---

(1) Demostrar que si f es integrable sobre compactos de $\mathbb{R}$ y continua en x_0, entonces

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{1}{2h}\int_{x_0-h}^{x_0+h} f(x)\,dx = f(x_0).$$

---

(2) Demostrar que si f es integrable sobre compactos de $\mathbb{R}$ y continua en $x = x_0$ e $\{I_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión de intervalos para la que existe una sucesión de números positivos $\{h_n\}_{n=1}^{\infty}$ tales que $I_n \subset [x_0 - h_n, x_0 + h_n]$ para $n = 1, 2, \ldots$ y $h_n \to 0$ cuando $n \to \infty$ entonces

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\text{longitud}(I_n)}\int_{I_n} f(x)\,dx = f(x_0).$$

---

(3) Demostrar que si f es una función integrable sobre compactos de $\mathbb{R}^3$ y continua en x_0, entonces

$$\frac{1}{|B(x_0,r)|}\iiint_{B(x_0,r)} f\,\text{dvol} \longrightarrow f(x_0) \quad \text{cuando } r \to 0.$$

---

(4) Sea f una función integrable sobre compactos de $\mathbb{R}^3$, continua en x_0. Demostrar que si $\{R_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión de conjuntos abiertos no-vacíos de $\mathbb{R}^3$ tales que $R_n \subset B(x_0, r_n)$ para $n = 1, 2, \ldots$ y $r_n \to 0$ cuando $n \to \infty$, entonces

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{|R_n|}\iiint_{R_n} f\,\text{dvol} = f(x_0).$$

---

(5) Sea f una función continua en $\mathbb{R}^3$. Si $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión de superficies (suficientemente suaves, donde esté definida la integral) de $\mathbb{R}^3$ tales que $S_n \subset B(x_0, r_n)$ para $n = 1, 2, \ldots$ y $r_n \to 0$ cuando $n \to \infty$, entonces

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{|S_n|}\iint_{S_n} f\,d\sigma = f(x_0).$$

Interesante: las superficies podrían ser bastante raras, y "grandes" de manera que $|S_n| \to \infty$ y aún así el límite ser $f(x_0)$.

---

(6) Dada una función $f \in L^2(\Omega)$, con Ω un subconjunto medible acotado de $\mathbb{R}^d$ ($d \in \mathbb{N}$), demostrar que el *valor medio de* f sobre Ω definido por $\overline{f} = \frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega f$ es el valorde t que minimiza la función $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $\phi(t) = \int_\Omega |f(x) - t|^2\,dx$.

---

(7) Calcular los siguientes límites para $f(x, y, z) = 2x + y - z^2$ (**NO calcular ninguna integral**).

(a) $\displaystyle\lim_{h\to 0} \frac{1}{h^3}\int_1^{1+h}\int_1^{1+h}\int_1^{1+h} f(x,y,z)\,dz\,dy\,dx$

(b) $\displaystyle\lim_{h\to 0} \frac{1}{h^3}\int_{1-h}^{1+h}\int_{1-h}^{1+h}\int_{1-h}^{1+h} f(x,y,z)\,dz\,dy\,dx$

(c) $\displaystyle\lim_{h\to 0} \frac{1}{h^2}\int_1^{1+h}\int_1^{1+h}\int_1^{1+h} f(x,y,z)\,dz\,dy\,dx$

(d) $\displaystyle\lim_{h\to 0} \frac{1}{h^3}\int_{2+h}^{2+2h}\int_{-1-h}^{-1+h}\int_0^{h} f(x,y,z)\,dz\,dy\,dx$

(e) $\displaystyle\lim_{h\to 0} \frac{1}{h^2}\int_{-1}^{-1+h}\int_4^{4+h} f(x,y,0)\,dy\,dx$

(f) $\displaystyle\lim_{h\to 0} \frac{1}{h^2} \int_{-1}^{-1+h} \int_{4}^{4+h} f(x,y,2)\, dy\, dx$

(g) $\displaystyle\lim_{r\to 0} \frac{1}{r^3} \iiint_{B\big((-1,0,1),r\big)} f\, d\mathrm{vol}$

(h) $\displaystyle\lim_{r\to 0} \frac{1}{r} \int_{C_r} f\, ds$, donde C_r denota la circunferencia de radio r y centro $(1,1,0)$ contenida en el plano xy.

---

(8) Sea Ω un conjunto abierto no vacío de $\mathbb{R}^d$ y sea f una función continua en Ω. Demostrar que si $\int_\Omega f\phi\, dx = 0$ para toda $\phi \in C_0^\infty(\Omega)$ entonces $f \equiv 0$ en Ω. ($C_0^\infty(\Omega)$ denota el espacio de las funciones infinitamente diferenciables en Ω que tienen soporte compacto en Ω).

---

(9) Sea Ω un conjunto abierto no vacío de $\mathbb{R}^d$ y sea f una función integrable sobre compactos de Ω. Demostrar que si $\int_\Omega f\phi\, dx = 0$ para toda $\phi \in C_0^\infty(\Omega)$ entonces $f = 0$ en casi todo punto de Ω.
