Trabajo Práctico 4 *Cálculo II*
2do semestre 2007

---

(1) Calcular a partir de la definición de derivada:

(a) $f'(1)$ si $f(x) = 2x+3$ (b) $f'(2)$ si $f(x) = 3x^2 - 1$ (c) $f'(4)$ si $f(x) = \sqrt{x}$ (d) $f'(2)$ si $f(x) = \dfrac{1}{x}$

(2) La recta normal (o perpendicular) a la gráfica de f por $(x_0, f(x_0))$ es la recta perpendicular a la recta tangente por dicho punto. Calcular las rectas tangentes y normales a las gráficas de las funciones del ejercicio anterior en los puntos indicados. Graficar.

(3) La altura del nivel de agua de un tanque cilíndrico de 1 metro de diámetro está dada en metros por la función $h(t) = (1 - t/7200)^3$ (en metros)donde t denota el tiempo medido en segundos.

(a) ¿Cuál es la tasa de variación de la altura con respecto al tiempo para $t = 1200$ segundos? (expresar también las unidades)

(b) ¿Y cuál es la tasa de variación del *volumen de agua* con respecto al tiempo en ese instante? Es decir, ¿cuántos metros cúbicos entran o salen del tanque por unidad de tiempo en $t = 1200$?

(c) ¿Cuál es el instante en que el tanque se vacía completamente?

(4) La distancia (en metros) recorrida por un auto de carrera a tiempo t (en segundos) está dada por la función

$$s(t) = \begin{cases} t^2 & \text{si } 0 \leq t \leq 50 \\ -2500 + 100t & \text{si } 50 < t \leq 10. \end{cases}$$

(a) ¿Cuál es la velocidad (en km/h) del vehículo a tiempo $t = 25$?

(b) ¿Cuál es la velocidad del vehículo a tiempo $t = 50$?

(c) ¿Cuál es la aceleración del vehículo a tiempo $t = 25$? ¿y a tiempo $t = 75$?

(d) ¿Cuál es la aceleración del vehículo a tiempo $t = 50$?

(5) Los límites laterales de $\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ cuando $x \to x_0$ se denominan *derivadas laterales*. Analizar en cada caso la existencia de las derivadas laterales y de la derivada en x_0:

(a) $f(x) = [x]$ (b) $f(x) = x - [x]$ (c) $f(x) = \sqrt{x}$ (d) $f(x) = \sqrt[3]{x}$

(6) Sea f una función derivable en x_0 y sea c un número real. Probar que la función $c\,f$ es también derivable en x_0 y además

$$(c\,f)'(x_0) = c\,f'(x_0)$$

(7) Sean f, g definidas en (a,b) y sea $x_0 \in (a,b)$ un punto donde g es derivable. Demostrar que si existe $\delta > 0$ tal que $f(x) = g(x)$ para todo $x \in (a,b)$ con $|x - x_0| < \delta$, entonces f es derivable en x_0 y $f'(x_0) = g'(x_0)$.

(8) Considerar la función

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \qquad f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \text{ es racional} \\ 0 & \text{si } x \text{ es irracional} \end{cases}$$

- Probar que f no es continua en ningún punto.
- Si definimos $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ por $g(x) = xf(x)$. Probar que g es continua en $x_0 = 0$, pero no es derivable en dicho punto.
- Si definimos $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ por $h(x) = x^2 f(x)$. Probar que h es derivable en $x_0 = 0$.

(9) Consideremos la función

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \qquad f(x) = \begin{cases} \operatorname{sen} \frac{1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

- Probar que f no es continua en $x_0 = 0$.
- Si definimos $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ por $g(x) = xf(x)$. Probar que g es continua en $x_0 = 0$, pero no es derivable en dicho punto.
- Si definimos $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ por $h(x) = x^2 f(x)$. Probar que h es derivable en $x_0 = 0$.

(10) (a) Probar que si f es par (y derivable), entonces f' es impar.

(b) Probar que si f es impar (y derivable), entonces f' es par.

(11) Sea $f:\mathbb{R}-\{0\}\to\mathbb{R}$ dada por $f(x)=\ln|x|$. Probar que f es derivable en $\mathbb{R}-\{0\}$ y que $f'(x)=\frac{1}{x}$ para todo $x\neq 0$.

(12) Se definen las funciones *hiperbólicas* de la siguiente manera:

$$\operatorname{senh}:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\quad \operatorname{senh}x=\frac{e^x-e^{-x}}{2},\qquad \cosh:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\quad \cosh x=\frac{e^x+e^{-x}}{2}.$$

(a) Probar que $\cosh x$ es par y $\operatorname{senh}x$ es impar.

(b) Calcular $\cosh 0$ y $\operatorname{senh} 0$.

(c) Probar que $\cosh^2 x-\operatorname{senh}^2 x=1$ para todo $x\in\mathbb{R}$.

