Apunte sobre	*Cálculo II*
Integración Numérica	*Licenciatura en Matemática Aplicada*
y	*Facultad de Ingeniería Química*
Polinomios de Taylor	*Universidad Nacional del litoral*

1. Integración numérica

En este tema veremos sólo dos métodos para el cálculo aproximado de integrales sobre un intervalo. Estos métodos tienen la ventaja de que se puede calcular la integral de casi cualquier función continua, aunque su primitiva no esté disponible. El valor calculado será una *aproximación* del valor verdadero de la integral, pero veremos también resultados que con alguna información adicional sobre la función nos permitirán *acotar* el error de aproximación y juzgar si la aproximación es suficientemente buena.

Supongamos de ahora en más que $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ es una función continua sobre todo el intervalo $[a, b]$ y queremos aproximar la integral

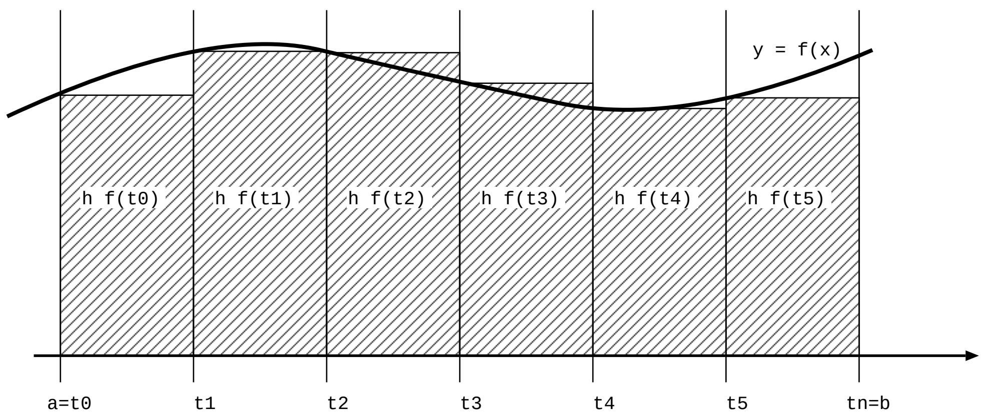
$$\int_a^b f(x)\, dx.$$

1.1. Regla del rectángulo

La regla del rectángulo es la siguiente: Para $n \in \mathbb{N}$, particionamos el intervalo $[a, b]$ en n sub-intervalos de igual longitud $h := \dfrac{b-a}{n}$, es decir, definimos $\pi_n = \big[a = t_0; t_1; t_2; \dots; t_n = b\big]$ con $t_i = a + i\, h$, y aproximamos $\displaystyle\int_a^b f(x)\, dx = \sum_{i=1}^{n} \int_{t_{i-1}}^{t_i} f(x)\, dx$ por la cantidad

$$I_n^R := \sum_{i=1}^{n} f(t_{i-1})(t_i - t_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n} f(t_{i-1})h = h\left[\sum_{i=1}^{n} f(t_{i-1})\right].$$

Es decir, aproximamos cada integral en $[t_{i-1}, t_i]$ por el área del *rectángulo* de base h y altura $f(t_{i-1})$, ver figura.



En otras palabras, calculamos la integral de la función que en cada intervalo $[t_{i-1}, t_i)$ es constantemente igual a $f(t_{i-1})$.

Ya sabemos que $\lim\limits_{n\to\infty} I_n^R = \displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ por lo visto en clase. Lo que nos preguntamos ahora es si podemos *medir* o *estimar* el error cometido al calcular I_n^R. La respuesta es positiva, y la da el siguiente

Teorema 1. *Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una función con primera derivada continua en $[a,b]$. Si $M_1 = \max\limits_{[a,b]} |f'|$, entonces*

$$\left| I_n^R - \int_a^b f(x)\,dx \right| \le \frac{M_1}{2} \frac{(b-a)^2}{n}.$$

Demostración. Sea $n \in \mathbb{N}$ y sea π_n la partición uniforme de $[a,b]$ en n sub-intervalos de igual longitud $h := \dfrac{b-a}{n}$, es decir, definimos $\pi_n = \big[a = t_0; t_1; t_2; \ldots; t_n = b\big]$ con $t_i = a + i\,h$. Observemos primero que

$$\begin{aligned}
\left| I_n^R - \int_a^b f(x)\,dx \right| &= \left| \sum_{i=1}^n \Big(h f(t_{i-1}) - \int_{t_{i-1}}^{t_i} f(x)\,dx \Big) \right] \\
&\le \sum_{i=1}^n \left| h f(t_{i-1}) - \int_{t_{i-1}}^{t_i} f(x)\,dx \right| \\
&= \sum_{i=1}^n \left| \int_{t_{i-1}}^{t_i} f(t_{i-1})\,dx - \int_{t_{i-1}}^{t_i} f(x)\,dx \right| \qquad (1) \\
&= \sum_{i=1}^n \left| \int_{t_{i-1}}^{t_i} \big(f(t_{i-1}) - f(x) \big) dx \right| \\
&\le \sum_{i=1}^n \int_{t_{i-1}}^{t_i} \big| f(x) - f(t_i) \big| dx.
\end{aligned}$$

