Material didáctico

Tiro libre

Marilina Carena

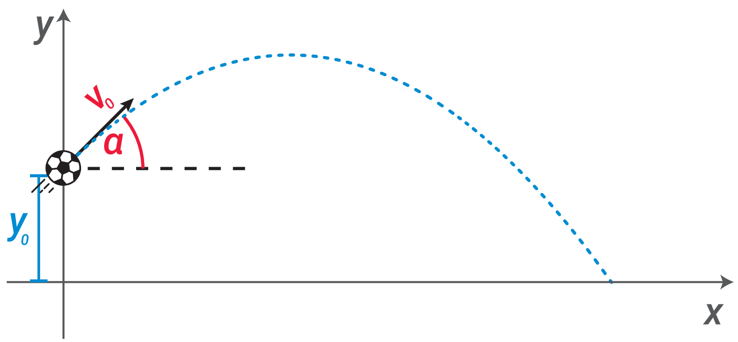
UNL . FACULTAD DE INGENIERÍA QUÍMICA

Objetivo

El objetivo es trabajar ciertos conceptos matemáticos a partir de la trayectoria que describe un balón de futbol en un tiro libre, la cual puede modelarse mediante las ecuaciones originadas por el movimiento parabólico. A partir de esto se trabajan tanto la función como la ecuación cuadrática.

FIQ UNL. FACULTAD DE INGENIERÍA QUÍMICA
Tiro libre **Información** | Marilina Carena

Información



Notación:

- y_0 es la altura de lanzamiento ($y_0 = 0$ cuando se lanza desde el piso, como en los tiros libres).
- v_0 es el módulo de la velocidad de lanzamiento (por simplicidad, llamaremos a v_0 la *velocidad inicial*).
- α es el ángulo de lanzamiento (dirección del disparo).

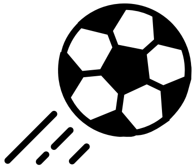
Por conveniencia siempre ubicaremos el sistema de ejes coordenados para que el cero del eje horizontal coincida con la abscisa del punto de lanzamiento. Es decir, si (x_0, y_0) denota el punto desde cual se lanza el balón, entonces siempre elegiremos $x_0 = 0$.
Esto no afecta en absoluto, ya que el sistema de referencias se coloca a elección y, una vez fijado, todo se traduce en él. En este modelo simplificado de trayectoria de un balón estamos considerando al mismo como si fuera un "*punto*".
En un movimiento parabólico se puede probar que la altura (en metros) del objeto lanzado en función del desplazamiento horizontal esta dada por:

$$y(x) = y_0 + x\,\mathrm{tg}(\alpha) - \frac{4.9}{v_0^2 \cos^2(\alpha)}\,x^2.$$

En un arco de fútbol profesional la distancia desde el suelo hasta el borde inferior del travesaño es de 2.44 m, y el caño tiene un diámetro máximo de 12 cm (es decir, el arco no supera los 2.56 m de altura total). Por otro lado, un balón oficial no es un "punto" sino que se aproxima a una esfera de 11 cm de radio. Luego, en muchas ocasiones, la altura *h* con la cual la pelota llega según la fórmula a la línea de meta nos permitirá determinar en forma clara si un disparo puede o no puede terminar en gol; pero, en otras ocasiones, el valor de *h* junto a las dimensiones precisas del caño y del balón indicarán que este pega en el travesaño. En tales casos, todo dependerá de la forma en que se produzca el rebote.

FIQ UNL. FACULTAD DE INGENIERÍA QUÍMICA Tiro libre **Información** | Marilina Carena

Los desafíos con igual numeración corresponden a diferentes planteos referidos a un mismo problema, es decir, diferentes preguntas sobre un mismo tiro.

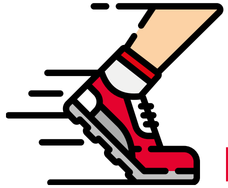


Desafío 1

Se patea un tiro libre desde un punto situado frente al arco a una distancia de 25 metros, con una velocidad inicial de 18 m/s y un ángulo de 30º. Determinar la altura a la cual la pelota cruza la línea de meta, suponiendo que la misma sigue una trayectoria parabólica sin que nada la desvíe. ¿Fue gol?

Tomar $\operatorname{tg}(30^\circ) \approx 0.577$. Para evitar redondeos innecesarios, utilizar que $\cos(30^\circ) = \frac{\sqrt{3}}{2}$, con lo cual $\cos^2(30^\circ) = \frac{3}{4}$.

