Trabajo Práctico 8 *Cálculo II*
2do semestre 2007

---

(1) Probar las siguientes afirmaciones:

(a) La integral $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^p}\, dx$ es convergente para $p > 1$ y no convergente para $p \leq 1$.

(b) La integral $\int_0^{1} \frac{1}{x^p}\, dx$ existe para $p < 1$ y no existe para $p \geq 1$

(c) La integral $\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^p}\, dx$, no es convergente para ningún $p \in \mathbb{R}$.

(2) Estudiar la convergencia de las siguientes integrales:

(a) $\int_2^{+\infty} \frac{1}{\ln x}\, dx$ (b) $\int_2^{+\infty} \frac{1}{x-1}\, dx$ (c) $\int_0^{\pi} \frac{\operatorname{sen}(x)}{x^3}\, dx$

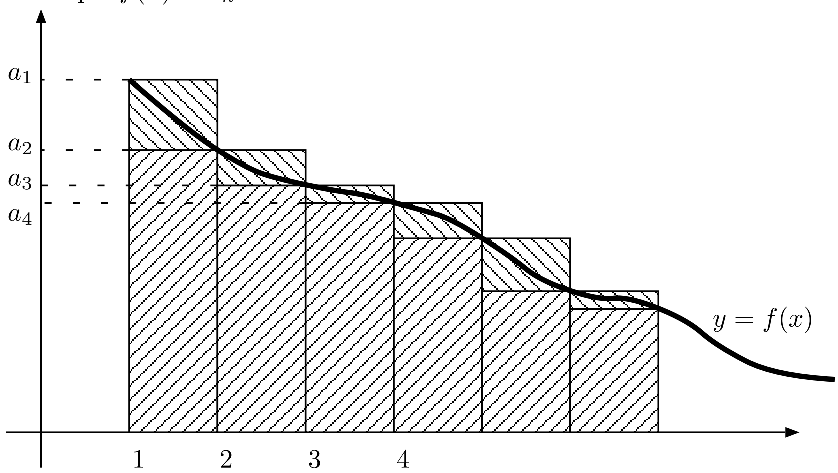
(d) $\int_{-1}^{1} \frac{1}{x}\, dx$ (e) $\int_0^{1} \frac{\operatorname{sen}(x)}{x}\, dx$ (f) $\int_0^{\pi} \frac{1-\cos(x)}{x}\, dx$

(3) Estudiar la convergencia de las siguientes integrales usando el criterio de comparación:

(a) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^3+x^2}{x^6+1}\, dx$ (b) $\int_2^{+\infty} \frac{x}{\sqrt{x^3-1}}\, dx$ (c) $\int_1^{+\infty} \frac{x}{3x^4-2x^2+1}\, dx$ (d) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2+\operatorname{sen}(x)}{x^2+1}\, dx$

(e) $\int_{-\infty}^{-1} \frac{e^x}{x}\, dx$ (f) $\int_0^{+\infty} \frac{1}{e^x+1}\, dx$ (g) $\int_2^{+\infty} \frac{1}{\ln x}\, dx$ (h) $\int_0^{+\infty} e^{-tx}\, dx \quad t \in \mathbb{R}$

(4) Sea $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión decreciente de términos no negativos y sea $f : [1, +\infty) \to \mathbb{R}$ una función decreciente tal que para $n \in \mathbb{N}$ se tiene que $f(n) = a_n$.



(a) Probar que para todo $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$ se cumple que

$$a_n \leq \int_{n-1}^{n} f(x)\, dx \leq a_{n-1}$$

(interpretar gráficamente).

(b) Deducir que si $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$, entonces

$$S_n - a_1 \leq \int_1^n f(x)\, dx \leq S_{n-1}.$$

(c) Demostrar que entonces $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es convergente si y sólo si $\int_1^{+\infty} f(x)\, dx$ es convergente. Esto se conoce como criterio de la integral de Cauchy.

(d) Aplicar el criterio de la integral de Cauchy para estudiar la convergencia de la serie armónica generalizada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$.

(5) Probar que $\int_{g(a)}^{g(b)} f(x)\,dx = \int_a^b f\circ g(x)\,g'(x)\,dx$ cualquiera sea la función continua f y la función derivable g.