Intentemos ahora acotar cada uno de estos términos. Consideremos un intervalo $[t_{i-1}, t_i]$ de la partición, y observemos que si $x \in [t_{i-1}, t_i]$, entonces por el teorema fundamental del Cálculo se cumple que

$$f(x) - f(t_{i-1}) = \int_{t_{i-1}}^x f'(t)\,dt,$$

y por lo tanto

$$\big| f(x) - f(t_{i-1}) \big| = \left| \int_{t_{i-1}}^x f'(t)\,dt, \right| \le \int_{t_{i-1}}^x |f'(t)|\,dt \le M_1 (x - t_{i-1}).$$

Esto implica que

$$\int_{t_{i-1}}^{t_i} \big| f(x) - f(t_i) \big| dx \le \int_{t_{i-1}}^{t_i} M_1 (x - t_{i-1})\,dx = M_1 \int_0^h u\,du = M_1 \frac{h^2}{2}, \qquad (2)$$

donde hemos hecho la sustitución $u = x - t_{i-1}$, $du = dx$. Finalmente, de (1) y de (2) concluimos que

$$\begin{aligned}\Big|I_n^R - \int_a^b f(x)\,dx\Big| &\leq \sum_{i=1}^n \int_{t_{i-1}}^{t_i} \big|f(x) - f(t_i)\big| dx \leq \sum_{i=1}^n M_1 \frac{h^2}{2} \\ &= nM_1 \frac{h^2}{2} = nM_1 \frac{(b-a)^2}{2\,n^2} = \frac{M_1}{2} \frac{(b-a)^2}{n},\end{aligned}$$

que es lo que queríamos demostrar. □

Observación 2. *Si conocemos una cota para M_1, entonces podemos saber cuál es el valor de n que debe tomarse para calcular la integral aproximada con un error dado.*

Ejemplo 1. Supongamos que queremos calcular aproximadamente $\displaystyle\int_0^2 e^{-x^2}\,dx$ con un error menor a 0,1.

Si bien $f(x) = e^{-x^2}$ no parece una función muy complicada, no hay una fórmula conocida que dé su primitiva. Por eso recurrimos a un método numérico. Para saber qué valor de n tenemos que tomar para lograr la precisión deseada, necesitamos conocer una cota superior para la primera derivada. Observemos entonces que $f'(x) = -2xe^{-x^2}$, y fácilmente deducimos que $|f'(x)| \leq 4$ para $x \in [0, 2]$. Entonces, para $n \in \mathbb{N}$, el teorema anterior nos dice que

$$\Big|I_n^R - \int_0^2 e^{-x^2}\,dx\Big| \leq \frac{4}{2}\frac{2^2}{n} = \frac{8}{n}.$$

Para asegurar un error menor o igual a 0,1 debemos elegir n tal que $\frac{8}{n} \leq 0{,}1$, o sea $n \geq 80$. Para $n = 80$ la fórmula da $I_{80} = 0{,}89435$ (no se sugiere hacer a mano, sino usando una computadora, por ejemplo una planilla de cálculo o un programa como MATLAB/OCTAVE). Por lo tanto

$$\Big|0{,}89435 - \int_0^2 e^{-x^2}\,dx\Big| \leq 0{,}1$$

lo que a su vez implica que

$$0{,}89435 - 0{,}1 \leq \int_0^2 e^{-x^2}\,dx \leq 0{,}89435 + 0{,}1,$$

es decir

$$0{,}79435 \leq \int_0^2 e^{-x^2}\,dx \leq 0{,}99435.$$

Si quisiéramos cometer un error menor a 0,05 (la mitad de la precisión anterior) ¿Cómo tendríamos que tomar n?

Sí, adivinaste, tendríamos que tomar $n = 160$, ¡el doble!

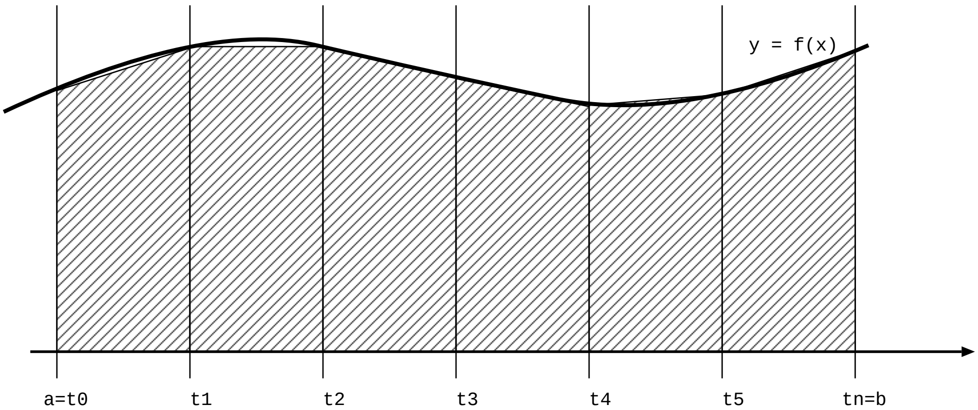
Con un poco más de trabajo, podríamos haber demostrado que $|f'(x)| \leq 1$ para $x \in [0, 2]$, y en ese caso, habríamos estado seguros de que las precisiones indicadas se obtenían con 20 y 40 puntos respectivamente, un gran ahorro de trabajo, ¿no?

