Ecuaciones Diferenciales Ordinarias
1er semestre 2003

Práctica 6

(1) Determinar si los siguientes pares de funciones son linealmente independientes en $\mathbb{R}$:

(a) $f(x) = \pi, \quad g(x) = \cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x$
(b) $f(x) = x^3, \quad g(x) = x^2|x|$
(c) $f(x) = e^x \operatorname{sen} x, \quad g(x) = e^x \cos x$
(d) $f(x) = 2\cos x + 3\operatorname{sen} x, \quad g(x) = 3\cos x - 2\operatorname{sen} x$

(2) Mostrar que $y_1 = x^2$ e $y_2 = x^3$ son dos soluciones diferentes de $x^2y''-4xy'+6y = 0$, ambas satisfaciendo las condiciones iniciales $y(0) = y'(0) = 0$. Explicar por qué no se contradice el teorema de existencia y unicidad.

(3) (a) Mostrar que $y_1 = x^3$ e $y_2 = |x|^3$ son soluciones linealmente independientes en $\mathbb{R}$ de la ecuación $x^2y'' - 3xy' + 3y = 0$.

(b) Verificar que $W(y_1, y_2)$ es idénticamente cero. ¿Por qué no se contradice el teorema 3 de la sección 2.1 de [EP]?

(4) Mostrar que $y_1 = \operatorname{sen} x^2$ e $y_2 = \cos x^2$ son funciones linealmente independientes pero su Wronskiano se anula en $x = 0$. Utilizar este hecho para demostrar que no existe ninguna ecuación diferencial de la forma $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$ con p y q continuas en $\mathbb{R}$ tal que y_1 e y_2 son soluciones.

(5) Demostrar directamente que las funciones dadas en cada ítem son linealmente dependientes, es decir, encontrar una combinación lineal no trivial de las mismas que se anule en todo $\mathbb{R}$:

(a) $f(x) = 5, \quad g(x) = 2 - 3x^2, \quad h(x) = 10 + 15x^2$
(b) $f(x) = 0, \quad g(x) = \operatorname{sen} x, \quad h(x) = e^x$
(c) $f(x) = 17, \quad g(x) = \cos^2 x, \quad h(x) = \cos 2x$
(d) $f(x) = e^x, \quad g(x) = \cosh x, \quad h(x) = \operatorname{senh} x$

(6) Utilizar el Wronskiano para probar que las funciones dadas son linealmente independientes en $\mathbb{R}$

(a) $f(x) = 1, \quad g(x) = x, \quad h(x) = x^2$
(b) $f(x) = e^x, \quad g(x) = \cos x, \quad h(x) = \operatorname{sen} x$
(c) $f(x) = x, \quad g(x) = xe^x, \quad h(x) = x^2e^x$

(7) Probar que para todo entero positivo n, las funciones

$$f_0(x) \equiv 1, \quad f_1(x) = x, \quad f_2(x) = x^2, \quad \ldots \quad f_n(x) = x^n$$

son linealmente independientes. Para ello, suponer que $c_0 + c_1x + \cdots + c_nx^n = 0$, y derivar tantas veces como sea necesario para concluir que necesariamente $c_0 = c_1 = \cdots = c_n = 0$.

(8) Utilizar el resultado del problema anterior para demostrar que para cualquier constante r, las funciones

$$f_0(x) = e^{rx}, \quad f_1(x) = xe^{rx}, \quad f_2(x) = x^2e^{rx}, \quad \ldots \quad f_n(x) = x^ne^{rx}$$

son linealmente independientes en $\mathbb{R}$.

(9) Supongamos que las funciones $p_1, p_2, \ldots, p_n$ y f son continuas en el intervalo abierto I. Demostrar que la ecuación lineal homogénea de orden n

$$y^{(n)} + p_1 y^{(n-1)} + \cdots + p_{n-1} y' + p_n y = 0$$

tiene n soluciones linealmente independientes.

