Trabajo Práctico 3

Cálculo II
2do semestre 2007

---

(1) Demostrar a partir de la definición que las siguientes funciones son continuas

(a) $f(x) = |3x+1|$ (b) $f(x) = \frac{1}{x}$ $(x > 0)$ (c) $f(x) = x^2$

(2) Demostrar que $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$, definida por $f(x) = \sqrt{x}$ es continua por derecha en $x = 0$.

(3) Estudiar la continuidad por izquierda y por derecha de $f(x) = [x]$ (parte entera). Es decir, estudiar para qué valores de x_0 la función es continua por izquierda y para qué valores es continua por derecha, graficar.

(4) Estudiar la continuidad por izquierda y por derecha de $f(x) = x - [x]$ (mantisa). Es decir, estudiar para qué valores de x_0 la función es continua por izquierda y para qué valores es continua por derecha, graficar.

(5) Sea f continua en x_0 y sea g una función tal que $\lim\limits_{x\to\infty} g(x) = x_0$. Demostrar que $\lim\limits_{x\to\infty} (f \circ g)(x) = f(x_0)$. Demostrar que lo mismo ocurre si en lugar de ∞ escribimos $+\infty$ o $-\infty$.

(6) Demostrar que las siguientes funciones son continuas mostrando que son composición de funciones continuas:

(a) $f(x) = \sqrt{x^2+3x^4+1}$ (b) $f(x) = \operatorname{sen}\left(\frac{x^2+3x-1}{x^2+1}\right)$ (c) $f(x) = 3^{\frac{x-1}{x^2+3}}$ (d) $f(x) = \sqrt{|\operatorname{sen}(x+2)|}$

(7) Demostrar que si f y g son continuas en x_0 y $f(x_0) > 0$, entonces la función $f(x)^{g(x)}$ es continua en x_0.

(8) Estudiar la continuidad de las siguientes funciones. Es decir, estudiar para qué valores de x la función es continua y para qué valores es discontinua. Para aquellos valores donde sea discontinua, decir si la discontinuidad es evitable o no, si no lo es, decir si es de primera o segunda especie.

(a) $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$ (b) $f(x) = \begin{cases} \frac{x+3}{x-1} & \text{si } x \neq 1 \\ 2 & \text{si } x = 1 \end{cases}$ (c) $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-3x+2}{x^2-4x+4} & \text{si } x > 3 \\ 2-x^2 & \text{si } x \leq 3 \end{cases}$

(d) $f(x) = \begin{cases} x^2+4 & \text{si } x > 0 \\ 2x-1 & \text{si } x < 0 \end{cases}$ (e) $f(x) = \dfrac{(x-3)^2}{x^2-9}$ (f) $f(x) = \dfrac{x^2}{\sqrt{1+x^2}-1}$

(g) $f(x) = \dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}$ (h) $f(x) = \dfrac{4-\sqrt{6+x}}{2-\sqrt{x-2}}$

(9) Calcular los siguientes límites:

(a) $\lim\limits_{x\to 2^+} \sqrt{\dfrac{x^3-8}{x^2-4}}$ (b) $\lim\limits_{x\to 3} \sqrt{\dfrac{x^3-27}{x^2-9}}$ (c) $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\sqrt{1+x^2}-1}{x}$

(d) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt{x+2}-\sqrt{3x+1}}{\sqrt{x-1}}$ (e) $\lim\limits_{x\to 2^-} \sqrt{2-x} - [x+1]$ (f) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen}(3x)}{\operatorname{sen}(5x)}$

(g) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos x}{x^2}$ (h) $\lim\limits_{x\to 0^+} \big(\operatorname{sen} x\big)^{\frac{\operatorname{sen} x}{x}}$ (i) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen}(3x)}{x^2+\sqrt{x}}$

(j) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}} \dfrac{\cos x}{x-\pi/2}$ (k) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{tg}(2x)}{3x}$ (ℓ) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x \operatorname{sen} x}{1-\cos x}$

(m) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+x)}{x}$ (n) $\lim\limits_{x\to +\infty} \big(\ln(x+1) - \ln(x+2)\big)$ (ñ) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\ln(1+e^x)}{x}$

