
(1) Sea f una función de clase C^1 en $\mathbb{R}^3$. Demostrar que

$$\lim_{(h_1, h_2, h_3) \rightarrow (0,0,0)} \frac{1}{h_2 h_3} \int_{x_3^0}^{x_3^0+h_3} \int_{x_2^0}^{x_2^0+h_2} \frac{f(x_1^0+h_1, x_2, x_3) - f(x_1^0, x_2, x_3)}{h_1} dx_2 dx_3 = \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1^0, x_2^0, x_3^0).$$

(2) Sea $f(\bar{r}) = \frac{1}{r}$ el potencial Newtoniano (Notación: $\bar{r} = x_1\bar{i} + x_2\bar{j} + x_3\bar{k}$ y $r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$).

(a) Calcular el gradiente de f .

(b) Calcular el laplaciano de f .

(3) Demostrar que el gradiente de cualquier función escalar φ que tiene derivadas de segundo orden continuas, es un campo vectorial irrotacional. Más precisamente, demostrar que

$$\bar{\nabla} \times \bar{\nabla} \varphi = \bar{0},$$

para cualquier función escalar φ con derivadas de segundo orden continuas.

(4) Sea $\bar{V}(\bar{r}) = -\frac{\bar{r}}{r^3}$.

(a) ¿Cuál es el flujo de $\bar{V}$ a través de una superficie cerrada suave a trozos que no deja encerrado al origen de coordenadas? (Nos referimos a cualquier superficie *suficientemente suave* sobre la que se podría aplicar el teorema de Gauss, como por ejemplo, C^1 a trozos, no piense en *fractales* o cosas raras).

(b) Calcular el flujo de $\bar{V}$ a través de la *superficie esférica* centrada en $\bar{0} = (0, 0, 0)$ y radio unitario.

(c) Calcular el flujo de $\bar{V}$ a través de la superficie esférica centrada en $\bar{0} = (0, 0, 0)$ y radio R ($R > 0$).

(d) Calcular el flujo de $\bar{V}$ a través de cualquier superficie cerrada que contenga a $\bar{0}$ en su interior. (Nuevamente, nos referimos a cualquier superficie *suficientemente suave* sobre la que se podría aplicar el teorema de Gauss, como por ejemplo, C^1 a trozos, no piense en *fractales* o cosas raras).

(5) Sea S una superficie cerrada y suave en el espacio, y sea n_i la i -ésima componente del vector normal exterior a S . Demostrar que entonces

$$\iint_S n_i d\sigma = 0.$$

(6) Sea S una superficie cerrada y suave en el espacio, sea $\bar{n}$ el vector normal exterior a S , y $\bar{r}$ el *vector posición* (o función identidad de $\mathbb{R}^3$). Demostrar que entonces

$$\frac{1}{3} \iint_S \bar{r} \cdot \bar{n} d\sigma = V,$$

donde V es el volumen de la región rodeada por S .

(7) Sea $\varphi(x_1, x_2, x_3) = \ln(x_1^2 + x_2^2)$. Determinar su dominio y el de su gradiente $\bar{V} = \bar{\nabla} \varphi$. ¿Es $\bar{V}$ conservativo? ¿Es incompresible? ¿Es φ armónico?

(8) Considerar las coordenadas esféricas y cilíndricas. Para cada caso:

- Describir $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, \mathcal{F}_3$;
- Calcular h_1, h_2, h_3 ;
- Calcular $d\sigma_{12}, d\sigma_{13}, d\sigma_{23}$, y $d\text{vol}$
- Describir los vectores normales $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \bar{a}_3$ en coordenadas esféricas y cilíndricas.

(9) Sea $\bar{V}(x_1, x_2, x_3) = \omega_0(-x_2 \bar{i} + x_1 \bar{j})$ con ω_0 una constante (velocidad angular). Sea

$$C_R = \{(R \cos t, R \sin t, 0) : t \in [0, 2\pi)\}, \quad R > 0.$$

(a) Calcular la circulación de $\bar{V}$ a lo largo de C_R .

(b) Calcular el rotor de $\bar{V}$

(c) Calcular directamente la integral de superficie $\iint_S \bar{\nabla} \times \bar{V} \cdot \bar{n} d\sigma$ sobre un hemisferio S con *ecuador* en la curva C_R y $\bar{n}$ con tercera coordenada positiva.

(d) Calcular la integral del ítem (c) usando el teorema de Stokes.

(10) Escribir gradiente, divergencia, rotor y Laplaciano en coordenadas esféricas y cilíndricas.

(11) Estudiar las soluciones de $\bar{\nabla}^2 \varphi = 0$ que sólo dependen de una de las coordenadas generalizadas q_i en coordenadas cartesianas, cilíndricas y esféricas.
