Trabajo Práctico 2 *Cálculo II*
2do semestre 2007

---

(1) Demostrar a partir de la definición las siguientes afirmaciones:

(a) $\lim_{x\to 2}(3x-1)=5$ (f) $\lim_{x\to 2}\dfrac{x+1}{x+3}=\dfrac{3}{5}$ (k) $\lim_{x\to 4}(x^2+\sqrt{x})=18$

(b) $\lim_{x\to 3}(-2x+4)=-2$ (g) $\lim_{x\to 2}\dfrac{x^2-3x+2}{x-2}=1$ (ℓ) $\lim_{x\to 3}x^3=27$

(c) $\lim_{x\to -3}2x^2=18$ (h) $\lim_{x\to 1}\dfrac{x^2+x-2}{x^2-3x+2}=3$ (m) $\lim_{x\to 8}\sqrt[3]{x}=2$

(d) $\lim_{x\to 1}(-2x^2+3x)=1$ (i) $\lim_{x\to 4}\sqrt{x}=2$ (n) $\lim_{x\to 9}\dfrac{1}{\sqrt{x}}=\dfrac{1}{3}$

(e) $\lim_{x\to 2}(2x^3-6)=10$ (j) $\lim_{x\to 1/2}\sqrt{x}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ (ñ) $\lim_{x\to 3}\dfrac{x^3-27}{x-3}=27$

(2) Utilizando las propiedades vistas en clase calcular los siguientes límites:

(a) $\lim_{x\to -2}x^3-x^2+2x-5$ (b) $\lim_{x\to 1}\dfrac{x^2+2}{x+1}$ (c) $\lim_{x\to 3}\dfrac{x^2-9}{x-3}$ (d) $\lim_{x\to 2}\dfrac{x^4-16}{x-2}$

(3) Decidir si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Demostrar las verdaderas y dar un contraejemplo en las falsas:

(a) Si existe $\lim_{x\to x_0}\big(f(x)+g(x)\big)$, entonces existen $\lim_{x\to x_0}f(x)$ y $\lim_{x\to x_0}g(x)$.

(b) Si existe $\lim_{x\to x_0}\big(f(x)+g(x)\big)$, y existe $\lim_{x\to x_0}f(x)$ entonces existe $\lim_{x\to x_0}g(x)$.

(c) Si existe $\lim_{x\to x_0}\big(f(x)\,g(x)\big)$, entonces existen $\lim_{x\to x_0}f(x)$ y $\lim_{x\to x_0}g(x)$.

(d) Si existe $\lim_{x\to x_0}\big(f(x)\,g(x)\big)$, y existe $\lim_{x\to x_0}f(x)$ entonces existe $\lim_{x\to x_0}g(x)$.

(e) Si existe $\lim_{x\to x_0}\big(f(x)\,g(x)\big)$, y existe $\lim_{x\to x_0}f(x)$, y $\lim_{x\to x_0}f(x)\neq 0$ entonces existe $\lim_{x\to x_0}g(x)$.

(f) Si existe $\lim_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}$, y existe $\lim_{x\to x_0}g(x)$, entonces $\lim_{x\to x_0}g(x)\neq 0$.

(4) Analizar la existencia de los siguientes límites:

(a) $\lim_{x\to 0}\cos(1/x)$ (b) $\lim_{x\to 0}x\,\mathrm{sen}(1/x)$ (c) $\lim_{x\to 0}x^2\,\mathrm{sen}(1/x)$ (d) $\lim_{x\to 0}\big(x+\mathrm{sen}(1/x)\big)$

(5) Demostrar que si $a>0$, $a\neq 1$ y $\lim_{x\to x_0}f(x)=\ell>0$, entonces $\lim_{x\to x_0}\log_a\big(f(x)\big)=\log_a(\ell)$. (Usar la regla de cambio de base del logaritmo y lo demostrado en clase).

