Trabajo Práctico 7

Cálculo II
2do semestre 2007

---

(1) Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una función acotada y supongamos que existe una sucesión $(\pi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de particiones de $[a,b]$ que satisface:

$$\lim_{n\to\infty} s_{\pi_n}(f) = \lim_{n\to\infty} S_{\pi_n}(f).$$

Probar que entonces f es integrable sobre $[a,b]$.

(2) Probar que $f(x) = x$ es integrable sobre cualquier $[a,b]$ y que $\displaystyle\int_a^b x\,dx = \frac{b^2-a^2}{2}$. Sugerencia: tomar $h = b-a$, para cada $n \in \mathbb{N}$ definir $\pi_n = \{a, a+\frac{h}{n}, a+2\frac{h}{n}, \ldots, a+(n-1)\frac{h}{n}, b\}$ y usar el ejercicio (1).

(3) Probar que $f(x) = x^2$ es integrable sobre $[0,1]$ y que $\displaystyle\int_0^1 x^2\,dx = \frac{1}{3}$. Sugerencia: imitar el ejercicio anterior y recordar que $1^2+2^2+\cdots+n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

(4) Supongamos que f y g son integrables y que

$$\int_1^2 f(x)\,dx = -4, \qquad \int_1^5 f(x)\,dx = 6, \qquad \int_1^5 g(x)\,dx = 8.$$

Usando las propiedades de la integral calcular

(a) $\displaystyle\int_2^2 g(x)\,dx$ **(b)** $\displaystyle\int_5^1 g(x)\,dx$ **(c)** $\displaystyle\int_1^2 3f(x)\,dx$

(d) $\displaystyle\int_2^5 f(x)\,dx$ **(e)** $\displaystyle\int_1^5 [f(x)-g(x)]\,dx$ **(f)** $\displaystyle\int_1^5 [4f(x)-g(x)]\,dx$

(5) Probar que si $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ es acotada y $f(x) \geq 0$ para todo $x \in [a,b]$, entonces $\underline{\int_a^b} f(x)\,dx$ y $\overline{\int_a^b} f(x)\,dx$ son no negativas. Por lo tanto, si f es integrable, será $\int_a^b f(x)\,dx \geq 0$.

(6) Sea $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ definida por:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \neq 1, \\ 1 & \text{si } x = 1. \end{cases}$$

Probar que f es integrable sobre $[0,1]$, y que $\int_0^1 f(x)\,dx = 0$. Sugerencia: elegir particiones uniformes y usar el ejercicio (1).

(7) Probar que si f es integrable sobre $[a,b]$ y c, d son tales que $a \leq c < d \leq b$, entonces f es integrable sobre $[c,d]$.

(8) Probar que si f y g son integrables sobre $[a,b]$ y $f(x) \leq g(x)$ para todo $x \in [a,b]$, entonces

$$\int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b g(x)\,dx.$$

Sugerencia: considerar la función $g - f$ y usar ejercicio (5).

(9) Probar que si f es integrable sobre $[a,b]$ y es $m \leq f(x) \leq M$ para todo $x \in [a,b]$, entonces

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq M(b-a).$$

Interpretar gráficamente en el caso de $f(x) > 0$ para todo $x \in [a,b]$.

Sugerencia: usar el ejercicio anterior.

(10) Probar que si f es integrable sobre $[a,b]$ entonces

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|\,dx.$$

Sugerencia: usar el ejercicio (8) para f y $-f$.

(11) Dar un ejemplo de funciones integrables f y g sobre $[a,b]$ para las que no se cumpla

$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx \cdot \int_a^b g(x)\,dx.$$

(12) Probar que si $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ es creciente (y acotada), entonces es integrable sobre $[a,b]$.
Sugerencia: tomar $\pi_n = \{t_0; t_1; \ldots; t_n\}$, con $t_i = a + i\frac{b-a}{n}$, $i = 0, 1, \ldots, n$, y ver que $M_i = f(t_i)$ y $m_i = f(t_{i-1})$. ¿A qué es igual $S_{\pi_n}(f) - s_{\pi_n}(f)$?

