

Justificar todas las respuestas.

(1) [10 puntos] Calcular los siguientes límites:

(a)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(x)}{x \sin(3x/2)}$                       (b)  $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + 2x)^{\frac{1}{\sin(x)}}$

(2) [5 puntos]

Calcular  $f'(x)$  para  $f : (0, +\infty) \rightarrow (0, +\infty)$  dada por  $f(x) = x^{2x^3}$

(3) [10 puntos] Considerar la función  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  dada por  $f(x) = \sinh(2x) = \frac{e^{2x} - e^{-2x}}{2}$ .

Demostrar que  $f$  es biyectiva de  $\mathbb{R}$  en  $\mathbb{R}$  y hallar una fórmula de la derivada de su inversa  $f^{-1}$ .

(4) [10 puntos]

Estudiar el dominio, los ceros, los intervalos de positividad y negatividad los de crecimiento y decrecimiento, los máximos y mínimos locales, los intervalos de convexidad y concavidad, los puntos de inflexión y trazar la gráfica aproximada de la función

$$f(x) = -\frac{1}{36 + x^2}$$

(5) [20 puntos] Hallar las primitivas de las siguientes funciones:

(a)  $f(x) = x^3 \sin(x^2)$                       (b)  $g(x) = \frac{1}{(x^2 - 1)(x + 1)}$                       (c)  $h(x) = \frac{1}{x \ln(x)}$

(6) [15 puntos]

Determinar cuáles de las siguientes integrales son convergentes

(a)  $\int_0^{\pi/2} \frac{x}{\sin(x^2)} dx$                       (b)  $\int_0^{\pi/2} \frac{x}{\sin(2x)} dx$

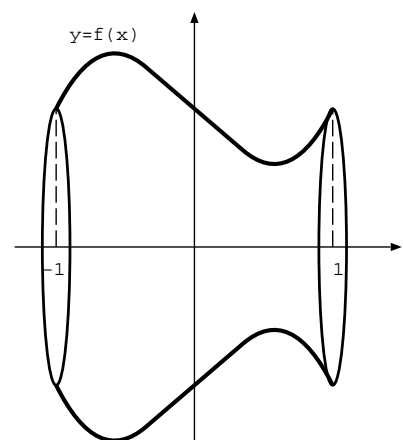
(7) [20 puntos]

(a) Calcular el volumen del jarrón de la figura. Donde

$$f(x) = x^3 - x + 1.$$

(b) ¿Qué integral debería calcularse para conocer el área lateral del jarrón? No calcular, sólo dejar expresado como una integral.

(c) Si utilizáramos la regla de integración numérica del rectángulo. ¿Cuántos sub-intervalos haría falta utilizar para calcular el área del ejercicio anterior con un error menor a 0,1?



(8) [10 puntos]

(a) Hallar el polinomio de Taylor  $p_{10}(x)$  de orden 10 de  $f(x) = \sinh(x)$  alrededor de  $x = 0$ .

(b) Hallar una cota para el error  $|\sinh(x) - p_{10}(x)|$  para  $x \in [-3, 3]$ .