Ecuaciones Diferenciales Ordinarias
1er semestre 2003

Práctica 5

Primero intente resolver cada problema sin ayuda. Si luego de un rato no se le ocurre nada, lea la ayuda (en la próxima página). Si aún así no sabe como seguir, pase al siguiente problema. Si no pudo resolver un problema no se preocupe, los discutiremos en clase, y además sepa que puede utilizar el resultado de un problema para resolver los que siguen.

(1) Demostrar la siguiente generalización de la desigualdad de Gronwall:

> Sean φ, ψ, y χ funciones continuas a valores reales en un intervalo real $I := [a, b]$. Sea $\chi(t) > 0$, para todo $t \in I$, y supongamos que
> $$\varphi(t) \leq \psi(t) + \int_a^t \chi(s)\varphi(s)\, ds \qquad \forall t \in I.$$
> Probar que
> $$\varphi(t) \leq \psi(t) + \int_a^t \chi(s)\psi(s)e^{\int_s^t \chi(u)\, du}\, ds \qquad \forall t \in I.$$

(2) Sea f una función continua en el rectángulo $R := \{a \leq t \leq b; c \leq x \leq d\}$. Sea φ una solución de la ecuación diferencial $x' = f(t, x)$ en un intervalo $I \subset [a, b]$. Por información extra que se posee sobre el problema, se sabe que si φ existiese en todo el intervalo $[a, b]$ entonces debería cumplirse $c \leq \varphi(t) \leq d$ para todo $t \in [a, b]$. En otras palabras, si φ existiera en todo $[a, b]$ entonces $(t, \varphi(t)) \in R$ para todo $t \in [a, b]$.[1] Probar que entonces φ puede extenderse a todo $[a, b]$.

(3) Probar que el resultado del problema anterior puede generalizarse a regiones R de la forma
$$R = \{(t, x) : a \leq t \leq b,\ g(t) \leq x \leq h(t)\},$$
donde g y h son funciones dadas.

(4) Demostrar el siguiente resultado:

> Sea D un abierto en el plano t-x, y supongamos que $f \in (C, \mathrm{Lip})$ en D. Sea ψ una solución de (PVI) en el intervalo $[a, b]$. Es decir, $(t, \psi(t)) \in D$ para todo $t \in [a, b]$,
> $$\psi'(t) = f(t, \psi(t)), \qquad \forall t \in (a, b), \qquad \text{y } \psi(\tau) = \xi.$$
> Entonces existe $\delta > 0$ tal que si $\tilde{\xi}$ satisface $|\xi - \tilde{\xi}| < \delta$, entonces la solución φ que pasa por $(\tau, \tilde{\xi})$ existe en todo el intervalo $[a, b]$.

(5) Demostrar el siguiente resultado:

> Sea D un abierto convexo en el plano t-x, y supongamos que $f \in (C, \mathrm{Lip})$ en D. Sean φ_1 y φ_2 dos soluciones de la ecuación diferencial $x' = f(t, x)$ que satisfacen las condiciones iniciales
> $$\varphi_1(\tau) = \xi_1 \qquad \varphi_2(\tau) = \xi_2.$$
> Supongamos que ambas soluciones existen en un intervalo $[a, b]$. Demostrar que para todo ξ entre ξ_1 y ξ_2 la solución al (PVI)
> $$x' = f(t, x) \qquad x(\tau) = \xi$$
> tiene solución en todo el intervalo $[a, b]$.

[1]Este tipo de resultados se conocen como resultados *a priori*. Porque suponiendo que la solución exista, se prueban propiedades de la misma.

Ayudas

(1) Definir $R(t) = \int_a^t \chi(s)\varphi(s)\, ds$ y mostrar que $R' - \chi R \leq \chi\psi$.

(2) Realizar un razonamiento similar al que se propuso para el problema propuesto en clase

(3) Ídem ejercicio anterior.

(4) Mirar las ecuaciones integrales que satisfacen ψ y φ. Tomar la diferencia y ver que si k es la constante Lipschitz de f, entonces

$$|\psi(t) - \varphi(t)| \leq |\xi - \tilde{\xi}| + \int_\tau^t k|\psi(s) - \varphi(s)|\, ds$$

para todo t donde φ exista. Ver utilizando Gronwall que

$$|\psi(t) - \varphi(t)| \leq |\xi - \tilde{\xi}| e^{k(b-a)}.$$

Por otro lado, ver que existe $\delta_1 > 0$ tal que la región $R := \{(t, x) : t \in [a, b],\ \psi(t) - \delta_1 \leq x \leq \psi(t) + \delta_1\}$ esté contenida en D.

A continuación elegir δ de tal modo que si $|\xi - \tilde{\xi}| < \delta$, entonces $(t, \varphi(t))$ esté en R.

Finalizar aplicando el resultado del ejercicio anterior.

(5) Identificar una región R apropiada y aplicar el resultado del ejercicio (3).