Marilina Carena
Tiro libre | Ficha desafío
UNL. FACULTAD DE INGENIERÍA QUÍMICA
FIQ

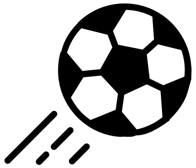


Desafío 2

Problema

Se patea un tiro libre desde un punto situado frente al arco a una distancia de 25 metros, con una velocidad inicial de 22 m/s y un ángulo de 20º. Determinar la altura a la cual la pelota cruza la línea de meta, suponiendo que la misma sigue una trayectoria parabólica sin que nada la desvíe. ¿Fue gol?

Tomar $\operatorname{tg}(20^\circ) \approx 0.364$ y $\cos^2(20^\circ) \approx 0.883$.



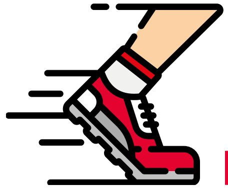
Desafío 3

Problema

Se patea un tiro libre desde un punto frente al arco, con una velocidad inicial de 15 m/s y un ángulo de 45º. Determinar la distancia desde el punto de disparo hasta el arco sabiendo que la pelota cruzó la línea de meta cuando se encontraba bajando, a una altura de 2.58 metros, por lo que no terminó en gol. (Suponer que la pelota siguío una trayectoria parabólica sin que nada la desvíe. Redondear el resultado al entero más cercano).

Notar que $\operatorname{tg}(45^\circ) = 1$. Para evitar redondeos innecesarios, utilizar que $\cos(45^\circ) = \frac{1}{\sqrt{2}}$, con lo cual $\cos^2(45^\circ) = \frac{1}{2}$.

Marilina Carena
Tiro libre | Ficha desafío
UNL. FACULTAD DE INGENIERÍA QUÍMICA
FIQ



Desafío 3

Problema A

Se patea un tiro libre desde un punto frente al arco, con una velocidad inicial de 15 m/s y un ángulo de 45º. Determinar la distancia desde el punto de disparo hasta el arco sabiendo que la pelota cruzó la línea de meta cuando se encontraba bajando, a una altura de 2.58 metros, por lo que no terminó en gol.(Suponer que la pelota siguió una trayectoria parabólica sin que nada la desvíe. Redondear el resultado al entero más cercano).

Notar que $\operatorname{tg}(45^\circ) = 1$. Para evitar redondeos innecesarios, utilizar que $\cos(45^\circ) = \frac{1}{\sqrt{2}}$, con lo cual $\cos^2(45^\circ) = \frac{1}{2}$. Además, $\operatorname{sen}(45^\circ) = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

También es posible conocer las posiciones horizontal y vertical del balón luego de *t* segundos de haber sido arrojado. Las mismas son, respectivamente y en metros, las siguientes:

$$x(t) = v_0 \cos(\alpha) t; \qquad y(t) = y_0 + v_0 \operatorname{sen}(\alpha) t - 4.9t^2.$$

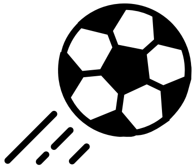
Así, luego de *t* segundos de haber sido lanzado, el balón se encuentra en el punto *P (t) = (x(t), y(t))*.

Problema B

Determinar el tiempo que demora la pelota del *Problema A* desde su lanzamiento hasta cruzar la línea de meta.

Problema C

Determinar el tiempo que demora la pelota del *Problema A* desde su lanzamiento hasta llegar al suelo, suponiendo que nada se interpone en su trayectoria.



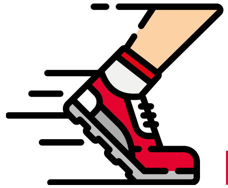
Desafío 4

Problema

Se patea un tiro libre desde un punto frente al arco, con una velocidad inicial de 14 m/s y un ángulo de 45º. Determinar la distancia desde el punto de disparo hasta el arco sabiendo que la pelota llegó a la línea de meta cuando se encontraba bajando, a una altura de 1.8 metros. (Suponer que la pelota siguió una trayectoria parabólica sin que nada la desvíe. Redondear el resultado al entero más cercano).

Notar que $\mathrm{tg}(45°) = 1$. Para evitar redondeos innecesarios, utilizar que $\cos(45°) = \frac{1}{\sqrt{2}}$, con lo cual $\cos^2(45°) = \frac{1}{2}$.

Marilina Carena
Tiro libre | Ficha desafío
UNL. FACULTAD DE INGENIERÍA QUÍMICA
FIQ



Desafío 4

Problema A

Se patea un tiro libre desde un punto frente al arco, con una velocidad inicial de 14 m/s y un ángulo de 45º. Determinar la distancia desde el punto de disparo hasta el arco sabiendo que la pelota llegó a la línea de meta cuando se encontraba bajando, a una altura de 1.8 metros. (Suponer que la pelota sigui ´o una trayectoria parabólica sin que nada la desvíe. Redondear el resultado al entero más cercano).