(13) Sea $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ continua. Probar que existe $c\in(a,b)$ tal que

$$\int_a^b f(x)\,dx = f(c)(b-a).$$

Este resultado se conoce como *Teorema del valor medio del Cálculo Integral*. Interpretar gráficamente.

Ver con un ejemplo que la hipótesis de f continua no puede quitarse.

(14) Sea $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ integrable. Para $c\in[a,b]$ definimos $g:[a,b]\to\mathbb{R}$ como $g(x)=f(x)$ si $x\neq c$ y $g(c)=\alpha$, con α cualquier número real. Demostrar que g es integrable sobre $[a,b]$ y que $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b g(x)\,dx$.
Sugerencia: Ver qué forma tiene la función $f-g$, ver que es integrable, y calcular su integral. Luego usar que la suma de funciones integrables es integrable y que la integral de la suma es la suma de las integrales.

(15) Para cada una de las siguientes funciones $f:[-1,1]\to\mathbb{R}$ dar una fórmula para $F(x)=\displaystyle\int_0^x f(t)\,dt$ y graficar

(a) $f(t)=\begin{cases}-1 & \text{si } t\le 0\\ 1 & \text{si } t>0\end{cases}$ (b) $f(t)=\begin{cases}-1 & \text{si } t< 0\\ 1 & \text{si } t\ge 0\end{cases}$ (c) $f(t)=\begin{cases}0 & \text{si } t< 0\\ t & \text{si } t\ge 0\end{cases}$

(16) Calcular las siguientes integrales:

(a) $\displaystyle\int_0^\pi \cos(x)\,dx$ (b) $\displaystyle\int_1^3 3x^2\,dx$ (c) $\displaystyle\int_1^e \frac{1}{x}\,dx$ (d) $\displaystyle\int_0^2 (x^2+3x+2)\,dx$

(e) $\displaystyle\int_0^1 \cosh(x)\,dx$ (f) $\displaystyle\int_1^2 \frac{1}{2\sqrt{x}}\,dx$ (g) $\displaystyle\int_4^9 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$ (h) $\displaystyle\int_1^2 x^a\,dx$ $(a\in\mathbb{R},\ a\neq -1)$

(i) $\displaystyle\int_0^1 x^n\,dx$ $(n\in\mathbb{N})$ (j) $\displaystyle\int_0^\pi \operatorname{sen}(x)\,dx$ (k) $\displaystyle\int_{-a}^a x^n\,dx$ ($n\in\mathbb{N}$ analizar n par o impar)

(17) Sea $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ continua y, para $a\in\mathbb{R}$ fijo, sea $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida por

$$F(x)=\int_a^x f(t)\,dt.$$

Demostrar que $F'(x)=f(x)$ para todo $x\in\mathbb{R}$. Sugerencia: usar el teorema 8.20 para $x\ge a$ y pensar qué ocurre cuando $x<a$.

(18) Hallar el área de la región comprendida entre la gráfica de $f(x)=\operatorname{sen}(x)$ y el eje de abscisas para x entre 0 y 2π. Comparar con $\displaystyle\int_0^{2\pi} \operatorname{sen}(x)\,dx$.

(19) Hallar el área de la región comprendida entre la gráfica de $f(x)=x^2-3x+2$ y el eje de abscisas para x entre 0 y 4. Comparar con $\displaystyle\int_0^4 (x^2-3x+2)\,dx$.

(20) Sea $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida por $f(x)=[x]$ (parte entera de x) y sea $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida por $F(x)=\int_0^x f(t)\,dt$. ¿Cuánto valen $F'_+(m)$ y $F'_-(m)$ para $m\in\mathbb{Z}$? ¿Y cuánto vale $F'(x_0)$ para $x_0\notin\mathbb{Z}$?

(21) Dar un ejemplo de una función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ integrable tal que $F(x)=\int_0^x f(t)\,dt$ sea derivable en todo punto, pero para la que no sea $F'(x)=f(x)$ para todo $x\in\mathbb{R}$. Sugerencia: ver ejercicio (6).

(22) Si $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ es integrable, probar que $F:[a,b]\to\mathbb{R}$ dada por $F(x)=\displaystyle\int_x^b f(t)\,dt$ es uniformemente continua.