1.2. Regla del trapecio

La regla del trapecio es la siguiente: Para $n \in \mathbb{N}$, particionamos (de la misma manera que antes) el intervalo $[a, b]$ en n sub-intervalos de igual longitud $h := \dfrac{b-a}{n}$, es decir, definimos $\pi_n = \big[a = t_0; t_1; t_2; \ldots; t_n = b\big]$ con $t_i = a + i\,h$, y aproximamos $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = \sum_{i=1}^{n} \int_{t_{i-1}}^{t_i} f(x)\,dx$ por la cantidad

$$I_n^T := \sum_{i=1}^{n} \frac{f(t_{i-1}) + f(t_i)}{2}(t_i - t_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n} \frac{f(t_{i-1}) + f(t_i)}{2} h.$$

Es decir, aproximamos cada integral en $[t_{i-1}, t_i]$ por el área del *trapecio* de altura h y bases $f(t_{i-1})$ y $f(t_i)$.



En otras palabras, calculamos la integral de la función que en cada intervalo $[t_{i-1}, t_i)$ es lineal y coincide con f en t_{i-1} y en t_i.

La gráfica nos invita a creer que el error cometido al calcular I_n^T es menor que el que se comete al calcular I_n^R, y eso es *en general* cierto, como lo confirma el siguiente

Teorema 3 (Estimación del error de la regla del trapecio)**.** *Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función con segunda derivada continua en $[a, b]$. Si $M_2 = \max\limits_{[a,b]} |f''|$, entonces*

$$\left| I_n^T - \int_a^b f(x)\,dx \right| \le M_2 \frac{(b-a)^3}{n^2}.$$

Demostración. Sea $n \in \mathbb{N}$ y sea π_n la partición uniforme de $[a, b]$ en n sub-intervalos de igual longitud $h := \dfrac{b-a}{n}$, es decir, definimos $\pi_n = \big[a = t_0; t_1; t_2; \ldots; t_n = b\big]$ con $t_i = a + i\,h$. Observemos primero que, si $\ell_i(x)$ es la función lineal cuya gráfica pasa por $(t_{i-1}, f(t_{i-1}))$, y por $(t_i, f(t_i))$, entonces

$$\begin{aligned}
\Big|I_n^T - \int_a^b f(x)\,dx\Big| &= \Big|\sum_{i=1}^n \Big(h\frac{f(t_{i-1}) + f(t_i)}{2} - \int_{t_{i-1}}^{t_i} f(x)\,dx\Big)\Big] \\
&\leq \sum_{i=1}^n \Big|h\frac{f(t_{i-1}) + f(t_i)}{2} - \int_{t_{i-1}}^{t_i} f(x)\,dx\Big| \\
&= \sum_{i=1}^n \Big|\int_{t_{i-1}}^{t_i} \ell_i(x)\,dx - \int_{t_{i-1}}^{t_i} f(x)\,dx\Big| \\
&= \sum_{i=1}^n \Big|\int_{t_{i-1}}^{t_i} \big(\ell_i(x) - f(x)\big)dx\Big| \leq \sum_{i=1}^n \int_{t_{i-1}}^{t_i} \big|\ell_i(x) - f(x)\big|dx.
\end{aligned} \tag{3}$$

Intentemos ahora acotar cada uno de estos términos. Para ello consideremos un intervalo $[t_{i-1}, t_i]$ de la partición, y definamos la función $g(x) = \ell_i(x) - f(x)$, que se anula en $x = t_{i-1}$ y en $x = t_i$, y por el teorema de Rolle existe $\xi_i \in (t_{i-1}, t_i)$ tal que $g'(\xi_i) = \ell_i'(\xi_i) - f'(\xi_i) = 0$. El teorema fundamental del cálculo nos dice que si $x \in (t_{i-1}, t_i)$, entonces

$$g'(x) = g(\xi_i) + \int_{\xi_i}^x g''(t)\,dt = \int_{\xi_i}^x g''(t)\,dt,$$

como ℓ_i es lineal, $g''(t) = \ell_i''(t) - f''(t) = -f''(t)$ para $t \in (t_{i-1}, t_i)$. Por lo tanto

$$|g'(x)| = \Big|\int_{\xi_i}^x g''(t)\,dt\Big| = \Big|\int_{\xi_i}^x f''(t)\,dt\Big| \leq |x - \xi_i|\,M_2 \leq h\,M_2$$

Esto implica que para $s \in (t_{i-1}, t_i)$

$$|g(s)| = |g(s) - g(t_{i-1})| = \Big|\int_{t_{i-1}}^s g'(x)\,dx\Big| \leq \int_{t_{i-1}}^s |g'(x)|\,dx \leq M_2 h(s - t_{i-1}) \leq M_2 h^2. \tag{4}$$

Finalmente, de (4) y de la definición de $g(x) = \ell_i(x) - f(x)$ se sigue que

$$\int_{t_{i-1}}^{t_i} \big|\ell_i(x) - f(x)\big|dx = \int_{t_{i-1}}^{t_i} \big|g(x)\big|dx \leq M_2\,h^2\,h = M_2\,h^3,$$

y por (3) concluimos que

$$\Big|I_n^T - \int_a^b f(x)\,dx\Big| \leq \sum_{i=1}^n \int_{t_{i-1}}^{t_i} \big|\ell_i(x) - f(x)\big|dx \leq M_2\,h^3\,n = M_2\,\frac{(b-a)^3}{n^3}\,n = M_2\,\frac{(b-a)^3}{n^2}.$$

que es lo que queríamos demostrar. □

Observación 4. *En muchos libros, la fórmula de la regla del trapecio viene expresada como*

$$I_n^R == h\Big[\frac{f(t_0)}{2} + f(t_1) + f(t_2) + \ldots f(t_{n-1}) + \frac{f(t_n)}{2}\Big].$$

Fácilmente puede verse que es equivalente a la presentada al principio.

