Ecuaciones Diferenciales Ordinarias
1er semestre 2003

Práctica 2

(1) Encontrar la solución general (implícita en caso de ser necesario, explícita si es más conveniente) de las ecuaciones diferenciales siguientes (las primas denotan derivadas con respecto a x.)

(a) $y' + 2xy = 0$
(b) $y' = y \operatorname{sen} x$
(c) $2\sqrt{x}\dfrac{dy}{dx} = \sqrt{1-y^2}$
(d) $(1-x^2)\dfrac{dy}{dx} = 2y$
(e) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1+\sqrt{x}}{1+\sqrt{y}}$
(f) $x^2y' = 1 - x^2 + y^2 - x^2y^2$

(2) Encontrar las soluciones particulares de los siguientes PVIs

(a) $\dfrac{dy}{dx} = ye^x, \qquad y(0) = 2e$
(b) $2y\dfrac{dy}{dx} = x\left(x^2-16\right)^{-1/2}, \qquad y(5) = 2$
(c) $y' \tan x = y, \qquad y\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2}$
(d) $\dfrac{dy}{dx} = 2xy^2 + 3x^2y^2, \qquad y(1) = -1.$

(3) Una ciudad tenía una población de 25000 habitantes en 1970 y una población de 30000 habitantes en 1980. Suponiendo que la población continuará creciendo exponencialmente a una razón constante. ¿Qué población se puede esperar para el año 2010?

(4) El carbón extraído de una calavera contiene sólo un sexto de C^{14} de lo que contiene el carbón extraído de un hueso de nuestra época. ¿Cuál es la edad de la calavera?

(5) La "media vida" del cobalto radiactivo es 5,27 años. Supongamos que un accidente nuclear ha dejado el nivel de radiación de cobalto en una cierta región 100 veces el nivel aceptable para la vida humana. ¿Cuántos años deberán pasar hasta que la región se vuelva habitable?

(6) Hallar la solución general de los siguientes problemas. Si se da una condición inicial, hallar también la solución particular correspondiente.

(a) $y' + y = 2, \qquad y(0) = 0$
(b) $y' + 2y = 2xe^{-3x}$
(c) $2xy' + y = 10\sqrt{x}$
(d) $xy' + y = 2x, \qquad y(1) = c$
(e) $y' + 2xy = x, \qquad y(0) = -2$
(f) $(1+x)y' + y = \cos x, \qquad y(0) = 1$
(g) $(x^2+1)y' + 3x^3y = 6x\exp\left(-\dfrac{3x^2}{2}\right), \qquad y(0) = 1$

(7) **(a)** Mostrar que $y_c(x) = Ce^{-\int P(x)\,dx}$ es una solución general de la ecuación $y' + P(x)y = 0$.

(b) Mostrar que

$$y_p = e^{-\int P(x)\,dx}\left[\int (Q(x)e^{\int P(x)\,dx})\,dx\right]$$

es una solución particular de $y' + P(x)y = Q(x)$

(c) Si $y_c(x)$ es una solución general de $y'+P(x)y = 0$, e $y_p(x)$ es una solución particular de $y'+P(x)y = Q(x)$, demostrar que entonces $y(x) = y_c(x) + y_p(x)$ es una solución general de $y' + P(x) = Q(x)$.

(8) **(a)** Encontrar constantes A y B tales que $y_p(x) = A\operatorname{sen} x + B\cos x$ es una solución de $y' + y = 2\operatorname{sen} x$.

(b) Utilizar el resultado de la parte (a) y del ejercicio anterior para encontrar una solución general de $y' + y = 2\operatorname{sen} x$.

(c) Resolver el PVI $\quad y' + y = 2\operatorname{sen} x, \quad y(0) = 1.$

(9) Un tanque contiene 1000 litros de una solución que consiste de 100 kg de sal disuelta en agua. Se bombea agua pura en el tanque a razón de 5 litros por segundo, y la mezcla —mantenida uniforme por agitación— se bombea hacia afuera a la misma razón. ¿Cuánto tiempo pasará hasta que sólo queden 10 kg de sal en el agua?

(10) Consideremos una cascada de dos tanques con volúmenes respectivos de $V_1 = 100$ gal y $V_2 = 200$ gal de salmuera. Cada tanque contiene 50 lb de sal. Los tres flujos (de entrada al tanque 1, del tanque 1 al tanque 2 y de salida del tanque 2) son iguales a 5 gal/s, donde lo que fluye hacia dentro del tanque 1 es agua pura.

(a) Encontrar la cantidad $x(t)$ de sal en el tanque 1 a tiempo t.

(b) Supongamos que $y(t)$ es la cantidad de sal en el tanque 2 a tiempo t. Mostrar primero que

$$\frac{dy}{dt} = \frac{5\,x(t)}{100} - \frac{5y}{200},$$

y luego hallar la solución $y(t)$, utilizando la expresión de $x(t)$ hallada en (a).

(c) Finalmente, hallar la máxima cantidad de sal que en algún momento tuvo el tanque 2.