(o) $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{\ln(1+e^x)}{x}$ (p) $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{1}{x} \ln\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}\right)$ (q) $\lim\limits_{x\to 0} \big(1+x\big)^{\frac{1}{\operatorname{sen} x}}$

(r) $\lim\limits_{x\to 0} (\cos x)^{1/x}$ (s) $\lim\limits_{x\to \infty} \Big(x^2\big(\ln(x^2+4) - \ln(x^2)\big)\Big)$

(10) Sea f una función continua en $[a, b]$, es decir, continua en todo $x_0 \in (a, b)$ y continua por derecha en a y por izquierda en b. Demostrar que f puede extenderse de manera continua a todo $\mathbb{R}$. En otras palabras, encontrar una función continua en todo $\mathbb{R}$ que coincida con f en $[a, b]$.

Sugerencia: definir (y graficar)

$$g(x) = \begin{cases} f(a) & \text{si } x < a \\ f(x) & \text{si } a \leq x \leq b \\ f(b) & \text{si } b < x \end{cases}$$

y demostrar que esta función es continua en $\mathbb{R}$ y coincide con f en $[a, b]$.

(11) Sea f una función continua definida en $(-\infty, a]$ y en $[b, +\infty)$, con $a < b$. Demostrar que f se puede extender de manera continua a todo $\mathbb{R}$.

> Sugerencia: definir (y graficar) g como la función que coincide con f en $(-\infty, a]$ y en $[b, +\infty)$, y en $[a, b]$ definirla como la función lineal que coincide con f en a y en b.

(12) Para cada uno de los ítemes siguientes, dar ejemplos de funciones que cumplan con las propiedades indicadas. Graficarlas. Si no se le ocurre una fórmula, al menos grafique cómo debería ser la función.

- (a) $f : (0, 1) \to \mathbb{R}$ continua y no acotada.
- (b) $f : (0, 1] \to \mathbb{R}$ continua y no acotada superiormente.
- (c) $f : (0, 1] \to \mathbb{R}$ continua y no acotada inferiormente.
- (d) $f : (0, 1] \to \mathbb{R}$ continua y no acotada ni superior ni inferiormente.
- (e) $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ continua y no acotada.
- (f) $f : (0, 1) \to \mathbb{R}$ continua, acotada y que no alcance ni su máximo ni su mínimo.
- (g) $f : (0, 1] \to \mathbb{R}$ continua, acotada y que no alcance su máximo.
- (h) $f : (0, 1] \to \mathbb{R}$ continua, acotada y que no alcance su mínimo.
- (i) $f : (0, 1] \to \mathbb{R}$ continua, acotada y que no alcance ni su máximo ni su mínimo.
- (j) $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ continua, acotada y que no alcance su máximo.
- (k) $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ continua, acotada y que no alcance su mínimo.
- (l) $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ continua, acotada y que no alcance ni su máximo ni su mínimo.

(13) Demostrar que la ecuación $x^3 - 3x + 1 = 0$ tiene una raíz real en el intervalo $(1, 2)$.

(14) Demostrar que existe $x \in \mathbb{R}$ tal que $\cos x = x$.

(15) Demostrar que para cada $n \in \mathbb{Z}$ existe un $x_n \in (-\frac{\pi}{2} + n\pi, \frac{\pi}{2} + n\pi)$ que satisface $x_n = \tan(x_n)$. Graficar e interpretar.

(16) Demostrar que si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es continua y $f(x) \in \mathbb{Z}$, $\forall x \in \mathbb{R}$, entonces f es constante.

(17) Demostrar que si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es continua y $f(x) \in \mathbb{Q}$, $\forall x \in \mathbb{R}$, entonces f es constante.

(18) Demostrar que las siguientes funciones son uniformemente continuas en el intervalo indicado:

(a) $f(x) = x^2$ en $(0, 3)$ (b) $f(x) = \dfrac{1}{x}$ en $(1, +\infty)$

(19) Demostrar que las siguientes funciones no son uniformemente continuas en el intervalo indicado:

(a) $f(x) = x^2$ en $(0, +\infty)$ (b) $f(x) = \dfrac{1}{x}$ en $(0, 1)$