2. Polinomios de Taylor

2.1. Introducción y Definición

Sea $p(x)$ un polinomio de grado n, es decir

$$p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_{n-1} x^{n-1} + a_n x^n.$$

Nos preguntamos: ¿Qué relación existe entre las derivadas de p en $x = 0$ y el valor de los coeficientes a_i? Veamos:

$$\begin{aligned}
p(0) &= a_0 \\
p'(x) &= a_1 + 2 \cdot a_2 \cdot x + 3 \cdot a_3 \cdot x^2 + \cdots + (n-1) \cdot a_{n-1} \cdot x^{n-2} + n \cdot a_n \cdot x^{n-1} \\
p'(0) &= a_1 \\
p''(x) &= 2 \cdot a_2 + 3 \cdot 2 \cdot a_3 \cdot x + \cdots + (n-1) \cdot (n-2) \cdot a_{n-1} \cdot x^{n-3} + n \cdot (n-1) \cdot a_n \cdot x^{n-2} \\
p''(0) &= 2 \cdot a_2 \\
p'''(x) &= 3 \cdot 2 \cdot a_3 + \cdots + (n-1) \cdot (n-2) \cdot (n-3) \cdot a_{n-1} \cdot x^{n-4} + n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot a_n \cdot x^{n-3} \\
p'''(0) &= 3 \cdot 2 \cdot a_3 \\
&\vdots
\end{aligned}$$

Vemos entonces (y se puede demostrar por inducción) que

$$p^{(k)}(0) = k!\, a_k, \qquad k = 0, 1, 2, \ldots.$$

Notar que si el polinomio es de grado n, entonces $p^{(n+1)}(x) = 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

Concluimos que

Si $p(x)$ es un polinomio de grado n, entonces

$$p(x) = p(0) + p'(0)\, x + \frac{p''(0)}{2!}\, x^2 + \frac{p'''(0)}{3!}\, x^3 + \cdots + \frac{p^{(n)}(0)}{n!}\, x^n.$$

Hemos descrito un polinomio en base al valor de sus derivadas en $x = 0$. Análogamente, podemos describir un polinomio en términos del valor de sus derivadas en $x = a$, para cualquier número real fijo a:

Si $p(x)$ es un polinomio de grado n, entonces

$$p(x) = p(a) + p'(a)\,(x-a) + \frac{p''(a)}{2!}\,(x-a)^2 + \frac{p'''(a)}{3!}\,(x-a)^3 + \cdots + \frac{p^{(n)}(a)}{n!}\,(x-a)^n.$$

Motivados por esta igualdad, definimos

Definición 5 (Polinomio de Taylor)**.** Si f es una función n veces derivable en $x = a$, se llama *polinomio de Taylor* de f, de orden n alrededor de $x = a$ al polinomio:

$$p(x) = f(a) + f'(a)\,(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}\,(x-a)^2 + \frac{f'''(a)}{3!}\,(x-a)^3 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}\,(x-a)^n.$$

Es decir, el polinomio de Taylor de f de orden n alrededor de $x = a$ es el único polinomio de grado n tal que el valor del mismo y de sus primeras n derivadas en $x = a$ coincide, respectivamente, con el valor de f y de sus primeras n derivadas en $x = a$.

Ejemplo 2. Hallar el polinomio de Taylor de orden 4 de $f(x) = e^x$ alrededor de $x = 0$.

Para ello, debemos calcular $f(0)$, $f'(0)$, $f''(0)$, $f'''(0)$, $f^{(4)}(0)$:

$$\begin{aligned}
f(x) &= e^x & \Longrightarrow && f(0) &= 1\\
f'(x) &= e^x & \Longrightarrow && f'(0) &= 1\\
f''(x) &= e^x & \Longrightarrow && f''(0) &= 1\\
f'''(x) &= e^x & \Longrightarrow && f'''(0) &= 1\\
f^{(4)}(x) &= e^x & \Longrightarrow && f^{(4)}(0) &= 1
\end{aligned}$$

Por lo tanto

$$p_4(x) = 1 + 1 \cdot x + \frac{1}{2!} \cdot x^2 + \frac{1}{3!} \cdot x^3 + \frac{1}{4!} \cdot x^4.$$

Puede verse que para esta función particular, $f^{(k)}(0) = 1$ para todo $k \in \mathbb{N}$, y por lo tanto, cualquiera sea $n \in \mathbb{N}$, el polinomio de Taylor de orden n de $f(x) = e^x$ alrededor de $x = 0$ es

$$\begin{aligned}
p_n(x) &= 1 + 1 \cdot x + \frac{1}{2!} \cdot x^2 + \frac{1}{3!} \cdot x^3 + \cdots + \frac{1}{n!} \cdot x^n\\
&= 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{1}{3!} \cdot x^3 + \cdots + \frac{x^n}{n!}\\
&= \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}.
\end{aligned}$$

