Práctica 8 *Ecuaciones Diferenciales Ordinarias*
1er semestre 2003

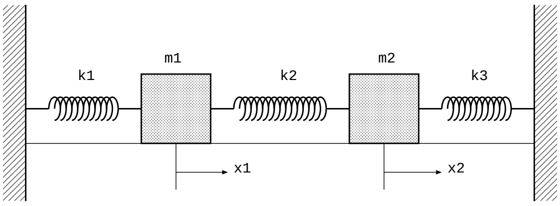
(1) Transformar la ecuación diferencial o sistema dado en un sistema equivalente de primer orden.

(a) $x'' + 3x' + 7x = t^2$

(b) $x''' = (x')^2 + \cos x$

(c) $x'' = \dfrac{-kx}{(x^2+y^2)^{3/2}}, \qquad y'' = \dfrac{-ky}{(x^2+y^2)^{3/2}}.$

(2) Derivar las ecuaciones



$$m_1 x_1'' = -(k_1 + k_2)x_1 + k_2 x_2,$$
$$m_2 x_2'' = k_2 x_1 - (k_2 + k_3)x_2$$

para los desplazamientos de las dos masas que se muestran en la figura.

(3) Encontrar soluciones generales de los siguientes sistemas lineales utilizando el método de eliminación. Si se dan condiciones iniciales, hallar la solución que las satisface.

(a) $x' = -x + 3y, \quad y' = 2y$

(b) $x' = -3x + 2y, \quad y' = -3x + 4y; \qquad x(0) = 0, \quad y(0) = 2$

(c) $x' = x + 9y, \quad y' = -2x - 5y; \qquad x(0) = 3, \quad y(0) = 2$

(d) $x'' = 6x + 2y, \quad y'' = 3x + 7y$

(e) $x'' = -4x + \operatorname{sen} t, \quad y'' = 4x - 8y$

(4) Supongamos que la concentración inicial ($t = 0$) de sal en cada uno de los dos tanques de salmuera del ejemplo dado en clase (ejemplo 2 de la Sección 5.1 de [EP]) es de 0,5 lb/gal. Resolver el sistema para encontrar la cantidad $x(t)$ e $y(t)$ de sal en los dos tanques en tiempo t.

(5) Escribir el sistema dado en la forma $\boldsymbol{x}' = \boldsymbol{P}(t)\boldsymbol{x} + \boldsymbol{f}(t)$; identificar $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{P}(t)$ y $\boldsymbol{f}(t)$.

(a) $x' = 3x - 2y, \quad y' = 2x + y$

(b) $x' = tx + e^t y + \cos t, \quad y' = e^{-t}x + t^2 y - \operatorname{sen} t$

(c) $x' = tx - y + e^t z, \quad y' = 2x + t^2 y - z, \quad z' = e^{-t}x + 3ty + t^3 z$

(6) Verificar que los vectores dados son soluciones del sistema dado y utilizar el Wronskiano para demostrar que son linealmente independiente. Luego escribir la solución general del sistema.

$$\boldsymbol{x}' = \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ -3 & 4 \end{bmatrix} \boldsymbol{x}; \qquad \boldsymbol{x}_1 = \begin{bmatrix} e^{3t} \\ 3e^{3t} \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{x}_2 = \begin{bmatrix} 2e^{-2t} \\ e^{-2t} \end{bmatrix}$$

(7) Hallar la solución particular del sistema del problema anterior que satisface $x_1(0) = 0$, $x_2(0) = 5$.

(8) (a) Mostrar que las funciones vectoriales

$$\boldsymbol{x}_1 = \begin{bmatrix} t \\ t^2 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \boldsymbol{x}_2 = \begin{bmatrix} t^2 \\ t^3 \end{bmatrix}$$

son linealmente independientes en la recta real.

(b) ¿Por qué puede asegurarse que no existe ninguna matriz continua $\boldsymbol{P}(t)$ tal que $\boldsymbol{x}_1$ y $\boldsymbol{x}_2$ son ambas soluciones de $\boldsymbol{x}' = \boldsymbol{P}(t)\boldsymbol{x}$?

(9) Sean $\boldsymbol{x}_1(t), \boldsymbol{x}_2(t), \dots, \boldsymbol{x}_n(t)$ funciones vectoriales cuyas componentes i-ésima (para algún i fijo) $x_{i1}(t), x_{i2}(t), \dots, x_{in}(t)$ son linealmente independientes como funciones escalares. Concluir que las funciones vectoriales son linealmente independientes.

(10) Aplicar el método de los valores propios (autovalores) para hallar una solución general del sistema dado. Si se dan valores iniciales, hallar la solución particular correspondiente.

(a) $x_1' = x_2 + 2x_2, \quad x_2' = 2x_1 + x_2$

(b) $x_1' = 3x_1 + 4x_2, \quad x_2' = 3x_2 + 2x_2, \qquad x_1(0) = x_2(0) = 1$

(c) $x_1' = 9x_1 + 5x_2, \quad x_2' = -6x_1 - 2x_2, \qquad x_1(0) = 1, \quad x_2(0) = 0$

(11) En cada uno de los sistemas siguientes, los autovalores de la matriz de coeficientes son completos y pueden encontrarse fácilmente. Aplicar el método de los autovalores para hallar una solución general de cada sistema.