Para evitar redondeos innecesarios, utilizar que $\cos(45°) = \frac{1}{\sqrt{2}}$, con lo cual $\cos^2(45°) = \frac{1}{2}$. Además, $\mathrm{sen}(45°) = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

También es posible conocer las posiciones horizontal y vertical del balón luego de *t* segundos de haber sido arrojado. Las mismas son, respectivamente y en metros, las siguientes:

$$x(t) = v_0 \cos(\alpha)t; \qquad y(t) = y_0 + v_0 \,\mathrm{sen}(\alpha)t - 4.9t^2.$$

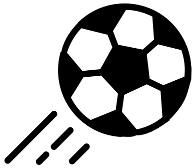
Así, luego de *t* segundos de haber sido lanzado, el balón se encuentra en el punto *P (t) = (x(t), y(t))*.

Problema B

Determinar el tiempo que demora la pelota del *Problema A* desde su lanzamiento hasta cruzar la línea de meta.

Problema C

Determinar el tiempo que demora la pelota del *Problema A* desde su lanzamiento hasta llegar al suelo.

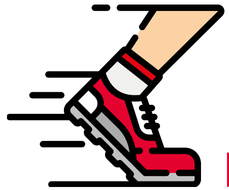


Desafío 5

Problema

Se patea un tiro libre desde un punto situado frente al arco a una distancia de 20 metros, con un ángulo de 30º. Determinar la velocidad inicial del disparo, sabiendo que la pelota cruzó la línea de meta a una altura de 1.34 metros. (Suponer que la pelota siguió una trayectoria parabólica sin que nada la desvíe. Redondear v_0 al entero más cercano).

Tomar $\mathrm{tg}(30^\circ) \approx 0.577$. Para evitar redondeos innecesarios, utilizar que $\cos(30^\circ) = \frac{\sqrt{3}}{2}$, con lo cual $\cos^2(30^\circ) = \frac{3}{4}$



Desafío 5

Problema A

Se patea un tiro libre desde un punto situado frente al arco a una distancia de 20 metros, con un ángulo de 30º. Determinar la velocidad inicial del disparo, sabiendo que la pelota cruzó la línea de meta a una altura de 1.34 metros. (Suponer que la pelota siguió una trayectoria parabólica sin que nada la desvíe. Redondear v_0 al entero más cercano).

Tomar $\mathrm{tg}(30^\circ) \approx 0.577$. Para evitar redondeos innecesarios, utilizar que $\cos(30^\circ) = \frac{\sqrt{3}}{2}$, con lo cual $\cos^2(30^\circ) = \frac{3}{4}$. Además, $\mathrm{sen}(30^\circ) = \frac{1}{2}$.

También es posible conocer las posiciones horizontal y vertical del balón luego de *t* segundos de haber sido arrojado. Las mismas son, respectivamente y en metros, las siguientes:

$$x(t) = v_0 \cos(\alpha) t; \qquad y(t) = y_0 + v_0\, \mathrm{sen}(\alpha) t - 4.9 t^2.$$

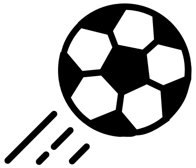
Así, luego de *t* segundos de haber sido lanzado, el balón se encuentra en el punto *P (t) = (x(t), y(t))*.

Problema B

Determinar el tiempo que demora la pelota del *Problema A* desde su lanzamiento hasta cruzar la línea de meta.

Problema C

Determinar el tiempo que demora la pelota del *Problema A* desde su lanzamiento hasta llegar al suelo.



Desafío 6

Problema

Se patea un tiro libre desde un punto situado frente al arco a una distancia de 24 metros, con un ángulo de 30º. Determinar la velocidad inicial del disparo, sabiendo que la pelota cruzó la línea de meta a una altura de 2.24 metros. (Suponer que la pelota siguió una trayectoria parabólica sin que nada la desvíe. Redondear v_0 al entero más cercano).

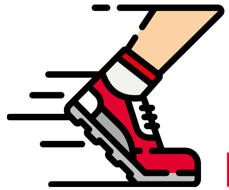
Tomar $\operatorname{tg}(30°) \approx 0.577$. Para evitar redondeos innecesarios, utilizar que $\cos(30°) = \frac{\sqrt{3}}{2}$, con lo cual $\cos^2(30°) = \frac{3}{4}$.

Marilina Carena

Tiro libre | Ficha desafío

UNL. FACULTAD DE INGENIERÍA QUÍMICA

FIQ



Desafío 6

Problema A

Se patea un tiro libre desde un punto situado frente al arco a una distancia de 24 metros, con un ángulo de 30º. Determinar la velocidad inicial del disparo, sabiendo que la pelota cruzó la línea de meta a una altura de 2.24 metros. (Suponer que la pelota siguió una trayectoria parabólica sin que nada la desvíe. Redondear v_0 al entero más cercano).