Ejemplo 3. Hallar el polinomio de Taylor de $f(x) = \operatorname{sen}(x)$ de orden 6 alrededor $x = 0$. Observemos que

$$\begin{aligned}
f(x) &= \operatorname{sen}(x) & \Longrightarrow && f(0) &= 0\\
f'(x) &= \cos(x) & \Longrightarrow && f'(0) &= 1\\
f''(x) &= -\operatorname{sen}(x) & \Longrightarrow && f''(0) &= 0\\
f'''(x) &= -\cos(x) & \Longrightarrow && f'''(0) &= -1\\
f^{(4)}(x) &= \operatorname{sen}(x) & \Longrightarrow && f^{(4)}(0) &= 0\\
f^{(5)}(x) &= \cos(x) & \Longrightarrow && f^{(5)}(0) &= 1\\
f^{(6)}(x) &= -\operatorname{sen}(x) & \Longrightarrow && f^{(6)}(0) &= 0
\end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned} p_6(x) &= 0 + 1 \cdot x + \frac{0}{2!} \cdot x^2 + \frac{-1}{3!} \cdot x^3 + \frac{0}{4!} \cdot x^4 + \frac{1}{5!} \cdot x^5 + \frac{0}{6!} \cdot x^6 \\ &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}. \end{aligned}$$

Y vemos que en general

$$p_n(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} - \frac{x^11}{11!} + \cdots + (-1)^{k+1} \frac{x^{2k-1}}{(2k-1)!},$$

con k el mayor entero tal que $2k - 1 \leq n$, es decir $k = \left[\frac{n+1}{2}\right]$.

Ejemplo 4. Hallar el polinomio de Taylor de $f(x) = \ln(x)$ de orden 5 alrededor de $x = 1$. Observemos que

$$\begin{aligned} f(x) &= \ln(x) & &\Longrightarrow & f(1) &= 0 \\ f'(x) &= \frac{1}{x} & &\Longrightarrow & f'(1) &= 1 \\ f''(x) &= -\frac{1}{x^2} & &\Longrightarrow & f''(1) &= -1 \\ f'''(x) &= \frac{2}{x^3} & &\Longrightarrow & f'''(1) &= 2 \\ f^{(4)}(x) &= -\frac{2 \cdot 3}{x^4} & &\Longrightarrow & f^{(4)}(1) &= -2 \cdot 3 \\ f^{(5)}(x) &= \frac{2 \cdot 3 \cdot 4}{x^5} & &\Longrightarrow & f^{(5)}(1) &= 2 \cdot 3 \cdot 4 \end{aligned}$$

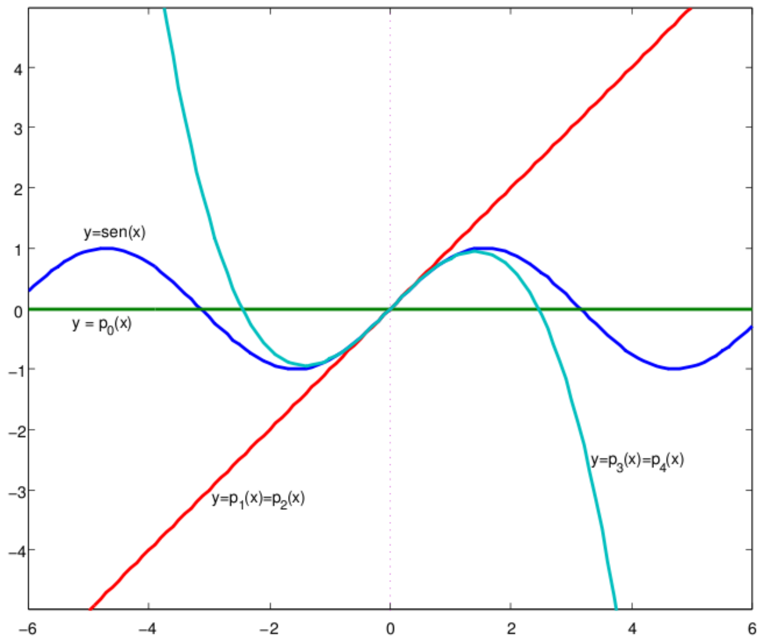
Por lo tanto

$$\begin{aligned} p_5(x) &= 0 + 1 \cdot (x-1) + \frac{-1}{2!} \cdot (x-1)^2 + \frac{2}{3!} \cdot (x-1)^3 + \frac{-2 \cdot 3}{4!} \cdot (x-1)^4 + \frac{2 \cdot 3 \cdot 4}{5!} \cdot (x-1)^5 \\ &= (x-1) - \frac{(x-1)^2}{2} + \frac{(x-1)^3}{3} - \frac{(x-1)^4}{4} + \frac{(x-1)^5}{5}. \end{aligned}$$

¿Puede imaginarse la forma del polinomio de Taylor de orden n en este caso?