(a) $x_1' = 4x_1 + x_2 + 4x_3, \quad x_2' = x_1 + 7x_2 + x_3, \quad x_3' = 4x_1 + x_2 + 4x_3$

(b) $x_1' = 3x_1 + x_2 + x_3, \quad x_2' = -5x_1 - 3x_2 - x_3, \quad x_3' = 5x_1 + 5x_2 + 3x_3$

(12) Resolver el sistema de dos masas con dos resortes visto en clase. El modelo resuulta en el sistema de ecuaciones

$$m_1 x_1'' = -k_1 x_1 + k_2(x_2 - x_1), \qquad m_2 x_2'' = -k_2(x_2 - x_1).$$

(a) Resolverlo para $m_1 = 2$, $m_2 = 1$, $k_1 = 4$, $k_2 = 2$

(b) Resolverlo para $m_1 = 2$, $m_2 = 0{,}5$, $k_1 = 75$, $k_2 = 25$.

(13) Mostrar que la matriz de coeficientes del sistema

$$x_1' = 2x_1 + 3x_2 + 3x_3, \qquad x_2' = -x_2 - 3x_3, \qquad x_3' = 2x_3$$

tiene el autovalor $\lambda = 2$ con multiplicidad 2. Encontrar dos autovectores linealmente independientes asociados con $\lambda = 2$, y luego hallar la solución general del sistema.

(14) Considerar el sistema

$$x_1' = 3x_1 + x_2, \qquad x_2' = -x_1 - x_3, \qquad x_3' = x_1 + 2x_2 + 3x_3$$

(a) Mostrar que la matriz de coeficientes $\boldsymbol{A}$ tiene al autovalor $\lambda = 2$ con multiplicidad 3, pero con sólo un autovector linealmente independiente $\boldsymbol{u}$ asociado con él. Luego una solución es $\boldsymbol{x}_1(t) = \boldsymbol{u}e^{2t}$.

(b) Encontrar una segunda solución de la forma $\boldsymbol{x}_2(t) = \boldsymbol{u}te^{2t} + \boldsymbol{v}e^{2t}$

(c) Encontrar una tercera solución de la forma $\boldsymbol{x}_3(t) = \frac{1}{2}\boldsymbol{u}t^2e^{2t} + \boldsymbol{v}te^{2t} + \boldsymbol{w}e^{2t}$.

(15) Aplicar el método de los coeficientes indeterminados para hallar soluciones particulares de los siguientes sistemas. Si se dan condiciones iniciales hallar la solución que las satisface.

(a) $x' = x + 2y + 3, \quad y' = 2x + y - 2$

(b) $x' = 4x + y + e^t, \quad y' = 6x - y - e^t; \qquad x(0) = y(0) = 1$

(c) $x' = x - 5y + 2\operatorname{sen} t, \quad y' = x - y - 3\cos t$

(d) $x' = 2x + y + 2e^t, \quad y' = x + 2y - 3e^t$

(16) Para cada uno de los sistemas siguientes, hallar una matriz fundamental.

(a) $\boldsymbol{x}' = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \boldsymbol{x}$

(b) $\boldsymbol{x}' = \begin{bmatrix} 2 & -5 \\ 4 & -2 \end{bmatrix} \boldsymbol{x}$

(c) $\boldsymbol{x}' = \begin{bmatrix} 6 & -7 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \boldsymbol{x}$

(17) Aplicar el método de variación de parámetros para hallar una solución particular del sistema dado.

(a) $\boldsymbol{x}' = \begin{bmatrix} 6 & -7 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \boldsymbol{x} + \begin{bmatrix} 2t \\ 3 \end{bmatrix}$

(b) $\boldsymbol{x}' = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 9 & -3 \end{bmatrix} \boldsymbol{x} + \begin{bmatrix} 1/t^2 \\ 1/t^3 \end{bmatrix}$

(c) $\boldsymbol{x}' = \begin{bmatrix} 3 & -5 \\ 5 & -3 \end{bmatrix} \boldsymbol{x} + \begin{bmatrix} \cos 4t \\ \operatorname{sen} 4t \end{bmatrix}$

(d) $\boldsymbol{x}' = \begin{bmatrix} 2 & -4 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \boldsymbol{x} + \begin{bmatrix} \ln t \\ t \end{bmatrix}$

(18) Calcular la matrix fundamental $\boldsymbol{\Phi}(t) = e^{\boldsymbol{A}t}$ para cada sistema dado

(a) $x_1' = 5x_1 - 4x_2, \quad x_2' = 2x_1 - x_2$

(b) $x_1' = 5x_1 - 3x_2, \quad x_2' = 2x_1$

(c) $x_1' = 10x_1 - 6x_2, \quad x_2' = 12x_1 - 7x_2$

(d) $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

(e) $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

(19) Supongamos que las matrices $\boldsymbol{A}$ y $\boldsymbol{B}$ conmutan, es decir, $\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{BA}$. Demostrar que $e^{\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}} = e^{\boldsymbol{A}}e^{\boldsymbol{B}}$. Sugerencia: agrupar los términos en el producto de las dos series de la derecha para obtener la serie de la izquierda.

(20) Deducir a partir del problema anterior que para toda matriz cuadrada $\boldsymbol{A}$, la matriz $e^{\boldsymbol{A}}$ es no-singular y además $(e^{\boldsymbol{A}})^{-1} = e^{-\boldsymbol{A}}$

(21) Sea $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$. Mostrar que $\boldsymbol{A}^{2n} = \boldsymbol{I}$ mientras que $\boldsymbol{A}^{2n+1} = \boldsymbol{A}$. Concluir que $e^{\boldsymbol{A}t} = \boldsymbol{I}\cosh t + \boldsymbol{A}\operatorname{senh} t$ y aplicar este hecho para hallar una solución general de $\boldsymbol{x}' = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$.

(22) Sea $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}$. Mostrar que $e^{\boldsymbol{A}t} = \boldsymbol{I}\cos 2t + \frac{1}{2}\boldsymbol{A}\operatorname{sen} 2t$. Aplicar este resultado para hallar una solución general de $\boldsymbol{x}' = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$.