Apellido y Nombre: ___________________________

Examen Final Especial	*Ecuaciones Diferenciales Ordinarias*
23/07/2003	*1er semestre 2003*

---

(1) Consideremos la ecuación diferencial
$$\frac{dy}{dx} = \phi(x,y)$$
donde $\phi : [a,b] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una función continua en $D = [a,b] \times \mathbb{R}$ y (globalmente) Lipschitz continua de la variable y.

(a) Demostrar que si $x_0 \in [a,b]$, $y_0 \in \mathbb{R}$, entonces el PVI
$$\begin{cases} y' = \phi(x,y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$
tiene solución en todo el intervalo $[a,b]$. Utilizar el método de aproximaciones sucesivas.

(b) Supongamos que además $\phi \in C^1$ y
$$L \leq \frac{\partial \phi}{\partial y}(x,y) \leq M, \qquad \forall (x,y) \in D.$$
Demostrar que si y e $\tilde{y}$ son soluciones de la misma ecuación diferencial con $y(x_0) = y_0$, $\tilde{y}(x_0) = \tilde{y}_0$, entonces
$$e^{L|x-x_0|}|y_0 - \tilde{y}_0| \leq |y(x) - \tilde{y}(x)| \leq e^{M|x-x_0|}|y_0 - \tilde{y}_0|, \qquad \forall x \in [a,b].$$

(2) Dar condiciones suficientes sobre P y Q para que el sistema autónomo
$$\begin{aligned} x' &= P(x,y) \\ y' &= Q(x,y) \end{aligned}$$
tenga un punto crítico estable en el origen.

(3) Consideremos el operador $Lu := u'' + p(x)u' + q(x)u$ con $p, q \in C([a,b])$. Demostrar el teorema de alternativa siguiente:

Se cumple una y sólo una de las siguientes dos proposiciones:

(a) El problema
$$\begin{cases} Lu = f(x) \\ u(a) = \alpha, \quad u(b) = \beta \end{cases}$$
tiene solución para todo $f \in C([a,b])$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

(b) El problema
$$\begin{cases} Lu = 0 \\ u(a) = 0, \quad u(b) = 0 \end{cases}$$
tiene solución no trivial.