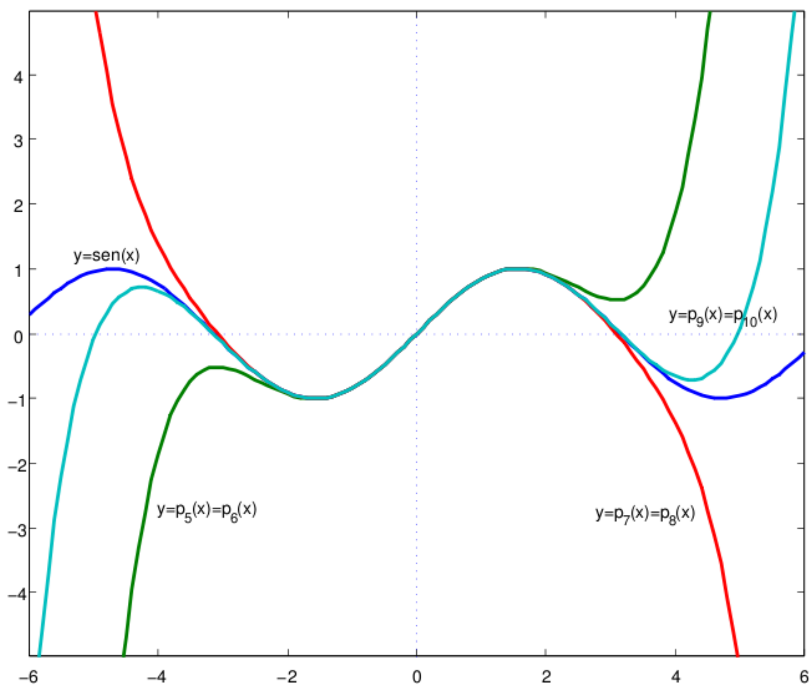
2.2. Interpretación geométrica

Para ver qué representa geométricamente el polinomio de Taylor de una cierta función de grado n alrededor de un punto dado, consideramos como ejemplo la función $f(x) = \text{sen}(x)$ y graficamos en un mismo par de ejes, la función dada y sus polinomios de Taylor de orden 0 a 4 alrededor de $x = 0$



Lo primero que observamos es que $p_0(x)$ es una recta horizontal que coincide con la función en $(0, f(0))$. El polinomio $p_1(x)$ es lineal y tanto su valor como el valor de su derivada coinciden con los de f en $x = 0$, por lo tanto la gráfica de $p_1(x)$ es la recta tangente a la gráfica de $f(x)$ en $(0, f(0))$. Para este ejemplo, el polinomio $p_2(x)$ coincide con $p_1(x)$ porque $f''(0) = 0$.

También observamos que a medida que aumentamos el orden del polinomio de Taylor, estos aproximan cada vez mejor a la función. A continuación graficamos la misma función y sus polinomios de Taylor de orden 5 a 10.



Vemos que a medida que aumenta el orden la aproximación mejora pues las graficas se mantienen cerca de la gráfica de $y = \operatorname{sen}(x)$ en intervalos más grandes.

También observamos que lejos de $x = 0$ la aproximación es mala, pues todo polinomio $p(x)$ no-constante satisface $\lim_{x\to\infty} p(x) = \infty$.

2.3. Un ejemplo interesante

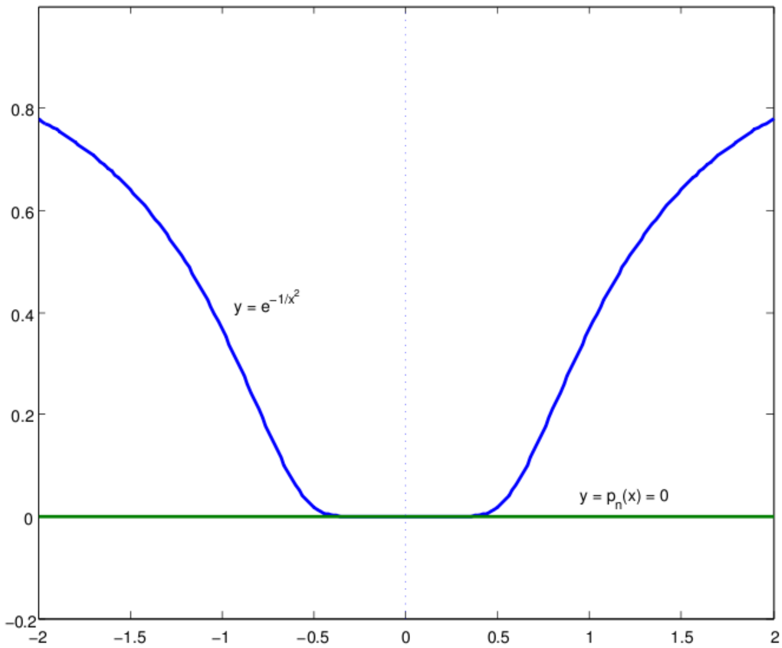
Por otro lado, si consideramos la función

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

resulta que tiene todas sus derivadas nulas en $x = 0$, es decir

$$f'(0) = 0, \quad f''(0) = 0, \quad f'''(0) = 0, \quad \cdots, \quad f^{(n)}(0) = 0, \quad \cdots$$

Por lo tanto, el polinomio de Taylor alrededor de $x = 0$ es el polinomio nulo $p_n(x) \equiv 0$ para cualquier n. En este caso no es cierto que $p_n(x)$ se aproxime cada vez más a $f(x)$ a medida que n crece.



2.4. Error de truncamiento

Tratemos de estudiar ahora el error que se prouce al aproximar f por un polinomio de Taylor de orden n. Por simplicidad consideremos los polinomios de Taylor de una función f alrededor de $x = 0$.