(11) (MATLAB/OCTAVE) Consideremos el PVI $xy' + y = 2x$, $y(1) = c$ (cf. Problema 6d)

(a) Hallar la solución

(b) Evaluar la solución para $c = 0{,}8$ en $x = 0{,}01;\ 0{,}1;\ 1;\ 10$. Hacer lo mismo para $c = 1$ y $c = 1{,}2$.

(c) Graficar las soluciones con $c = 0{,}8;\ 0{,}9;\ 1{,}0;\ 1{,}1;\ 1{,}2$; todas juntas en el intervalo $(0, 2{,}5)$.

(d) ¿Cómo afectan los cambios en la condición inicial a la solución cuando $x \to \infty$? ¿y cuando $x \to 0^+$?

(12) Resolver el PVI

$$y' - y = \cos x, \qquad y(0) = c.$$

Utilizar MATLAB/OCTAVE para graficar las soluciones correspondientes a $c = -0{,}9; -0{,}8; \ldots; -0{,}1; 0$. Mostrar todas las soluciones en el mismo gráfico, sobre el mismo intervalo $[0, L]$. Decida usted qué valor de L es más apropiado. Explicar qué ocurre con las soluciones a medida que x crece. Deberían reconocerse tres tipos de comportamiento distintos. ¿Qué valores de c corresponden a cada comportamiento? Discutir qué efecto tienen cambios pequeños en los datos iniciales, sobre el comportamiento global de las curvas solución.

(13) (MATLAB/OCTAVE) Consideremos la ecuación diferencial $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x - e^{-x}}{y + e^{y}}$

(a) Hallar la solución general. Observar que la misma tiene una expresión implícita de la forma

$$f(x, y) = c.$$

Definir esta función en MATLAB/OCTAVE.

(b) Usar la función `contour` para graficar las curvas de nivel de f y observar cómo lucen las curvas solución de la ecuación. Observar lo que ocurre en el rectángulo $[-1,3]\times[-2,2]$. Dibujar 30 curvas.

(c) Observar que todas las curvas tienen una singularidad (pendiente vertical) en puntos con la misma ordenada y. ¿Puede determinar a partir de la ecuación cuál es esta ordenada?

(d) Graficar la solución que satisface la condición $y(1{,}5) = 0{,}5$. Deberían verse dos curvas. Indicar cuál corresponde a la solución.

(e) Para encontrar el valor numérico de la solución $y(x_0)$ del ítem anterior en un punto particular x_0, debemos resolver la ecuación

$$f(x_0, y) = f(1{,}5, 0{,}5)$$

en la variable y. Para resolver esta ecuación se puede utilizar la función `fzero`. Encontrar de este modo $y(0)$, $y(1)$, $y(1{,}8)$ e $y(2{,}1)$. Marcar los puntos correspondientes en el gráfico.

(14) (MATLAB/OCTAVE) Para cada una de las ecuaciones siguientes, graficar el campo de direcciones en un rectángulo suficientemente grande (pero no demasiado grande) de modo que todos los puntos de equilibrio sean visibles. Encontrar los puntos de equilibrio y decidir cuáles son estables y cuáles inestables. Si no puede determinar el valor preciso de un punto de equilibrio de la ecuación o del campo de direcciones utilice la función `fzero`.

(a) $y' = -y(y-2)(y-4)/10$

(b) $y' = y^2 - 3y + 1$

(c) $y' = 0{,}1y - \operatorname{sen} y$

(15) Un tanque con una capacidad de 10 galones contiene una mezcla de 1 galón de agua y un número indeterminado $S(0)$ de libras de sal en la solución. A tiempo cero comienza a fluir agua con 1 lb/gal de sal hacia dentro del tanque, a razón de 2 gal/min. La solución bien mezclada fluye hacia fuera del tanque a razón de 1 gal/min. Derivar la ecuación diferencial para $S(t)$, el número de libras de sal en el tanque después de t minutos, que modela la situación física. (Nota: a tiempo $t = 0$ hay 1 galón de solución, pero el volumen crece con el tiempo.) Graficar el campo de direcciones de la ecuación diferencial sobre el rectángulo $0 \le t \le 10$, $0 \le S \le 10$. A partir del gráfico

(a) encontrar el valor A de tal que: si $S(0) < A$ entonces la cantidad de sal es una función que crece constantemente, pero si $S(0) > A$, la cantidad de sal decrecerá por un momento antes de comenzar a crecer.

(b) indicar en qué difiere la naturaleza de la solución con $S(0) = 1$ de las otras soluciones.

(c) Ahora resolver la ecuación diferencial

(d) Calcular algebraicamente el valor de A a partir de la solución exacta

(e) Calcular la solución exacta para $S(0) = 1$

(f) Calcular la cantidad de sal en el tanque (en términos de $S(0)$) cuando el tanque está a punto de rebalsar.

(g) Calcular para $S(0) > A$, la mínima cantidad de sal en el tanque y el instante en que esto ocurre

(h) Explicar qué principio garantiza la veracidad de la siguiente afirmación:

> Si dos soluciones S_1 y S_2 corresponden a datos iniciales con $S_1(0) < S_2(0)$, entonces para todo $t \ge 0$, debe ocurrir que $S_1(t) < S_2(t)$.