(1) Para cada uno de los siguientes problemas determinar el tipo de punto crítico (singularidad) que es el $(0,0)$. Decir si es asintóticamente estable, estable o inestable.

(a) $x' = -2x + y, \quad y' = x - 2y$
(b) $x' = 4x - y, \quad y' = 2x + y$
(c) $x' = 3x + y, \quad y' = 5x - y$
(d) $x' = 5x - 3y, \quad y' = 3x - y$
(e) $x' = x - 3y, \quad y' = 6x - 5y$
(f) $x' = x - 2y, \quad y' = 5x - y$

(2) Cada uno de los siguientes problemas tiene un punto crítico aislado (x_0, y_0). Clasificarlos con respecto a tipo y estabilidad. Comenzar haciendo la sustitución $u = x - x_0$, $v = y - y_0$ para transformar el sistema a un sistema con la singularidad en el origen.

(a) $x' = x - 2y, \quad y' = 3x - 4y - 2$
(b) $x' = x + y - 7, \quad y' = 3x - y - 5$
(c) $x' = 4x - 5y + 3, \quad y' = 5x - 4y + 6$

(3) Para cada uno de los problemas siguientes investigar el tipo y estabilidad de la singularidad $(0,0)$

(a) $x' = x - 3y + 2xy, \quad y' = 4x - 6y - xy$
(b) $x' = x + 4y - xy^2, \quad y' = 2x - y - x^2y$
(c) $x' = x - 2y + 3xy, \quad y' = 2x - 3y - x^2 - y^2$
(d) $x' = 3x - y + x^3 + y^3, \quad y' = 13x - 3y + 3xy$

(4) Para cada uno de los sistemas siguientes, encontrar todos los puntos críticos e investigar el tipo y la estabilidad de cada uno.

(a) $x' = x - y, \quad y' = x^2 - y$
(b) $x' = y - 1, \quad y' = x^2 - y$
(c) $x' = y^2 - 1, \quad y' = x^3 - y$
(d) $x' = xy - 2, \quad y' = x - 2y$
(e) $x' = y, \quad y' = -\operatorname{sen} x$ (péndulo)

(5) Considerar el sistema lineal

$$x' = hx - 4y \qquad y' = x + hy.$$

(a) Mostrar que el origen es un centro si $h = 0$.
(b) Mostrar que el origen es un punto espiral inestable si $h > 0$.
(c) Mostrar que el origen es una espiral asintóticamente estable si $h < 0$.

Conclusión: perturbaciones pequeñas al sistema pueden cambiar el *tipo* y la *estabilidad* de la singularidad para este problema.

(6) Considerar el sistema lineal

$$x' = -x + hy \qquad y' = x - y.$$

(a) Mostrar que el origen es asintóticamente estable si $h = 0$.
(b) Mostrar que el origen es un punto espiral asintóticamente estable si $h < 0$.
(c) Mostrar que el origen es un nodo asintóticamente estable si $0 < h < 1$.

Conclusión: perturbaciones pequeñas al sistema pueden cambiar el *tipo* de singularidad, pero no su *estabilidad*, para este problema.

(7) Considerar el sistema no-lineal

$$x' = y + hx(x^2 + y^2), \qquad y' = -x + hy(x^2 + y^2).$$

En este problema veremos que el teorema visto en clase no provee ninguna información acerca de la singularidad si ésta no es *simple*.

(a) Mostrar que el origen es un centro del sistema lineal que se obtiene tomando $h = 0$.

(b) Supongamos $h \neq 0$. Sea $r = \sqrt{x^2 + y^2}$. Mostrar que $\dfrac{dr}{dt} = hr^3$.

(c) Sea $h = -1$. Resolver la ecuación del ítem anterior en $r(t)$ y mostrar que $r(t) \to 0$ cuando $t \to \infty$.

(d) Sea $h = +1$. Mostrar que $r(t) \to +\infty$ cuando $t \to \infty$.

(e) Conclusión: A pesar de estar considerando dos problemas no-lineales con la misma parte lineal, la estabilidad de la singularidad ubicada en el origen puede ser estable o inestable, dependiendo de la parte puramente no-lineal. Explicar por qué no se contradice el teorema visto en clase.

(8) En el caso de un sistema bi-dimensional que no es *casi-lineal*[1] las trayectorias cerca de una singularidad aislada pueden exhibir una estructura considerablemente más complicada que aquellas cerca de los nodos, centros, puntos de ensilladura, y puntos espirales discutidos en clase. Por ejemplo, considerar el sistema

$$x' = x(x^3 - 2y^3), \qquad y' = y(2x^3 - y^3) \tag{1}$$

que tiene al origen como singularidad aislada.

(a) Ver que el origen no es una singularidad *simple*.

(b) Resolver la ecuación homogénea de primer orden

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y(2x^3 - y^3)}{x(x^3 - 2y^3)}$$

para mostrar que las trayectorias del sistema 1 son las curvas definidas implícitamente por

$$x^3 + y^3 = 3cxy$$

con c una constante arbitraria.

(c) Graficar algunas trayectorias y determinar la orientación. Determinar el comportamiento en cada cuadrante.

[1] Casi-lineal quiere decir que existen ϵ_1 y ϵ_2 tales que

$$P(x, y) = ax + by + \epsilon_1(x, y) \qquad \text{y} \qquad Q(x, y) = cx + dy + \epsilon_2(x, y)$$

con $\epsilon_i(x, y) \to 0$ cuando $r \to 0$.