Observemos primero que si f es derivable en $(-p, p)$ y $x \in (-p, p)$, entonces haciendo la sustitución $t = x - s$ resulta

$$f(x) - f(0) = \int_0^x f'(s)\, ds = \int_0^x f'(x - t)\, dt.$$

Luego

$$f(x) = f(0) + \int_0^x f'(x-t)\,dt. \tag{5}$$

Si suponemos que f' es derivable y f'' continua, e integramos por partes tomando $u'(t) = 1$, $v(t) = f'(x-t)$ obtenemos

$$\begin{aligned}
\int_0^x f'(x-t)\,dt = \int_0^x 1 \cdot f'(x-t)\,dt &= t \cdot f'(x-t)\Big|_0^x - \int_0^x t \cdot f''(x-t)(-1)\,dt \\
&= [x \cdot f'(x-x) - 0 \cdot f'(x-0)] + \int_0^x t \cdot f''(x-t)\,dt \\
&= x \cdot f'(0) + \int_0^x t \cdot f''(x-t)\,dt.
\end{aligned}$$

Usando esta igualdad y (5) concluimos que

$$f(x) = f(0) + x \cdot f'(0) + \int_0^x t \cdot f''(x-t)\,dt. \tag{6}$$

Si integramos por partes nuevamente, ahora suponiendo que f'' es derivable y f''' continua, tomando $u'(t) = t$, $v(t) = f''(x-t)$ obtenemos

$$\begin{aligned}
\int_0^x t \cdot f''(x-t)\,dt &= \frac{t^2}{2} \cdot f''(x-t)\Big|_0^x - \int_0^x \frac{t^2}{2} \cdot f'''(x-t)(-1)\,dt \\
&= \frac{x^2}{2} \cdot f'(x-x) - 0 \cdot f''(x-0) + \int_0^x \frac{t^2}{2} \cdot f'''(x-t)\,dt \\
&= \frac{x^2}{2} \cdot f''(0) + \frac{1}{2}\int_0^x t^2 \cdot f'''(x-t)\,dt.
\end{aligned}$$

Que usando (6) implica

$$f(x) = f(0) + x \cdot f'(0) + \frac{x^2}{2} \cdot f''(0) + \frac{1}{2}\int_0^x t^2 \cdot f'''(x-t)\,dt. \tag{7}$$

Repitiendo este procedimiento (haciendo inducción) llegamos al

Teorema 6 (Teorema de Taylor)**.** *Si f tiene $n+1$ derivadas continuas en un intervalo $(-p, p)$ (con $p > 0$), entonces, para $x \in (-p, p)$ se tiene que*

$$f(x) = f(0) + xf'(0) + \frac{x^2}{2!}f''(0) + \frac{x^3}{3!}f'''(0) + \cdots + \frac{x^n}{n!}f^{(n)}(0) + T_n(x),$$

donde T_n denota el residuo de Taylor *dado por la fórmula*

$$T_n(x) = \frac{1}{n!}\int_0^x t^n\, f^{(n+1)}(x-t)\,dt.$$

La **fórmula general para el teorema de Taylor** alrededor de $x = a$ es

$$f(x) = f(a) + (x-a)f'(a) + \frac{(x-a)^2}{2!}f''(a) + \frac{(x-a)^3}{3!}f'''(a) + \cdots + \frac{(x-a)^n}{n!}f^{(n)}(a) + T_n(x),$$

donde T_n es ahora

$$T_n(x) = \frac{1}{n!}\int_a^x t^n\, f^{(n+1)}(x-t)\, dt.$$

2.5. Otra fórmula para el residuo

Intentaremos ahora obtener una fórmula más sencilla y tal vez más útil para el residuo de Taylor. Para ello recordemos primero el teorema del valor medio del cálculo integral, que dice:

Si $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ es continua en $[a,b]$, entonces existe $\xi \in (a,b)$ tal que

$$\int_a^b f(x)\, dx = f(\xi)(b-a).$$

Una consecuencia de este resultado es el siguiente

Teorema 7 (Teorema del valor medio generalizado)**.** *Si f es continua en $[a,b]$ y g integrable y no-negativa sobre $[a,b]$ entonces existe $\xi \in [a,b]$ tal que*

$$\int_a^b f(x)g(x)\, dx = f(\xi)\int_a^b g(x)\, dx$$

Demostración. Sean $M = \max\limits_{[a,b]} f$ y $m = \min\limits_{[a,b]} f$, entonces, como $g(x) \geq 0$, $\forall x \in [a,b]$

$$m\, g(x) \leq f(x)g(x) \leq M\, g(x), \qquad \forall x \in [a,b].$$

Integrando, obtenemos

$$m\int_a^b g(x)\, dx \leq \int_a^b f(x)g(x)\, dx \leq M\int_a^b g(x)\, dx,$$

que dividiendo por $\int_a^b g(x)\, dx (> 0)$ resulta

$$m \leq \frac{\int_a^b f(x)g(x)\, dx}{\int_a^b g(x)\, dx} \leq M.$$

Por el teorema del valor intermedio, dado que f es continua, resulta que existe $\xi \in (a,b)$ tal que

$$\frac{\int_a^b f(x)g(x)\, dx}{\int_a^b g(x)\, dx} = f(\xi),$$

y el teorema queda probado. $\square$

Ahora sí, consideremos el residuo para el polinomio de Taylor de orden n alrededor de $x = 0$:

$$T_n(x) = \frac{1}{n!}\int_0^x t^n\, f^{(n+1)}(x-t)\, dt.$$

Si pensamos por un momento en el caso $x > 0$ y suponemos que $f^{(n+1)}$ es continua en un intervalo alrededor del origen, el teorema del valor medio nos dice que existe $\xi \in (0, x)$ tal que

$$T_n(x) = \frac{1}{n!} f^{(n+1)}(x-\xi) \int_0^x t^n\, dt = \frac{1}{n!} f^{(n+1)}(x-\xi)\frac{x^{n+1}}{n+1}.$$

