Ecuaciones Diferenciales Ordinarias
1er semestre 2003

Práctica 1

(1) Verificar que cada función dada es solución de la ecuación diferencial.

(a) $y' + 2xy^2 = 0; \quad y = \dfrac{1}{1+x^2}$

(b) $x^2y'' + xy' - y = \ln x; \quad y_1 = x - \ln x, \quad y_2 = \dfrac{1}{x} - \ln x$

(2) Sustituir $y = e^{rx}$ en la ecuación diferencial dada y determinar todos los valores de r para los que $y = e^{rx}$ es solución de la ecuación.

(a) $3y' = 2y$

(b) $y'' + y' - 2y = 0$

(3) Verificar que $y(x)$ satisface la ecuación diferencial. Luego determinar el valor de la constante C tal que $y(x)$ satisface la condición inicial.

(a) $y' + y = 0, \quad y(x) = Ce^{-x}, \quad y(0) = 2$

(b) $e^y y' = 1, \quad y = \ln(x + C), \quad y(0) = 0$

(c) $y' + y \tan x = \cos x, \quad y(x) = (x + C)\cos x, \quad y(\pi) = 0.$

(4) En cada uno de los siguientes items, se describe una función $y = g(x)$ por medio de alguna propiedad de su gráfico. Escribir una ecuación de la forma $y' = f(x, y)$ que tenga a $g(x)$ como solución (o como una de sus soluciones).

(a) La pendiente del gráfico de g en el punto (x, y) es la suma de x e y.

(b) La tangente al gráfico de g en el punto (x, y) interseca al eje x en el punto $(x/2, 0)$.

(c) Toda línea recta perpendicular al gráfico de g pasa por el punto $(0, 1)$.

(5) Escribir una ecuación diferencial que sea un modelo matemático de la situación descripta.

(a) La aceleración de un auto deportivo es proporcional a la diferencia entre 250 km/h y la velocidad del auto.

(b) En una población fija de P habitantes, la razón de cambio del número N de personas que han escuchado cierto rumor es proporcional al número de personas que aún no lo han escuchado.

(c) En una población fija de P habitantes, la razón de cambio del número N de personas infectadas con una enfermedad es proporcional al número de personas infectadas y al número de personas no infectadas.

(6) La expresión $y(x) = 1/(C - x)$ define una familia uni-paramétrica de soluciones de la ecuación diferencial $y' = y^2$.

(a) Determinar el valor de C para el que $y(10) = 10$.

(b) Hay algún valor de C para el que $y(0) = 0$?

(c) ¿Hay alguna solución de $y' = y^2$ con $y(0) = 0$?

(7) **(a)** Mostrar que $y(x) = Cx^4$ define una familia uni-paramétrica de soluciones de la ecuación diferencial $xy' = 4y$.

(b) Mostrar que

$$y(x) = \begin{cases} -x^4 & \text{si } x \leq 0, \\ +x^4 & \text{si } x > 0, \end{cases}$$

es también una solución de $xy' = 4y$ para todo $x \in \mathbb{R}$ pero no es de la forma $y = Cx^4$.

(8) Resolver los siguientes PVI's

(a) $\dfrac{dy}{dx} = 2x + 1, \quad y(0) = 3$

(b) $\dfrac{dy}{dx} = x^{1/2}, \quad y(4) = 0.$

(c) $\dfrac{dy}{dx} = x(x^2 + 9)^{1/2}, \quad y(-4) = 0$

(d) $\dfrac{dy}{dx} = xe^{-x}, \quad y(0) = 1$

(9) Encontrar la posición $x(t)$ de una partícula en movimiento con aceleración $a(t)$ dada, posición inicial $x(0) = x_0$, y velocidad inicial $v(0) = v_0$.

(a) $a(t) = 50, \quad v_0 = 10, \quad x_0 = 20$

(b) $a(t) = 3t, \quad v_0 = 5, \quad x_0 = 0.$

(10) Si se suelta una pelota desde un edificio de 100 m. ¿Cuánto tiempo tarda en llegar al suelo? ¿Con qué velocidad golpea el suelo?

(11) Los frenos de un auto se aplican cuando se mueve a 100 km/h y proveen una desaceleración constante de 10 m/s^2. ¿Cuánto más recorre el auto antes de detenerse?

(12) **(a)** Una barra está fija (empotrada) en el extremo $x = 0$ y libre en el extremos $x = L$. Mostrar que su forma está dada por

$$y = \frac{w}{24\,E\,I}(x^4 - 2Lx^3 + L^2x^2).$$

(b) ¿Cuál es la solución si en el extremo $x = 0$ la barra está simplemente soportada? ¿Qué interpretación física tiene este resultado?

(13) Graficar utilizando MATLAB/OCTAVE los campos de direcciones de las siguientes ecuaciones, imprimirlos y esbozar a mano algunas soluciones. Determinar a partir del gráfico qué ecuaciones son estables y cuáles son inestables. Calcular $\lim_{x \to +\infty} y(x)$ sin hallar la solución.

(a) $y' = y$

(b) $y' = -y/2$

(c) $y' = y^3$

(d) $y' = \sin xy$

(e) $y' = \sin y$

(f) $y' = y^3 - y$

(14) Determinar si el teorema de existencia y unicidad se aplica en los siguientes casos. Analizar la existencia, y una vez establecida, analizar la unicidad.

(a) $y' = 2x^2y^2, \quad y(1) = -1.$

(b) $y' = y^{1/3}, \quad y(0) = 1.$

(c) $y' = (x-y)^{1/2}$, $\quad y(2) = 2$

(d) $y' = x/y$, $\quad y(1) = 0$

(e) $y' = x^2 - y^2$, $\quad y(0) = 1$.

(15) Mostrar que en el intervalo $0 \leq x \leq \pi$, las funciones $y_1(x) \equiv 1$ e $y_2(x) = \cos x$ satisfacen el PVI

$$y' + (1-y^2)^{1/2} = 0, \qquad y(0) = 1$$

¿Por qué este hecho no contradice el teorema de existencia y unicidad? Explicar cuidadosamente.

(16) Mostrar que para cualquier constante k, la función $y = kx$ satisface la ecuación diferencial $xy' = y$. Concluir que el PVI

$$xy' = y, \qquad y(0) = 0$$

tiene infinitas soluciones en cualquier intervalo abierto que contiene a $x = 0$. ¿Por qué este hecho no contradice el teorema de existencia y unicidad?

(17) Considerar la ecuación diferencial

$$y' = 4x\sqrt{y}, \qquad \text{para } y \geq 0.$$

(a) Aplicar el teorema de existencia y unicidad para encontrar aquellos puntos (x_0, y_0) tales que la existencia de solución esté garantizada en un intervalo abierto J que contiene a x_0.

(b) Encontrar los puntos (x_0, y_0) para los que la solución sea única.

(c) Econtrar todas las soluciones que pasan por $(0,0)$. (Ayuda: notar que $y_1 \equiv 0$ e $y_2 = (x^2 + C)^2$ son soluciones).