Tomar $\operatorname{tg}(30°) \approx 0.577$. Para evitar redondeos innecesarios, utilizar que $\cos(30°) = \frac{\sqrt{3}}{2}$, con lo cual $\cos^2(30°) = \frac{3}{4}$. Además, $\operatorname{sen}(30°) = \frac{1}{2}$.

También es posible conocer las posiciones horizontal y vertical del balón luego de *t* segundos de haber sido arrojado. Las mismas son, respectivamente y en metros, las siguientes:

$$x(t) = v_0 \cos(\alpha)t; \qquad y(t) = y_0 + v_0 \operatorname{sen}(\alpha)t - 4.9t^2.$$

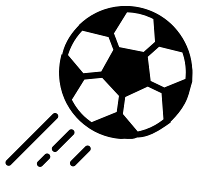
Así, luego de *t* segundos de haber sido lanzado, el balón se encuentra en el punto *P (t) = (x(t), y(t))*.

Problema B

Determinar el tiempo que demora la pelota del *Problema A* desde su lanzamiento hasta cruzar la línea de meta.

Problema C

Determinar el tiempo que demora la pelota del *Problema A* desde su lanzamiento hasta llegar al suelo.



Desafío 7

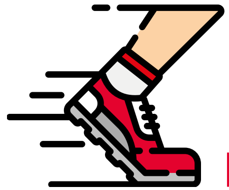
Problema
También es posible conocer las posiciones horizontal y vertical del balón luego de *t* segundos de haber sido arrojado. Las mismas son, respectivamente y en metros, las siguientes:

$$x(t) = v_0 \cos(\alpha)t; \qquad y(t) = y_0 + v_0 \operatorname{sen}(\alpha)t - 4.9t^2.$$

Así, luego de *t* segundos de haber sido lanzado, el balón se encuentra en el punto *P (t) = (x(t), y(t))*.

Problema
Problema: Se patea un tiro libre desde un punto situado frente al arco a una distancia de 18 metros, con una velocidad inicial de 20m/s. Determinar el ángulo del disparo sabiendo que la pelota llegó a la línea de meta luego de 0.96 segundos desde su lanzamiento y utilizarlo para calcular la altura a la cual llegó el balón a dicha línea. (Suponer que la pelota siguió una trayectoria parabólica sin que nada la desvíe. Redondear a al entero más cercano).

Marilina Carena
Tiro libre | Ficha desafío
UNL. FACULTAD DE INGENIERÍA QUÍMICA
FIQ



Desafío 7

El alcance horizontal de un balón es el valor positivo de *x* cuando *y*= 0. Para el caso y_0 = 0, el mismo está dado, en metros, por

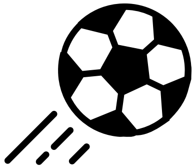
$$x_{\max} = \frac{v_0^2 \operatorname{sen}(2\alpha)}{9.8}.$$

Problema A
Se patea un tiro libre con una velocidad inicial de 20 m/s. Determinar el ángulo del disparo, sabiendo que la pelota llegó por primera vez al suelo a los 26.24 metros de distancia desde el punto de disparo. (Suponer que la pelota siguió una trayectoria parabólica sin que nada la desvíe. Redondear a al entero más cercano).

Puede probarse que la altura máxima que alcanza un balón lanzado desde el suelo está dada, en metros, por

$$y_{\max} = \frac{v_0^2 \operatorname{sen}^2(\alpha)}{19.6}.$$

Problema B
Hallar la altura máxima alcanzada por la pelota en el *Problema A*.



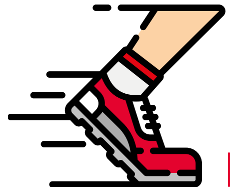
Desafío 8

También es posible conocer las posiciones horizontal y vertical del balón luego de *t* segundos de haber sido arrojado. Las mismas son, respectivamente y en metros, las siguientes:

$$x(t) = v_0 \cos(\alpha) t; \qquad y(t) = y_0 + v_0 \operatorname{sen}(\alpha) t - 4.9t^2.$$

Así, luego de *t* segundos de haber sido lanzado, el balón se encuentra en el punto *P (t) = (x(t), y(t))*.

Problema
Se patea un tiro libre desde un punto situado frente al arco a una distancia de 16 metros, con una velocidad inicial de 20 m/s. Determinar el ángulo del disparo sabiendo que la pelota llegó a la línea de meta luego de 0.85 segundos desde su lanzamiento y utilizarlo para calcular la altura a la cual llegó el balón a dicha línea. (Suponer que la pelota siguió una trayectoria parabólica sin que nada la desvíe. Redondear al entero más cercano).