(d) Probar que $\operatorname{senh}' x=\cosh x$ y que $\cosh' x=\operatorname{senh} x$.

(13) Hallar $f'(x)$ en los siguientes casos:

(a) $f(x)=3x^3+6x^2-2x+1$ (b) $f(x)=x(3+x^2)$ (c) $f(x)=(x+2)(3x+1)(2+5x^2)$

(d) $f(x)=\dfrac{x-1}{x}$ (e) $f(x)=\dfrac{4x-3}{2x+4}$ (f) $f(x)=\sqrt{2x^2+3}$

(g) $f(x)=\dfrac{(x+3)^2(4x-1)}{(2x+1)^2(3x-2)}$ (h) $f(x)=\dfrac{a^2}{\sqrt{a^2-x^2}}$ (i) $f(x)=\dfrac{x^3}{(4-x^2)^3}$

(j) $f(x)=4x-\dfrac{2}{x}$ (k) $f(x)=(x^2+1)\sqrt{x^2+1}$ (ℓ) $f(x)=\tan x$

(m) $f(x)=\dfrac{x+e^x}{5-x^2}+\tan x$ (ñ) $f(x)=\sec x$ (o) $f(x)=\operatorname{sen}(\operatorname{sen}(\cos x))$

(p) $f(x)=e^{\operatorname{sen}x}+e^{\tan x}$

(14) Imaginemos una ruta en la cual estuviese especificada la velocidad máxima permitida en cada uno de sus puntos. Dicho de otro modo, existe cierta función L tal que la velocidad máxima permitida a x km del origen de la carretera es $L(x)$. Dos automóviles, A y B, van circulando a lo largo de esta carretera; la posición del automóvil A en el tiempo t es $a(t)$ y la de B es $b(t)$.

(a) ¿Cuál es la ecuación (o fórmula) que expresa el hecho de que el automóvil A circula siempre a la velocidad máxima permitida? No hay que resolver nada, sólo expresar en fórmulas lo que se escribe en el texto. La respuesta *no* es $a'(t)=L(t)$.

(b) Supongamos que A va siempre a la velocidad máxima permitida y que la posición de B en el tiempo t es la posición de A en el tiempo $t-1$. Expresar esto con una fórmula y demostrar que B va siempre también a la velocidad máxima permitida.

(c) Sigamos suponiendo que A va siempre a la velocidad máxima permitida, y supongamos ahora que B va siempre detrás de A a una *distancia constante*. ¿Bajo qué condiciones irá todavía B a la velocidad máxima permitida?

(15) Un objeto circular va aumentando de tamaño de manera no especificada pero se sabe que cuando el radio es 6m, la tasa de variación del mismo es 4m/h. Hallar la tasa de variación del área cuando el radio es 6m.

(16) Supongamos que se nos dice que el objeto circular que hemos estado observando es en realidad la sección transversal de un objeto esférico. Hallar la tasa de variación del *volumen* cuando el radio es 6. (Fórmula para el volumen: $\frac{4}{3}\pi r^3$)

(17) Supongamos ahora que la tasa de variación del área de la sección transversal circular es 5m^2/h cuando el radio es 3m. Hallar la tasa de variación del volumen cuando el radio es 3m.

(18) Hallar $f'(x)$ en los siguientes casos:

(a) $f(x)=x\ln x$ (b) $f(x)=x^3\ln x+e^{x^2}$ (c) $f(x)=\dfrac{\ln(x+2)}{x+2}$

(d) $f(x)=(\ln x)^3$ (e) $f(x)=\ln(x^3)$ (f) $f(x)=\ln\dfrac{x^2}{1-x^2}$

(g) $f(x)=\ln\dfrac{\sqrt{x^2+1}-1}{\sqrt{x^2+1}+1}$ (h) $f(x)=\dfrac{x^3}{\ln x}$ (i) $f(x)=\cosh^2 x$

(j) $f(x)=\operatorname{senh}^2 x$ (k) $f(x)=\ln(\operatorname{senh}x)$ (ℓ) $f(x)=\ln\left(\operatorname{senh}(x^2)\right)$

(m) $f(x)=x^{3x}$ (n) $f(x)=\left(2^x\right)^2$ (ñ) $f(x)=2^{x^x}$

(o) $f(x)=\left(\operatorname{sen}^3(x)\right)^{\ln x}$ (p) $f(x)=(x^2+1)^{\sqrt{x}}\cos(4x)$ (q) $f(x)=x^{x^x}$

(19) Una mancha circular de humedad en una pared aumenta su tamaño de manera desconocida. En el momento en que la mancha tiene un radio de 20cm, el radio aumenta a razón de $0,5$cm por minuto. ¿A qué velocidad aumenta el área de la mancha en ese instante?