(10) Sean $r_1, r_2, \ldots, r_n$ números reales distintos. Mostrar que

$$W(e^{r_1 x}, e^{r_2 x}, \ldots, e^{r_n x}) = e^{(r_1 + r_2 + \cdots + r_n)x} \cdot \det \begin{bmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ r_1 & r_2 & \ldots & r_n \\ r_1^2 & r_2^2 & \ldots & r_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ r_1^{n-1} & r_2^{n-2} & \ldots & r_n^{n-1} \end{bmatrix}.$$

Concluir que las funciones $f_i(x) = e^{r_i x}$ son linealmente independientes.

(11) Encontrar una solución general de cada una de las ecuaciones diferenciales siguientes:

(a) $y'' - 4y = 0$
(b) $y'' + 3y' - 10y = 0$
(c) $y'' + 6y' + 9y = 0$
(d) $4y'' - 12y' + 9y = 0$
(e) $y^{(4)} - 3y^{(3)} + 3y'' - y' = 0$
(f) $y^{(4)} + 2y^{(3)} + 3y'' + 2y' + y = 0$ (sugerencia: calcular $(r^2 + r + 1)^2$)

(12) Resolver cada uno de los siguientes PVI

(a) $y'' - 4y' + 3y = 0; \qquad y(0) = 7, \quad y'(0) = 11$
(b) $2y^{(3)} - 3y'' - 2y' = 0; \qquad y(0) = 1, \quad y'(0) = -1, \quad y''(0) = 3$
(c) $y^{(3)} + 10y'' + 25y' = 0; \qquad y(0) = 3, \quad y'(0) = 4, \quad y''(0) = 5$

(13) Para cada una de las siguientes ecuaciones se provee una solución. Encontrar la solución general

(a) $3y^{(3)} - 2y'' + 12y' - 8y = 0; \qquad y = e^{2x/3}$
(b) $6y^{(4)} + 5y^{(3)} + 25y'' + 20y' + 4y = 0; \qquad y = \cos 2x$
(c) $9y^{(3)} + 11y'' + 4y' - 14y = 0; \qquad y = e^{-x} \operatorname{sen} x$

(14) Resolver el PVI

$$y^{(3)} = y; \qquad y(0) = 1, \quad y'(0) = y''(0) = 0.$$

(15) La ecuación diferencial

$$y'' + (\operatorname{sgn} x) y = 0$$

tiene como función coeficiente a

$$\operatorname{sgn} x = \begin{cases} +1 & \text{si } x > 0 \\ -1 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Demostrar que igualmente tiene dos soluciones linealmente independientes $y_1(x)$, $y_2(x)$ definidas para todo $x \in \mathbb{R}$ tales que

- Cada solución satisface la ecuación en $\mathbb{R} - \{0\}$
- Cada solución tiene derivada continua en $x = 0$
- $y_1(0) = y_2'(0) = 1$ e $y_2(0) = y_1'(0) = 0$.

(Nota: cada solución estará definida por una fórmula para $x \leq 0$ y por otra para $x \geq 0$)

(16) Encontrar una solución particular de cada una de las siguientes ecuaciones

(a) $y'' + 16y = e^{3x}$
(b) $y'' + y' + y = \sin^2 x$
(c) $y'' + 9y = 2\cos 3x + 3\sin 3x$
(d) $y^{(5)} + 5y^{(4)} - y = 17$
(e) $y^{(3)} - y = e^x + 7$

(17) Resolver los siguientes PVI

(a) $y'' + 4y = 2x; \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 2$
(b) $y'' + y = \cos x; \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = -1$
(c) $y^{(3)} - 2y'' + y' = 1 + xe^x; \quad y(0) = y'(0) = 0, \quad y''(0) = 1$
(d) $y^{(4)} - y = 5; \quad y(0) = y'(0) = y''(0) = y^{(3)}(0) = 0$

(18) Sea $Ly = f(x)$ una ecuación lineal homogénea con coeficientes constantes. Si M es un operador diferencial con coeficientes constantes tal que $M[f(x)] = 0$, entonces toda solución de $Ly = f(x)$ satisface la ecuación homogénea $MLy = 0$. Para cada una de las ecuaciones siguientes encontrar una solución particular de $Ly = f(x)$, resolviendo el problema homogéneo $MLy = 0$.