Desafío 8

Puede probarse que la altura máxima que alcanza un balón lanzado desde el suelo está dada, en metros, por

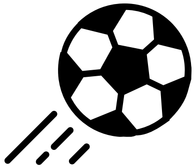
$$y_{\max} = \frac{v_0^2 \operatorname{sen}^2(\alpha)}{19.6}.$$

Problema A
Se patea un tiro libre con una velocidad inicial de 20 m/s. Determinar el ángulo del disparo, sabiendo que la pelota alcanza una altura máxima de 2.39 metros. (Suponer que la pelota siguió una trayectoria parabólica sin que nada la desvíe. Redondear al entero más cercano).

El alcance horizontal de un balón es el valor positivo de *x* cuando *y* = 0. Para el caso $y_0 = 0$, el mismo está dado, en metros, por

$$x_{\max} = \frac{v_0^2 \operatorname{sen}^2(\alpha)}{9.8}.$$

Problema B
Hallar el alcance horizontal del tiro realizado en el *Problema A*.



Desafío 9

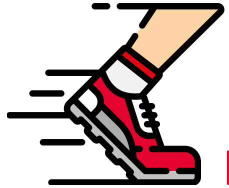
El alcance horizontal de un balón es el valor positivo de x cuando $y = 0$. Para el caso $y_0 = 0$, el mismo está dado, en metros, por

$$x_{\max} = \frac{v_0^2 \operatorname{sen}(2\alpha)}{9.8}.$$

Problema A
Se patea un tiro libre con un ángulo de disparo de 45º. Determinar la velocidad inicial del golpe, sabiendo que la pelota llegó por primera vez al suelo a los 10.2 metros de distancia desde el punto de disparo. (Suponer que la pelota siguió una trayectoria parabólica sin que nada la desvíe. Redondear v_0 al entero más cercano).

Notar que $\operatorname{sen}(90°) = 1$ y $\operatorname{tg}(45°) = 1$. Para evitar redondeos innecesarios, utilizar el hecho que $\cos(45°) = \frac{1}{\sqrt{2}}$, por lo que $\cos^2(45°) = \frac{1}{2}$.

Problema B
Hallar la altura a la cual cruza la línea de meta la pelota en el *Problema A*, si el disparo se realiza a una distancia de 7.48 metros desde el arco.



Desafío 10

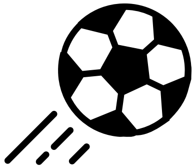
Puede probarse que la altura máxima que alcanza un balón lanzado desde el suelo está dada, en metros, por

$$y_{\max} = \frac{v_0^2 \operatorname{sen}^2(\alpha)}{19.6}.$$

Problema A
Se patea un tiro libre con un ángulo de disparo de 45º. Determinar la velocidad inicial del tiro, sabiendo que la pelota alcanza una altura máxima de 4.31 metros. (Suponer que la pelota siguió una trayectoria parabólica sin que nada la desvíe. Redondear v_0 al entero más cercano).

Notar que $\operatorname{tg}(45°) = 1$. Para evitar redondeos innecesarios, utilizar que $\operatorname{sen}(45°) = \cos(45°) = \frac{1}{\sqrt{2}}$, con lo cual $\operatorname{sen}^2(45°) = \frac{1}{2}$ y también $\cos^2(45°) = \frac{1}{2}$.

Problema B
Hallar la altura a la cual cruza la línea de meta la pelota en el *Problema A*, si el disparo se realiza a una distancia de 15 metros desde el arco.



Desafío 11

Problema A

Se patea un tiro libre con un ángulo de disparo de 45º desde un punto situado a 14.3 metros de distancia al arco, y el tiro pega justo en el travesaño (es decir, llega a la línea de meta a 2.44 metros de altura). Determinar la velocidad inicial del tiro. (Suponer que la pelota siguió una trayectoria parabólica sin que nada la desvíe. Redondear v_0 al entero más cercano).

Notar que $\mathrm{tg}(45°) = 1$. Para evitar redondeos innecesarios, utilizar que $\cos(45°) = \frac{1}{\sqrt{2}}$, con lo cual $\cos^2(45°) = \frac{1}{2}$.

También es posible conocer las posiciones horizontal y vertical del balón luego de *t* segundos de haber sido arrojado. Las mismas son, respectivamente y en metros, las siguientes:

$$x(t) = v_0 \cos(\alpha)t; \qquad y(t) = y_0 + v_0 \operatorname{sen}(\alpha)t - 4.9t^2.$$

Así, luego de *t* segundos de haber sido lanzado, el balón se encuentra en el punto *P(t) = (x(t), y(t))*.

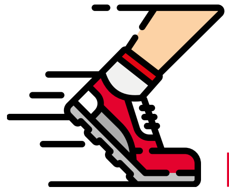
Problema B

Hallar el tiempo que demora la pelota en el *Problema A*, desde el disparo hasta llegar a la línea de meta. El tiempo de vuelo t_v de un balón es la cantidad de tiempo que transcurre desde que es pateado hasta llegar por primera vez al suelo. Luego, es el valor positivo de *t* para el cual *y* = 0. El alcance horizontal x_{max} de un balón es el valor positivo de *x* para el cual *y* = 0, que se obtiene también como el valor de *x* en t_v .

