(1) Sea Ω un abierto de $\mathbb{R}^d$, y sea B una bola tal que su clausura está contenida en Ω . Demostrar que si $u : \Omega \times (0, T) \rightarrow \mathbb{R}$ es C^1 (todas las derivadas parciales de primer orden son continuas) entonces

$$\frac{d}{dt} \int_B u(x, t) dx = \int_B u_t(x, t) dx, \quad \forall t \in (0, T).$$

(2) Considerar una barra cilíndrica de longitud L alineada con el eje x , ocupando el intervalo $[0, L]$, suponer que su conductividad térmica y temperatura son constantes en los planos paralelos al plano yz . Llamemos $K(x)$ a la conductividad térmica a distancia x del extremo izquierdo y $u(x; t)$ a la temperatura a distancia x del extremo izquierdo. Supongamos que el área de la sección transversal de la barra cilíndrica es A . Determinar fórmulas para el flujo de calor *hacia fuera* de la barra en $x = 0$ y en $x = L$.

(3) Deducir la ley de enfriamiento de Newton para el caso unidimensional en los extremos $x = 0$ y $x = L$.

(4) Supongamos que se unen dos barras cilíndricas de la misma forma, pero diferente material en el plano $x = x_0$. Supongamos que la que ocupa el intervalo $[0, x_0]$ tiene conductividad térmica K_1 y la que ocupa el intervalo $[x_0, L]$ tiene conductividad térmica K_2 . Se dice que estas dos barras están en *contacto térmico perfecto* si la temperatura es continua en $x = x_0$:

$$u(x_0^-, t) = u(x_0^+, t)$$

y no se pierde nada de energía calórica en $x = x_0$ (es decir, la energía calórica que fluye hacia fuera de una barra fluye hacia adentro de la otra). ¿Qué ecuación matemática representa esta última condición en $x = x_0$?

(5) Considerar un baño conteniendo un volumen V de aceite, con calor específico c_f y densidad de masa ρ_f , en el que se sumerge un cuerpo de metal con calor específico c_m , densidad ρ_m y conductividad térmica K_m . Suponer que el baño se agita rápidamente de modo que la temperatura del baño es aproximadamente uniforme en todo el recipiente que lo contiene, y ésta es igual a la temperatura del cuerpo de metal en todo su contorno. Supongamos que el baño está térmicamente aislado excepto donde está en perfecto contacto térmico con el cuerpo de metal, donde puede enfriarse o calentarse dependiendo de la temperatura del mismo. El objetivo de este problema es determinar una ecuación para la temperatura del baño, que resultará a su vez una condición de borde para el cuerpo de metal. Para hacerlo seguiremos los siguientes pasos.

- (a) Llamemos $T(t)$ a la temperatura del aceite. Hallar una fórmula para la energía térmica total del aceite.
- (b) Hallar una fórmula para la razón de cambio de la energía térmica total del aceite.
- (c) Sea Ω la región que ocupa el cuerpo de metal, y sea $u(\bar{x}; t)$ la temperatura en el punto $\bar{x}$ del metal a tiempo t . Hallar una fórmula para el flujo de calor hacia fuera del cuerpo de metal.
- (d) Como la cantidad de calor que fluye hacia fuera del cuerpo de metal es la cantidad de calor que *ingresa* al fluido, igualando las fórmulas de los ítems (b) y (c) obtenemos una ecuación diferencial (ordinaria) para $T(t)$ que está acoplada con la ecuación del calor en el metal.
- (e) Escribir un sistema de ecuaciones diferenciales para $T(t)$ (la temperatura del aceite) y $u(\bar{x}; t)$ (la temperatura del metal).

(6) Sea $u(x, t)$ una solución de la ecuación del calor unidimensional $u_t = ku_{xx}$. Mostrar que se cumplen las siguientes proposiciones:

- (a) Si a , x_0 y t_0 son constantes, entonces la función $v(y, s) = u(ay - x_0, a^2s - t_0)$ también satisface $v_s = kv_{yy}$.
- (b) Para cualquier constante k' , la función $v(y, s) = u(y, \frac{k'}{k}s)$ satisface la ecuación $v_s = k'v_{yy}$.
- (c) La función $v(y, s) = \frac{1}{\sqrt{s}} e^{-\frac{y^2}{4ks}} u\left(\frac{y}{s}, -\frac{1}{s}\right)$ satisface $v_s = kv_{yy}$.