. Es decir, por cada una de ellas eliminaremos una pequeña porción de longitud 1/100. De esta manera habremos eliminado una longitud total de 9/100, como lo refleja la siguiente figura:



El proceso de eliminación se continúa infinitamente puesto que hay infinitas posiciones donde puede estar el 2. Luego, si sumamos las longitudes de las porciones eliminadas en todas las etapas y aplicando la fórmula vista anteriormente tenemos que:

$$1/10+1/10 \times 9/10+1/10 \times (9/10)^2 +\ldots = (1/10) / (1-9/10) =1$$

¡Pero 1 es la longitud total del intervalo! A pesar que en apariencia en cada etapa estamos eliminando una pequeña proporción, hemos mostrado que la longitud total de lo eliminado coincide con la longitud del intervalo original. Sin embargo, sabemos que hay una gran cantidad de números que no han sido eliminados. Esto es una paradoja que ha sido resuelta por la matemática moderna mediante la formulación de la teoría de la medida de Lebesgue.

¿Te animás a escribir algunos números que no hayan sido eliminados? ¿Qué ocurre si ahora eliminamos aquellos que en su expresión decimal tienen un 7? ¿Cuál es la longitud del conjunto eliminado?

Solución en página 2

LIC. MARÍA EMILIA CASTILLO
Docente, Departamento de Matemática FHUC-UNL
Becario doctoral IMAL (UNL-CONICET)
LIC. MAURICIO RAMSEYER
› *Docente, Departamento de Matemática FIQ-UNL*
Becario doctoral IMAL (UNL-CONICET)
LIC. CAROLINA REVUELTA
› *Directora de Cultura Científica FIQ*
GUILLERMO VALAROLO
› *Imagen Cultura Científica FIQ*

[+] info
www.fiq.unl.edu.ar/animate
www.facebook.com/culturacientifica