Problema C

Hallar el tiempo de vuelo de la pelota en el *Problema A* y su alcance horizontal.

Marilina Carena
Tiro libre | Ficha desafío
UNL. FACULTAD DE INGENIERÍA QUÍMICA
FIQ



Desafío 12

También es posible conocer las posiciones horizontal y vertical del balón luego de *t* segundos de haber sido arrojado. Las mismas son, respectivamente y en metros, las siguientes:

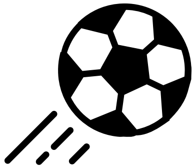
$$x(t) = v_0 \cos(\alpha)t; \qquad y(t) = y_0 + v_0 \operatorname{sen}(\alpha)t - 4.9t^2.$$

Así, luego de *t* segundos de haber sido lanzado, el balón se encuentra en el punto *P(t) = (x(t), y(t))*.

Problema

Se patea un tiro libre desde un punto situado a 14 metros de distancia al arco con un ángulo de 40º, y la pelota llega a la línea de meta luego de 1.4 segundos de haber sido lanzada. Determinar la velocidad inicial del disparo, y si el mismo terminó o no en gol. (Suponer que la pelota siguió una trayectoria parabólica sin que nada la desvíe. Redondear v_0 al entero más cercano).

Marilina Carena



Desafío 13

También es posible conocer las posiciones horizontal y vertical del balón luego de t segundos de haber sido arrojado. Las mismas son, respectivamente y en metros, las siguientes:

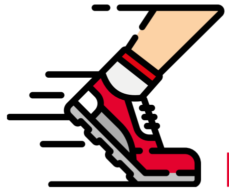
$$x(t) = v_0 \cos(\alpha) t; \qquad y(t) = y_0 + v_0 \operatorname{sen}(\alpha) t - 4.9t^2.$$

Así, luego de t segundos de haber sido lanzado, el balón se encuentra en el punto $P(t) = (x(t), y(t))$.

Problema
Se patea un tiro libre desde un punto situado a 14 metros de distancia al arco con una velocidad inicial de 15 m/s, y la pelota llega a la línea de meta luego de 1.08 segundos de haber sido lanzada. Determinar el ángulo del disparo, y si el mismo terminó o no en gol. (Suponer que la pelota siguió una trayectoria parabólica sin que nada la desvíe. Redondear a al entero más cercano).

Marilina Carena

Tiro libre | Ficha desafío



Desafío 14

Puede probarse que un balón en movimiento parabólico alcanza su altura máxima luego de

$$t = \frac{v_0 \operatorname{sen}(\alpha)}{9.8}$$

segundos de haber sido lanzado.

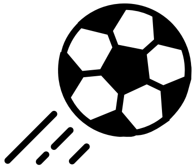
Problema
Se patea un tiro libre desde un punto situado a 38 metros de distancia al arco con una velocidad inicial de 26 m/s, y la pelota alcanza su altura máxima luego de 0.91 segundos de haber sido lanzada. Determinar el ángulo del disparo, y si el mismo terminó o no en gol. (Suponer que la pelota siguió una trayectoria parabólica sin que nada la desvíe. Redondear a al entero más cercano).

UNL • FACULTAD DE INGENIERÍA QUÍMICA
FIQ

Marilina Carena

UNL. FACULTAD DE INGENIERÍA QUÍMICA

FIQ



Desafío 15

Problema

Una pelota pica y es pateada desde una altura de 0.5 metros, con un ángulo de 45º y una velocidad inicial de 13.12 m/s. ¿Desde qué distancia debe ejecutarse este tiro para que la pelota atraviese la línea de meta, cuando se encuentra bajando, a una altura de 2.2 metros?

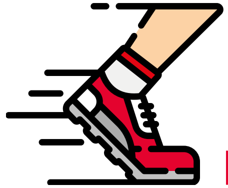
Notar que $\mathrm{tg}(45^\circ) = 1$. Para evitar redondeos innecesarios, utilizar que $\cos(45^\circ) = \frac{1}{\sqrt{2}}$, con lo cual $\cos^2(45^\circ) = \frac{1}{2}$.

Marilina Carena

Tiro libre | Ficha desafío

UNL. FACULTAD DE INGENIERÍA QUÍMICA

FIQ



Desafío 15

Problema A

Una pelota pica y es pateada desde una altura de 0.5 metros, con un ángulo de 45º y una velocidad inicial de 13.12 m/s. ¿Desde qué distancia debe ejecutarse este tiro para que la pelota atraviese la línea de meta, cuando se encuentra bajando, a una altura de 2.2 metros?