Si llamamos $\eta = x - \xi$ también resulta $\eta \in (0, x)$ y luego se cumple que

$$\boxed{T_n(x) = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\eta), \qquad \text{para algún } \eta \text{ entre } 0 \text{ y } x.}$$

El caso $x < 0$ se demuestra de manera análoga, y el teorema general de Taylor luce así:

Teorema 8. *Si f tiene $n+1$ derivadas continuas en un intervalo $(a-p, a+p)$ (con $p > 0$), entonces, para cada $x \in (a-p, a+p)$ existe η_x entre a y x (y también $\eta_x \in (a-p, a+p)$) tal que*

$$f(x) = f(a) + (x-a)f'(a) + \frac{(x-a)^2}{2!} f''(a) + \cdots + \frac{(x-a)^n}{n!} f^{(n)}(a) + \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\eta_x).$$

Tenemos los siguientes corolarios de demostración inmediata:

Corolario 9. *Si f tiene $n+1$ derivadas continuas en $[a-p, a+p]$ y si $M_{n+1} = \max_{[a-p,a+p]} |f^{(n+1)}|$, entonces*

$$|f(x) - p_n(x)| \leq M_{n+1}\frac{|x-a|^{n+1}}{(n+1)!}, \qquad \forall x \in [a-p, a+p].$$

Corolario 10. *Si f tiene infinitas derivadas continuas en $[a-p, a+p]$ y si*

$$\lim_{n\to\infty} M_n \frac{p^n}{n!} = 0,$$

donde $M_n = \max_{[a-p,a+p]} |f^{(n)}|$, entonces

$$\lim_{n\to\infty} p_n(x) = f(x), \qquad \forall x \in [a-p, a+p].$$

Es decir

$$\sum_{n=0}^{\infty} f^{(n)}(a)\frac{(x-a)^n}{n!} = f(x),, \qquad \forall x \in [a-p, a+p].$$

Definición 11. La serie $\sum_{n=0}^{\infty} f^{(n)}(a)\frac{(x-a)^n}{n!}$ se llama *serie de Taylor* de f alrededor de $x = a$.

2.6. Una Aplicación de los polinomios de Taylor. Cálculo de integrales aproximadas

Ejemplo 5. Se sabe que una función $f(x)$ tiene 3 derivadas continuas en $[4, 6]$ y que $f(5) = 4$, $f'(5) = -1$, $f''(5) = 3$. Calcular de manera aproximada $\int_5^6 f(x)\,dx$.

Como el polinomio de Taylor de f de orden 2, $p_2(x)$, alrededor de $x = 5$ es una aproximación de $f(x)$ cerca de $x = 5$ podemos aproximar $\int_5^6 f(x)\,dx$ por $\int_5^6 p_2(x)\,dx$. A partir de los datos, obtenemos

$$p_2(x) = 4 + (-1)(x-5) + 3\frac{(x-5)^2}{2},$$

luego

$$\begin{aligned}
\int_5^6 f(x)\,dx \approx \int_5^6 p_2(x)\,dx &= \int_5^6 4\,dx - \int_5^6 (x-5)\,dx + \frac{3}{2}\int_5^6 (x-5)^2\,dx \\
&= 4 - \int_0^1 u\,du + \frac{3}{2}\int_0^1 u^2\,du \qquad \text{(sustitución: } u = x-5) \\
&= 4 - \frac{1}{2} + \frac{3}{2}\cdot\frac{1}{3} = 4.
\end{aligned}$$

Si además conocemos una cota para $f'''(x)$ en $[5, 6]$, por ejemplo

$$M_3 = \max_{[5,6]} |f'''| \leq 1{,}5.$$

Podemos estimar el error cometido de la siguiente manera:

$$\Big|\int_5^6 f(x)\,dx - \int_5^6 p_2(x)\,dx\Big| = \Big|\int_5^6 (f(x) - p_2(x))\,dx\Big| \leq \int_5^6 |f(x) - p_2(x)|\,dx,$$

y como

$$|f(x) - p_2(x)| \leq M_3\frac{(x-5)^3}{3!} \leq \frac{1{,}5}{6}(x-5)^3 = 0{,}25\,(x-5)^3, \qquad \text{para } x \in [5,6],$$

se tiene que

$$\int_5^6 |f(x) - p_2(x)|\,dx \leq \int_5^6 0{,}25(x-5)^3\,dx = 0{,}25\int_0^1 t^3\,dt = \frac{0{,}25}{4} = 0{,}0625.$$

Por lo tanto

$$\Big|\int_5^6 f(x)\,dx - \int_5^6 p_2(x)\,dx\Big| \leq 0{,}0625,$$

y entonces $4 - 0{,}0625 \leq \int_5^6 f(x)\,dx \leq 4 + 0{,}0625$, es decir

$$\boxed{3{,}9375 \leq \int_5^6 f(x)\,dx \leq 4{,}0625.}$$