Primer Parcial - 19/10

Cálculo II
2do semestre 2007

---

(1) [15 puntos] Calcular los siguientes límites:

(a) $\displaystyle \lim_{x \to 4} \frac{x^3 - 64}{x - 4}$ **(b)** $\displaystyle \lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen}(x^2)}{x \operatorname{sen}(2x)}$ **(c)** $\displaystyle \lim_{x \to 0} (1 + \operatorname{sen} x)^{\frac{1}{x}}$

---

(2) [20 puntos]

(a) Calcular $f(0)$, $f'(0)$, $f''(0)$, y $f'''(0)$ para $f(x) = \ln(1+x)$.

(b) Calcular $f'(x)$ para $f(x) = \left(1 + x^4\right)^{x^2}$

(c) Calcular $f'(x)$ para $f(x) = \begin{cases} x^2 \operatorname{sen}(\frac{1}{x}) + x, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0 \end{cases}$

(d) Una mancha circular de tinta sobre una alfombra aumenta de tamaño de manera desconocida. En el momento en que la mancha tiene 3mm de radio, el área aumenta 1mm^2 por segundo. ¿A qué velocidad aumenta el radio en ese instante?

---

(3) [10 puntos]

(a) Hallar el punto de la gráfica de $y = x^2$, que se encuentra más cercano al punto de coordenadas $(18, 0)$.

(b) Demostrar que la recta que pasa por el $(18, 0)$ y el punto hallado es perpendicular a la recta tangente a $y = x^2$ por el punto hallado. Graficar.

---

(4) [10 puntos] Considerar la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \operatorname{senh} x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$.
Demostrar que f es biyectiva de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ y hallar una fórmula de la derivada de su inversa f^{-1}.

---

(5) [15 puntos]

Estudiar el dominio, los ceros, los intervalos de positividad y negatividad los de crecimiento y decrecimiento, los máximos y mínimos locales, los intervalos de convexidad y concavidad, los puntos de inflexión y trazar la gráfica aproximada de la función $f(x) = xe^{-x^2}$.

---

(6) [10 puntos] Dar la definición de:

(a) $\displaystyle \lim_{x \to x_0} f(x) = \ell$ **(b)** $\displaystyle \lim_{x \to x_0^+} f(x) = \ell$ **(c)** $\displaystyle \lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty$ **(d)** $f'(x_0)$

---

(7) [10 puntos] Enunciar

(a) El teorema del valor intermedio para funciones continuas.

(b) El teorema del valor medio para funciones derivables.

---

(8) [20 puntos] Demostrar:

(a) Si f es continua en $[a, b]$, entonces es acotada en $[a, b]$.

(b) Si f es continua en $[a, b]$, entonces alcanza su máximo en $[a, b]$.