Notar que $\mathrm{tg}(45^\circ) = 1$. Para evitar redondeos innecesarios, utilizar que $\cos(45^\circ) = \frac{1}{\sqrt{2}}$, con lo cual $\cos^2(45^\circ) = \frac{1}{2}$. Además, $\mathrm{sen}(45^\circ) = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

También es posible conocer las posiciones horizontal y vertical del balón luego de *t* segundos de haber sido arrojado. Las mismas son, respectivamente y en metros, las siguientes:

$$x(t) = v_0 \cos(\alpha) t; \qquad y(t) = y_0 + v_0 \,\mathrm{sen}(\alpha) t - 4.9 t^2.$$

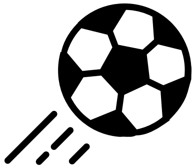
Así, luego de *t* segundos de haber sido lanzado, el balón se encuentra en el punto *P(t) = (x(t), y(t)).*

Problema B

Determinar el tiempo que demora la pelota del *Problema A* desde su lanzamiento hasta cruzar la lÍnea de meta.

Problema C

Determinar el tiempo que demora la pelota del *Problema A* desde su lanzamiento hasta llegar al suelo.



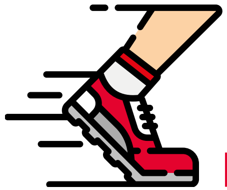
Desafío 16

Problema

Una pelota pica y es pateada desde una altura de 0.5 metros, con un ángulo de 45º y una velocidad inicial de 13.12 m/s. Supongamos que el tiro partió desde un punto situado frente al arco, a una distancia de 15 metros del mismo. Determinar si, en caso de no sufrir ningún tipo de desvío, pudo terminar en gol.

Notar que $\text{tg}(45°) = 1$. Para evitar redondeos innecesarios, utilizar que $\cos(45°) = \frac{1}{\sqrt{2}}$, con lo cual $\cos^2(45°) = \frac{1}{2}$.

Marilina Carena
Tiro libre | Ficha desafío
UNL. FACULTAD DE INGENIERÍA QUÍMICA
FIQ



Desafío 16

Problema A

Una pelota pica y es pateada desde una altura de 0.5 metros, con un ángulo de 45º y una velocidad inicial de 13.12 m/s. Supongamos que el tiro partió desde un punto situado frente al arco, a una distancia de 15 metros del mismo. Determinar la altura con la llega la pelota a la línea de meta.

Notar que $\text{tg}(45°) = 1$. Para evitar redondeos innecesarios, utilizar que $\cos(45°) = \frac{1}{\sqrt{2}}$, con lo cual $\cos^2(45°) = \frac{1}{2}$. Además, $\text{sen}(45°) = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

También es posible conocer las posiciones horizontal y vertical del balón luego de *t* segundos de haber sido arrojado. Las mismas son, respectivamente y en metros, las siguientes:

$$x(t) = v_0 \cos(\alpha) t; \qquad y(t) = y_0 + v_0 \,\text{sen}(\alpha) t - 4.9 t^2.$$

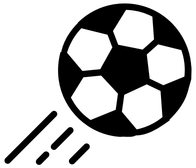
Así, luego de *t* segundos de haber sido lanzado, el balón se encuentra en el punto *P(t) = (x(t), y(t))*.

Problema B

Determinar el tiempo que demora la pelota del *Problema A* desde su lanzamiento hasta cruzar la línea de meta.

Problema C

Determinar el tiempo que demora la pelota del *Problema A* desde su lanzamiento hasta llegar al suelo.



Desafío 17

También es posible conocer las posiciones horizontal y vertical del balón luego de *t* segundos de haber sido arrojado. Las mismas son, respectivamente y en metros, las siguientes:

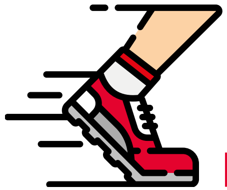
$$x(t) = v_0 \cos(\alpha)t; \qquad y(t) = y_0 + v_0 \operatorname{sen}(\alpha)t - 4.9t^2.$$

Así, luego de *t* segundos de haber sido lanzado, el balón se encuentra en el punto *P(t) = (x(t), y(t))*.

El tiempo de vuelo t_v de un balón es la cantidad de tiempo que transcurre desde que es pateado hasta llegar por primera vez al suelo. Luego, es el valor positivo de *t* para el cual *y* = 0. El alcance horizontal x_{max} de un balón es el valor positivo de *x* para el cual *y* = 0, que se obtiene también como el valor de *x* en t_v .

Problema
Una pelota es pateada desde el piso, con una velocidad inicial de 13 m/s y un ángulo de 45º. Determinar el tiempo el tiempo de vuelo y el alcance horizontal suponiendo que la misma sigue una trayectoria parabólica sin que nada la desvíe.