(6) Hallar las primitivas de la función f, siendo $f(x)$ igual a

(a) $4x^3-3x+6$	(b) $\dfrac{1}{x^{15}}$	(c) $3e^x$	(d) $\dfrac{2}{\sqrt{x}}$
(e) $x\sqrt{x}$	(f) $\dfrac{x^3+3\sqrt{x}-1}{x^2}$	(g) $\dfrac{\left(\sqrt{x}+\sqrt{a}\right)^2}{x}$	(h) $\dfrac{2-\sqrt{x}}{\sqrt{x}}$

(7) Usar el método de sustitución para hallar las primitivas de la función f, siendo $f(x)$ igual a:

(a) $x\sqrt{x^2-2}$	(b) $\dfrac{x}{x^2+1}$	(c) $3\,\mathrm{sen}(4x)-\cos(2x)$	(d) $\mathrm{sen}^6(x)\cos(x)$
(d) $\cos\left(x-\frac{\pi}{6}\right)$	(f) e^{3x}	(g) $\dfrac{e^x}{1+e^x}$	(h) $\mathrm{sen}^2(x)^*$
(i) $x^4\cos(x^5)$	(j) $\dfrac{2x^2}{\mathrm{sen}(x^3)}$	(k) $(2x-1)^2$	(ℓ) $x\,\mathrm{sen}(x^2)$
(m) $\dfrac{1}{4x+3}$	(n) $2x\sqrt{1-x^2}$	(ñ) $x(5x^2-3)^7$	(o) $\dfrac{e^{ax}}{\sqrt{1-e^{ax}}}$
(p) $\dfrac{\cos(x)}{1-\mathrm{sen}(x)}$	(q) $\mathrm{sen}(\sqrt{x})\sqrt{x}$	(r) $\dfrac{1}{e^x+e^{-x}}$	(s) $\dfrac{\ln(x)}{x}$

(* $\mathrm{sen}^2(x)=\frac{1}{2}(1-\cos(2x))$)

(8) Sabiendo que $\arctan'(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$, calcular las primitivas de f, siendo $f(x)$ igual a:

(a) $\dfrac{1}{1+4x^2}$	(b) $\dfrac{1}{4+9x^2}$	(c) $\dfrac{1}{x^2+6x+11}^{\,*}$	(d) $\dfrac{2x-3}{x^2+1}$

(* completar cuadrados).

(9) Sabiendo que $\mathrm{arc\,sen}'(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, calcular las primitivas de f, siendo $f(x)$ igual a:

(a) $\dfrac{1}{\sqrt{1-9x^2}}$	(b) $\dfrac{1}{\sqrt{9-4x^2}}$	(c) $\dfrac{1}{\sqrt{1-6x-x^2}}$

(10) Hacer la sustitución $x=\mathrm{sen}(u)$ (o sea $u=\mathrm{arc\,sen}(x)$) para calcular la primitiva de $\sqrt{1-x^2}$. Usar el resultado para calcular las primitivas de

(a) $\sqrt{4-3x^2}$	(b) $\sqrt{2x+4-3x^2}$	(c) $(2x-1)\sqrt{1-x^2}$

(11) Hacer la sustitución $x=\mathrm{senh}(u)$ para calcular las primitivas de $\sqrt{1+x^2}$.

(12) Hacer la sustitución $x=\cosh(u)$ para calcular las primitivas de $\sqrt{x^2-1}$.

(13) Calcular las primitivas de la función f, siendo $f(x)$ igual a:

(a) $x\,\mathrm{sen}(x)$	(b) $x\ln(x)$	(c) $\dfrac{x}{e^x}$	(d) $e^{2x}\,\mathrm{sen}(3x)$
(e) $e^{ax}\cos(bx)$	(f) $\arctan(x)$	(g) $x2^{-x}$	(h) $x^2\cosh(x)$

(14) Calcular las primitivas de la función f, siendo $f(x)$ igual a:

(a) $\dfrac{5x^3-2x^2+15}{x+1}$	(b) $\dfrac{1+x^2}{1-x^2}$	(c) $\dfrac{x+2}{x+10}$	(d) $\dfrac{3x^2+6x-1}{x^2+5x+20}$

(15) Calcular las primitivas de la función f, siendo $f(x)$ igual a:

(a) $\dfrac{4x-7}{x^2-3x+2}$	(b) $\dfrac{6x+10}{x^2+4x+3}$	(c) $\dfrac{2x-3}{(x^2-3x+2)^2}$	(d) $\dfrac{x^3-1}{4x^3-x}$
(e) $\dfrac{1}{1+x^3}$	(f) $\dfrac{x^3}{x^4-1}$	(g) $\dfrac{4x^3+x^2-2x+1}{x^4+3x^3+3x^2+3x+2}$	