(6) Decir para qué valores de x_0 existen y para qué valores no existen los siguientes límites:

(a) $\lim_{x\to x_0}(x-[x])$ (b) $\lim_{x\to x_0}\dfrac{x}{|x|}$ (c) $\lim_{x\to x_0}|x|+[x]$

(7) Demostrar las siguientes afirmaciones (graficar las funciones alrededor del punto de interés):

(a) $\lim_{x\to 0}\dfrac{1}{x+x^2}=\infty$ (b) $\lim_{x\to 0}\dfrac{1}{x^2+x^4}=+\infty$ (c) $\lim_{x\to 0}\dfrac{-1}{|x|}=\infty$

(d) $\lim_{x\to 0^+}\dfrac{1}{\sqrt{x}}=+\infty$ (e) $\lim_{x\to 2}\dfrac{1}{(x-2)^2}=+\infty$ (f) $\lim_{x\to 0}\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}-1}=\infty$

(8) Demostrar que si $0<a<1$, entonces

(a) $\lim_{x\to +\infty}a^x=0$ (b) $\lim_{x\to -\infty}a^x=+\infty$

(9) Demostrar las siguientes afirmaciones

(a) Si $\lim_{x\to x_0}g(x)=\infty$ y $\lim_{y\to\infty}f(y)=\ell$, entonces $\lim_{x\to x_0}(f\circ g)(x)=\ell$. (Se supone que $g(x)\neq y_0$, $\forall x\in\mathbb{R}$.)

(b) Si $\lim_{x\to\infty}g(x)=y_0$ y $\lim_{y\to y_0}f(y)=\ell$, entonces $\lim_{x\to\infty}(f\circ g)(x)=\ell$.

(c) Si $\lim_{x\to\infty}g(x)=\infty$ y $\lim_{y\to\infty}f(y)=\infty$, entonces $\lim_{x\to\infty}(f\circ g)(x)=\infty$.

(d) $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = 0$ si y sólo si $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{1}{g(x)} = \infty$. (Se supone que $g(x) \neq 0$, $\forall x \neq x_0$.)

(e) Si $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \ell \neq 0$ y $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = \infty$, entonces $\lim\limits_{x\to x_0} \big(f(x)g(x)\big) = \infty$.

(f) Si $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \ell$ y $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = \infty$, entonces $\lim\limits_{x\to x_0} \big(f(x) + g(x)\big) = \infty$.

(10) Utilizar el ejercicio anterior y los límites conocidos (vistos en clase) para calcular los siguientes límites (cuando el límite sea ∞, determinar si es $+\infty$ o $-\infty$):

(a) $\lim\limits_{x\to 0} \big(\frac{1}{2}\big)^{\frac{1}{x^2}}$ (b) $\lim\limits_{x\to\infty} \ln\big(2 + \frac{1}{x}\big)$ (c) $\lim\limits_{x\to+\infty} 2^{2^x}$

(d) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{1}{x-1}$ (e) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{1}{x(x-2)}$ (f) $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x-3}{x^2-9} + \dfrac{1}{x-3}$

(g) $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{1}{3-x} + \dfrac{1}{x-3}$ (h) $\lim\limits_{x\to-\infty} 2\big(1 + 2^{-x}\big) + 1$ (i) $\lim\limits_{x\to-2} \dfrac{3}{\ln|x+2|}$

(11) Demostrar que $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \infty$ si y sólo si, para toda sucesión $\big(x_n\big)_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $x_n \neq x_0$, $\forall n$, y $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$, se cumple que $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = \infty$.

(12) Enunciar y demostrar proposiciones que relacionen límite de funciones con límite de sucesiones (como en el ejercicio anterior), correspondientes a las definiciones 6.14 a 6.20. (Demostrar sólo algunas)

(13) Utilizando los ejercicios anteriores y lo que se sabe para sucesiones, demostrar que:

(a) $\lim\limits_{x\to\infty} \big(1 + \frac{1}{x}\big)^x = e$

(b) $\lim\limits_{x\to\infty} \big(1 + \frac{K}{x}\big)^x = e^K$, para todo $K \in \mathbb{R}$

(c) Si $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \infty$, entonces $\lim\limits_{x\to x_0} \left(1 + \dfrac{1}{f(x)}\right)^{f(x)} = e$

(d) Si $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = a > 1$, y $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = +\infty$, entonces $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)^{g(x)} = +\infty$

(e) Si $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = a$, con $0 < a < 1$ y $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = +\infty$, entonces $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)^{g(x)} = 0$.