Marilina Carena
Tiro libre | Ficha desafío
UNL. FACULTAD DE INGENIERÍA QUÍMICA
FIQ



Desafío 18

También es posible conocer las posiciones horizontal y vertical del balón luego de *t* segundos de haber sido arrojado. Las mismas son, respectivamente y en metros, las siguientes:

$$x(t) = v_0 \cos(\alpha)t; \qquad y(t) = y_0 + v_0 \operatorname{sen}(\alpha)t - 4.9t^2.$$

Así, luego de *t* segundos de haber sido lanzado, el balón se encuentra en el punto *P(t) = (x(t), y(t))*.

El tiempo de vuelo t_v de un balón es la cantidad de tiempo que transcurre desde que es pateado hasta llegar por primera vez al suelo. Luego, es el valor positivo de *t* para el cual *y* = 0.

Problema
Una pelota es pateada desde un punto situado en el piso a 31 metros frente al arco, con un ángulo de 30º. Sabiendo que sigue una trayectoria parabólica y que demora 2.041 segundos en volver al suelo, hallar la velocidad inicial del disparo y la altura a la cual la pelota llega a la línea de meta, suponiendo que nada se interpuso en su camino.

Respuestas

Utilizaremos el metro (m) como unidad para las distancias, y el segundo (s) como unidad para el tiempo. Luego, las velocidades estarán expresadas en m/s. Para los ángulos utilizaremos el grado sexagesimal (º). La notación será la siguiente:

- v_0 es el módulo de la velocidad inicial o de lanzamiento;
- α es el ángulo de lanzamiento (dirección del disparo);
- X_{max} es el alcance horizontal del disparo (distancia entre el punto de disparo y el primer rebote de la pelota);
- y_{max} es la altura máxima alcanzada;
- t_v es el tiempo de vuelo del balón (tiempo desde el lanzamiento- hasta que realiza el primer rebote en el suelo);
- t_m es el tiempo que demora el balón desde su lanzamiento hastallegar a la línea de meta; h es la altura del balón cuando llega a la línea de meta.

Los resultados son aproximados, debido a errores de redondeo.

FIQ UNL. FACULTAD DE INGENIERÍA QUÍMICA Tiro libre **Respuestas** | Marilina Carena

- **Desafío 1**
h = 1.82, fue gol.
- **Desafío 2**
h = 1.93, fue gol.
- **Desafío 3**
x = 20.
- **Desafío 3**
A) x = 20, B) t_m = 1.89,
C) t_v = 2.16.
- **Desafío 4**
x = 18.
- **Desafío 4**
A) x = 18, B) t_m = 1.82,
C) t_v = 2.02.
- **Desafío 5**
v_0 = 16.
- **Desafío 5**
A) v_0 = 16, B) t_m = 1.44,
C) t_v= 1.63.
- **Desafío 6**
v_0= 18.
- **Desafío 6**
A) v_0 = 18, B) t_m = 1.54,
C) t_v = 1.84.
- **Desafío 7**
α = 20, h = 2.05.
- **Desafío 7**
A) α = 20, B) y_{max} = 2.39.
- **Desafío 8**
α = 20, h = 2.27.
- **Desafío 8**
A) α = 20, B) x_{max} = 26.24.
- **Desafío 9**
A) v_0 = 10, B) h = 2.
- **Desafío 10**
A) v_0 = 13, B) h = 1.95.
- **Desafío 11**
A) v_0 = 13, B) t_m = 1.56,
C) t_v = 1.88; x_{max} = 17.28.
- **Desafío 12**
v_0 = 13, fue gol (h = 2.1).
- **Desafío 13**
α = 30, pega en el travesaño
(h = 2.39).
- **Desafío 14**
α = 20, fue gol (h = 1.98).
- **Desafío 15**
x = 15.66.
- **Desafío 15**
15: A) x = 15.66, B) t_m = 1.69,
C) t_v = 1.96.
- **Desafío 16**
No fue gol (h = 2.69).
- **Desafío 16**
A) h= 2.69, B) t_m= 1.62,
C) t_v=1.96.
- **Desafío 17**
t_v = 1.88, x_{max} = 17.28.
- **Desafío 18**
v_0 = 20, h = 2.2.

"Tiro libre" es un material didáctico correspondiente a la publicación Carena, Marilina (2019). *La pelota siempre al 10*. Santa Fe, Argentina: Ediciones UNL. ISBN: 978-987-749-144-9.

—

Marilina Carena es Doctora en Matemática. Profesora adjunta de la Facultad de Ingeniería Química de la Universidad Nacional del Litoral e Investigadora Adjunta del CONICET.

FIQ

UNL . FACULTAD DE
INGENIERÍA QUÍMICA

· · · FIQUNL
www.fiq.unl.edu.ar