Ecuaciones Diferenciales Ordinarias
1er semestre 2003

Práctica 4

(1) Resolver numéricamente los siguientes PVI y graficar las soluciones. A partir de los graficos, predecir lo que ocurre con cada solución cuando x crece. En particular, decidir si existe $\lim_{x\to\infty} y(x)$, finito o infinito, y luego encontrarlo. Si a partir del gráfico no queda clara la existencia del límite, entonces re-graficar en un intervalo más grande. Otra posibilidad es que la solución tienda a infinito en tiempo finito. Si este es el caso, estimar el tiempo en que esto ocurre.

(a) $y' = e^{-2x} + \dfrac{1}{1+y^2}, \qquad y(0) = -1$

(b) $y' = e^{-x} + y^2, \qquad y(0) = 1$

(c) $y' = \cos x - y^3, \qquad y(0) = 0$

(d) $y' = (\operatorname{sen} x)y - y^2, \qquad y(0) = 1$

(e) $y' = (x^2 - y^2)\operatorname{sen} y, \qquad y(0) = -1$

(f) $y' = -2x + e^{-xy}, \qquad y(0) = 1.$

(2) Este problema ilustra una de las posibles desventajas de aplicar métodos numéricos sin prestar atención a los aspectos teóricos de la ecuación diferencial. Considerar la ecuación

$$-4\,x^2 + 2\,y(x) + x\,y'(x) = 0.$$

(a) Utilizar `mieuler.m` para calcular la aproximación de la solución con condición inicial $y(-0{,}5) = 4{,}25$, utilizando $h = 0{,}2$ y $n = 10$ pasos. El programa generará una lista de pares ordenados (x_i, y_i). Utilizar `plot` para graficar la solución lineal a trozos que conecta los puntos (x_i, y_i).

(b) Ahora modificar el programa `mieuler.m` para implementar el *Método de Euler Mejorado*[1] (grabarlo con el nombre `mieulermej.m`.) Repetir la parte (a) con el Método de Euler Mejorado. ¿Tienen sentido los resultados obtenidos?

(c) Ahora utilizar `ode45` para calcular la solución aproximada en el intervalo $(-0{,}5, 0{,}5)$, específicamente en los puntos $-0{,}5 : 0{,}02 : 0{,}5$, y graficar con `plot`. ¿Cuál es el intervalo sobre el que está definida la solución?

(d) Resolver la ecuación explícitamente y graficar la solución para las condiciones iniciales $y(0) = 0$, $y(-0{,}5) = 4{,}25$, $y(0{,}5) = 4{,}25$, $y(-0{,}5) = -3{,}75$ e $y(0{,}5) = -3{,}75$. Ahora explicar los resultados de (a)–(c). ¿Podríamos haber sabido, sin resolver la ecuación, si obtendríamos resultados razonables en (a) y (b)? ¿Por qué? Explicar por qué `ode45` no comete el mismo error.

[1] El Método de Euler Mejorado consiste en calcular el valor de y_{i+1} del siguiente modo:

$y'_i = f(x_i, y_i)$

$y_{i+1} = y_i + h\,\dfrac{y'_i + f(x_{i+1}, y_i + h y'_i)}{2}$

(3) Considerar el PVI

$$\frac{dy}{dx} = y - 4e^{-3x}, \qquad y(0) = 1$$

(a) Utilizar `mieuler.m` para calcular la aproximación a $y(x)$ con $h = 0{,}5$ y $n = 6$ pasos. Graficar utilizando `plot`. ¿Qué ocurre cuando x crece?

(b) Repetir el ítem anterior con $h = 0{,}2$ y $n = 15$, y luego con $h = 0{,}1$ y $n = 30$. ¿Cómo cambian las soluciones aproximadas cuando variamos h? ¿Se puede predecir el comportamiento a largo plazo de la solución?

(c) Utilizar `ode45` para encontrar una solución aproximada en el intervalo $[0, 3]$. Ahora, ¿qué parece ocurrir cuando x crece? A continuación graficar la solución dada por `ode45` en un intervalo más largo (que vaya al menos hasta $x = 20$). Nuevamente, ¿qué ocurre cuando x crece?

(d) Resolver el PVI exactamente y comparar la solución exacta con las aproximaciones encontradas en los puntos anteriores. Teniendo en cuenta lo discutido sobre estabilidad, explicar los resultados de (a)–(c).

Proyecto MATLAB 1

Fecha de entrega: Jueves 10/4

Modo de entrega: Por *e-mail* a `pmorin@math.unl.edu.ar`, el *Asunto* del email debe ser: `EDO - PM 1`

En el email se debe incluir como attachment un archivo `.m` que responda a todos los puntos del Problema **(3)** de esta misma práctica. Para evaluarlo, el profesor ejecutará el attachment desde MATLAB y el mismo deberá ir haciendo los cálculos necesarios e informar a modo de observaciones lo que se pide en cada uno de los ítems. Le serán de gran utilidad las instrucciones `echo` y `pause`.

El trabajo debe ser **individual**. Antes de la elaboración final se puede discutir en grupos, pero al momento de crear el archivo `.m` que será entregado, el trabajo debe ser individual.

A modo de ejemplo de cómo debe ser el proyecto que se debe presentar, en la página web de la materia se encuentra el *script* `sencos.m` que muestra los gráficos de las funciones seno y coseno y describe algunas de sus propiedades.