(f) Si $a > 1$, $\lim\limits_{x\to+\infty} \log_a(x) = +\infty$ y $\lim\limits_{x\to 0^+} \log_a(x) = -\infty$ (Sugerencia: usar la fórmula del cambio de base del logaritmo y lo visto en clase para $\ln(x)$.)

(g) Si $0 < a < 1$, $\lim\limits_{x\to+\infty} \log_a(x) = -\infty$ y $\lim\limits_{x\to 0^+} \log_a(x) = +\infty$

(14) Analizar la existencia de los siguientes límites:

(a) $\lim\limits_{x\to\infty} \operatorname{sen}(x)$ (b) $\lim\limits_{x\to\infty} \cos(x)$ (c) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\operatorname{sen}(x)}{x}$

(d) $\lim\limits_{x\to\infty} x \operatorname{sen}\big(\frac{\pi}{x}\big)$ (e) $\lim\limits_{x\to\infty} \big(\sqrt{x^2+1} - |x|\big)$ (f) $\lim\limits_{x\to 0} x \operatorname{sen}\big(\frac{1}{x}\big)$

(g) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{|x| - x}{|x| + x}$ (h) $\lim\limits_{x\to 0} x\,[x]$ (i) $\lim\limits_{x\to 0} x\,\big[\frac{1}{x}\big]$

(15) Calcular los siguientes límites (finitos o infinitos)

(a) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^3 + 2x - 1}{2x^3 - 3x + 4}$ (b) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2x^2 - 3x}{x^3 + 1}$ (c) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{3x^4 + 2x - 3}{4x^3 + 1}$

(d) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\sqrt{x^2 + x + 1} + \sqrt{x^2 - x + 1}}{x + \sqrt{x^2 + 1}}$ (e) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2 + x^{5/3}}{3x + x^{1/5}}$ (f) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\sqrt{x} + x^{3/4}}{x^{1/3} + x^{2/3}}$

(g) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^2 - 1}{x + 2} - \dfrac{x^2 + 1}{x - 2}$ (h) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1}}{\sqrt{1+x} + \sqrt{x-1}}$ (i) $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2 - 2x$

(j) $\lim\limits_{x\to-\infty} 2x^2 + 6x$ (k) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\sqrt{x + \sqrt{x}}}{\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}}$ (ℓ) $\lim\limits_{x\to\infty} x\big(x - \sqrt{2x^2 + 3}\big)$

(m) $\lim\limits_{x\to\infty} \big(\sqrt{x^2 + 2x} - x\big)$ (n) $\lim\limits_{x\to\infty} \big(x + \sqrt[3]{1 - x^3}\big)$ (ñ) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{x+1}{x+2}\right)^{2x}$

(o) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{2x^2 + 5}{x^2 + 1}\right)^{3x^2+1}$ (p) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{x+4}{x+6}\right)^{x^2}$ (q) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{x^2 + 1}{x^2 + 1}\right)^{x^3}$

(16) La ecuación
$$\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$$
corresponde a una hipérbola. Graficarla y hallar una fórmula para los puntos de la misma que se encuentran en el primer cuadrante, que sea de la forma $y = f(x)$ (es decir: despejar y, para $x > 0$, $y > 0$).

Verificar que
$$f(x) > \frac{4}{3}x \qquad \text{y que} \qquad \lim_{x \to +\infty} \big(f(x) - \frac{4}{3}x\big) = 0.$$
Esto quiere decir que la recta $y = \frac{4}{3}x$ es una asíntota de la hipérbola. ¿Qué significa esto gráficamente? Agregar la recta al mismo gráfico, y arreglar el gráfico de la hipérbola para que refleje lo que acabamos de descubrir.

(17) Hallar las ecuaciones de las asíntotas de la hipérbola
$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

(18) Hallar las ecuaciones de las asíntotas de la hipérbola
$$\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1.$$