(a) $y'' - 5y' = x^2; \quad M = D^3$
(b) $y'' - 5y' = e^{5x}; \quad M = D - 5$
(c) $y^{(4)} + 8y'' + 16y = \operatorname{sen} 2x; \quad M = D^2 + 4$

(19) En cada uno de los items siguientes se da una ecuación y una solución y_1. Sustituir $y_2 = vy_1$ en la ecuación para encontrar una segunda solución linealmente independiente.

(a) $x^2y'' + 3xy' + y = 0; \quad y_1 = 1/x$
(b) $4x^2y'' + y = 0; \quad y_1 = \sqrt{x}$
(c) $(x^2 + 1)y'' - 2xy' + 2y = 0; \quad y_1 = x$
(d) $(x + x^2)y'' - (2x + 1)y' + 2y = 0; \quad y_1 = x^2$
(e) $(x^4 - x^2)y'' - (3x^3 - x)y' + 8y = 0; \quad y_1 = x^4$

(20) Notar que $y_1 = x$ es una solución de la ecuación de Legendre de orden 1,

$$(1 - x^2)y'' - 2xy' + 2y = 0,$$

y utilizar el método de reducción de orden para encontrar la segunda solución,

$$y_2 = 1 - \frac{x}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}$$

para $-1 < x < 1$.

(21) Verificar que $y_1 = x^{-1/2}\cos x$ es una solución de la ecuación de Bessel de orden $\frac{1}{2}$,

$$x^2y'' + xy' + (x^2 - \frac{1}{4})y = 0, \qquad (x > 0),$$

y derivar la segunda solución $y_2 = x^{-1/2}\operatorname{sen} x$.

(22) Encontrar soluciones generales de las ecuaciones de Euler-Cauchy siguientes:

(a) $x^2y'' + xy' = 0$

(b) $4x^2y'' + 8xy' - 3y = 0$

(c) $2x^2y'' + 5y = 0$

(23) Utilizar la sustitución $x = e^t$ para hallar las soluciones generales de las ecuaciones de Euler-Cauchy siguientes

(a) $x^3y^{(3)} + 6x^2y'' + 4xy' = 0$

(b) $x^3y^{(3)} - 2xy' + 2y = 0$

(c) $x^3y^{(3)} + 2x^2y'' - 4y = 0$

(24) Encontrar soluciones generales de las ecuaciones de segundo orden reducibles siguientes

(a) $yy'' + (y')^2 = 0$ (suponer y e y' positivas)

(b) $y'' = (y')^2$ (suponer y e y' positivas)

(c) $yy'' + (y')^2 = yy'$ (suponer y e y' positivas)

(d) $y'' = (x + y')^2$

(e) $y^3y'' = 1$

(25) En geometría de curvas planas se ve que la curvatura κ de la curva $y = y(x)$ en el punto (x, y) está dada por

$$\kappa = \frac{|y''(x)|}{(1 + [y'(x)]^2)^{3/2}}$$

y la curvatura de un círculo de radio R es $\kappa = 1/R$. Recíprocamente, sustituir $p = y'$ para derivar la solución general de la ecuación

$$R\,y'' = [1 + (y')^2]^{3/2} \qquad \text{(con } R \text{ constante)}$$

de la forma

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2.$$

Por lo tanto, las únicas curvas con curvatura constante R son los círculos de radio R (o partes).

(26) Utilizar el método de variación de parámetros para encontrar soluciones particulares de las ecuaciones siguientes:

(a) $y'' + 4y = \operatorname{sen}^2 x$

(b) $4x^2y'' - 4xy' + 3y = 8x^{4/3}$

(c) $4x^2y'' + xy' + y = \ln x$

(d) $y^{(3)} + 4y' = \cot 2x$

(27) Encontrar una solución particular de la ecuación

$$x^3y^{(3)} + 5x^2y'' + 2xy' - 2y = x^4,$$

sabiendo que la solución general del problema homogéneo es $y_c = c_1x + c_2/x + c_3/x^2$.

(28) Demostrar que la solución del PVI

$$y'' + y = f(x), \qquad y(a) = y'(a) = 0$$

está dada por $y(x) = \int_a^x f(t)\operatorname{sen}(x - t)\,dt$.