Trabajo Práctico 5

Cálculo II
2do semestre 2007

---

(1) Encontrar el valor de c en el teorema del valor medio, para $[a, b] = [0, 1]$ y f dada por:

(a) $f(x) = 3x$ (b) $f(x) = 2x^2$ (c) $f(x) = \sqrt[3]{x}$

(2) Probar que la función $f(x) = \sqrt[3]{(x-3)^2}$ satisface $f(1) = f(5)$ pero que no existe $c \in (1, 5)$ tal que $f'(c) = 0$. ¿Por qué no contradice esto el teorema de Rolle?

(3) Hallar en cada caso todas las funciones f tales que

(a) $f'(x) = \cos x$	(b) $f'(x) = e^{3x}$	(c) $f'(x) = 1/x^2$ $(x > 0)$
(d) $f'(x) = 1/x$ $(x > 0)$	(e) $f''(x) = x^3$	(f) $f'''(x) = x + x^2$
(g) $f'''(x) = 0$	(h) $f^{(4)}(x) = 0$	(i) $f^{(n)}(x) = 0$

($f^{(n)}$ denota la n-ésima derivada de f.)

(4) Sea $f(x) = (x-1)x(x+2)(x+5)$. Probar que f' tiene tres raíces reales.

(5) Consideremos la función $s(t)$ que denota la altura de un cuerpo que se mueve bajo el sólo efecto de la fuerza de gravedad. Es decir, $s''(t) = -9,8\text{m/s}^2$.

(a) Demostrar que $s(t)$ es de la forma $s(t) = -4,9t^2 + A\,t + B$

(b) ¿Qué representan A y B físicamente?

(c) Se lanza un cuerpo hacia arriba con una velocidad de v metros por segundo desde el nivel del suelo. ¿A qué altura (máxima) llega? ¿Cuál es su velocidad en el momento en que alcanza dicha altura? ¿Cuál es la acleración en dicho momento? ¿Cuándo llegará otra vez al suelo? ¿Cuál será su velocidad en el momento de alcanzar el suelo?

(6) Una bala de cañón se lanza desde el suelo con velocidad v y según un ángulo α de modo que su componente vertical de velocidad (a tiempo $t = 0$) es $v\ \sin(\alpha)$ y la componente horizontal es $v\ \cos(\alpha)$ (para todo tiempo t).

(a) Hallar una fórmula para la altura $y(t)$ y una para la distancia horizontal $x(t)$. (La bala se lanza en $t = 0$)

(b) Demostrar que la trayectoria de la bala es una parábola.

(c) Hallar una fórmula que indique la distancia horizontal recorrida por la bala antes de alcanzar el suelo (la fórmula deberá depender de v y de α).

(d) Hallar el ángulo α que hace máxima la distancia horizontal recorrida por la bala antes de alcanzar el suelo (para una velocidad v fija).

(7) Sea f definida en un intervalo (a, b).

(a) Probar que si f es derivable en todo punto y $f'(x) \geq 0$ para todo $x \in (a, b)$, entonces f es creciente (es decir, $x < x'$ implica $f(x) \leq f(x')$).

(b) Probar que si f es creciente y derivable, entonces $f'(x) \geq 0$ para todo x en el dominio de f.

(c) Dar un ejemplo de una función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ estrictamente creciente y derivable pero que no cumpla $f'(x) > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

(d) Enunciar y probar resultados análogos a (a) y (b) cambiando *creciente* por *decreciente*.

(8) Probar las siguientes afirmaciones y graficar

(a) La función f dada por $f(x) = \operatorname{cotg} x = \dfrac{\cos x}{\operatorname{sen} x}$ es biyectiva de $(0, \pi)$ en $\mathbb{R}$ y su inversa, cotg^{-1} tiene derivada

$$(\operatorname{cotg}^{-1})'(x) = -\frac{1}{1+x^2}$$

(b) La función f dada por $f(x) = \operatorname{senh} x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$ es biyectiva de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ y su inversa senh^{-1} tiene derivada

$$(\operatorname{senh}^{-1})'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$$

(c) La función f dada por $f(x) = \cosh x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$ es biyectiva de $[0, +\infty)$ en $[1, +\infty)$ y su inversa $\cosh^{-1}$ tiene derivada

$$(\cosh^{-1})'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$$

(d) La función f dada por $f(x) = \tanh x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$ es biyectiva de $\mathbb{R}$ en $(-1,1)$ y su inversa $\tanh^{-1}$ tiene derivada

$$(\tanh^{-1})'(x) = \frac{1}{1-x^2}$$

(9) Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función continua en $\mathbb{R}$ y derivable en $\mathbb{R} - \{a\}$. Demostrar que si existe $\lim_{x\to a} f'(x) = k$, entonces f es derivable en a y además $f'(a) = k$.

(10) Sean f y g funciones definidas y derivables en un intervalo (a,b) salvo tal vez en $x_0 \in (a,b)$, y supongamos que $g(x) \neq 0$ para todo $x \in (a,b) - \{x_0\}$. Demostrar:

(a) Si $\displaystyle\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} g(x) = 0$ y $\displaystyle\lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \infty$, entonces $\displaystyle\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \infty$. (Sugerencia, estudiar $\displaystyle\lim_{x\to x_0} \frac{g(x)}{f(x)}$).

(b) Si $\displaystyle\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} g(x) = 0$ y $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \ell$, entonces $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \ell$.

(c) Enunciar todos los casos posibles de aplicación de la regla de L'Hospital (cuando $x \to \pm\infty$, o cuando el límite sea $\pm\infty$, o $x \to x_0^+$, o $x \to x_0^-$, etc.)

(11) Calcular los siguientes límites:

(a) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x - \operatorname{sen} x}{x^3}$	(b) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} 5x}{x}$	(c) $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{x^2 - 2x + 1}{3x^2 + 2x - 5}$	(d) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{e^{2x} - e^{-2x} - 4x}{x - \operatorname{sen} x}$
(e) $\displaystyle\lim_{x\to a} \frac{x^n - a^n}{x - a}$	(f) $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{\ln x}{x - 1}$	(g) $\displaystyle\lim_{x\to \frac{\pi}{2}} \frac{\ln(\operatorname{sen} x)}{\pi - 2x}$	(h) $\displaystyle\lim_{x\to a} \frac{\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} a}{x - a}$
(i) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg} x - \operatorname{sen} x}{\operatorname{sen}^2 x}$	(j) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\ln x}{\operatorname{cotg} x}$	(k) $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \frac{\ln x}{x^4}$	(ℓ) $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \frac{e^x}{x^2}$

(12) Probar que si $p(x)$ es un polinomio, entonces

(a) $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \frac{e^x}{p(x)} = \infty$;

(b) $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \frac{\ln x}{p(x)} = 0$ (si grado de p es ≥ 1).

En palabras, esto significa que:

La función exponencial tiende a infinito *más rápidamente* que cualquier polinomio.

La función logaritmo tiende a infinito *más lentamente* que cualquier polinomio (de grado ≥ 1).

(13) Probar, sin usar L'Hospital, que $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x^2 \operatorname{sen}(\frac{1}{x})}{\operatorname{sen} x} = 0$. ¿Qué ocurre si se quiere usar L'Hospital? ¿Por qué no funciona la regla en este caso?