Apellido y Nombre: ______________________________ **Código:** _ _ _ _

Examen de Práctica *Ecuaciones Diferenciales Ordinarias*
21/07/2003 *1er semestre 2003*

---

(1) (15 puntos) Consideremos una cascada de dos tanques con volúmenes respectivos de $V_1 = 100$ gal y $V_2 = 200$ gal de salmuera. Cada tanque contiene 50 lb de sal. Los tres flujos (de entrada al tanque 1, del tanque 1 al tanque 2 y de salida del tanque 2) son iguales a 5 gal/s, donde lo que fluye hacia dentro del tanque 1 es agua pura.

(a) Encontrar la cantidad $x(t)$ de sal en el tanque 1 a tiempo t.

(b) Encontrar una ecuación para la cantidad de sal $y(t)$ en el tanque 2 a tiempo t (la ecuación involucrará a $x(t)$.)

(c) Hallar la solución $y(t)$, utilizando la expresión de $x(t)$ hallada en (a).

(2) (15 puntos) Resolver el problema a valores iniciales

$$y'' + 9y = \operatorname{sen} 3x \qquad y(0) = 0 \qquad y'(0) = 0$$

(3) (15 puntos) Hallar la solución general de la ecuación

$$4x^2 y'' + y = 0$$

(4) (15 puntos) Hallar todos los autovalores y autofunciones del problema

$$y'' + 2y' + \lambda y = 0, \qquad y(0) = y(1) = 0$$

(5) (15 puntos) Hallar la matriz fundamental del sistema

$$\boldsymbol{x}' = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \boldsymbol{x}$$

(6) (15 puntos) El siguiente sistema tiene una singularidad en $(-2, -1)$. Determinar el tipo, estabilidad y graficar algunas trayectorias.

$$\begin{aligned} x' &= 4x - 5y + 3 \\ y' &= 5x - 4y + 6 \end{aligned}$$

(7) (15 puntos) Sea $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > y\}$ la región del plano (x, y) debajo de la recta $y = x$. Sea $\phi : D \to \mathbb{R}$ una función continua de la variable x y Lipschitz continua de la variable y que satisface

$$|\phi(x, y)| \leq 1, \quad \forall (x, y) \in D.$$

Demostrar que si $x_0 > y_0$, entonces el PVI

$$\begin{cases} y' = \phi(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

tiene una solución que existe para todo $x \geq x_0$.