**Trabajo Práctico 7** *Ecuaciones en Derivadas Parciales*

---

**(1)** Hallar *todos* los autovalores $\lambda_n$ y autofunciones correspondientes del problema

$$y''(x) + \lambda y(x) = 0, \quad 0 \le x \le 1, \qquad y(0) = 0, \quad y(1) + y'(1) = 0.$$

---

**(2)** Hallar *todos* los autovalores $\lambda_n$ y autofunciones correspondientes del problema

$$\begin{aligned} y''(x) + \lambda y(x) &= 0, \qquad 0 \le x \le \pi, \\ y(0) - y'(0) &= 0, \\ y(\pi) - y'(\pi) &= 0. \end{aligned}$$

---

**(3)** Mostrar que todo número real $\lambda$ es un autovalor del problema

$$\begin{aligned} y''(x) + \lambda y(x) &= 0, \qquad 0 \le x \le 1, \\ y(0) - y(1) &= 0, \\ y'(0) + y'(1) &= 0. \end{aligned}$$

¿Por qué este ejemplo no contradice el Teorema 2 de la Sección 4.4 del libro de Bleecker-Csordas?

---

**(4)** Demostrar que si $y_1, y_2$ cumplen las condiciones de borde

$$\begin{aligned} c_1\, y(a) + c_2\, y'(a) &= 0 \qquad c_1^2 + c_2^2 \neq 0 \\ c_3\, y(b) + c_4\, y'(b) &= 0 \qquad c_3^2 + c_4^2 \neq 0 \end{aligned} \tag{CB}$$

entonces

$$K(x)\left[y_1'(x)y_2(x) - y_1(x)y_2'(x)\right]\Big|_{x=a}^{x=b} = 0.$$

---

**(5)** Demostrar el Teorema 3 de la Sección 4.4 del libro de Bleecker-Csordas en el caso $y'(a)^2 + Y'(a)^2 = 0$. (Ayuda: definir $w(x) = y(a)Y(x) - Y(a)y(x)$ y repetir el procedimiento).

---

**(6)** Determinar los valores de $L$ para los que el siguiente problema tiene (al menos) una solución no trivial:

$$y''(x) + y(x) = 0, \quad 0 \le x \le L, \qquad y(0) = 0, \quad y(L) = 0.$$

Para dichos valores de $L$, ¿cuántas soluciones tiene?

---

**(7)** Estudiar el *Teorema de comparación de Sturm* (Teorema 8, de la sección 4.4 del libro de Bleecker-Csordas). Utilizar dicho teorema para demostrar la desigualdad (64) de la misma sección del libro.

---

**(8)** Sea $y(x)$ una autofunción del problema de Sturm-Liouville

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}\left[K(x)\frac{dy}{dx}\right] + [q(x) + \lambda g(x)]\, y &= 0 \qquad a \le x \le b, \\ c_1\, y(a) + c_2\, y'(a) &= 0 \qquad c_1^2 + c_2^2 \neq 0 \\ c_3\, y(b) + c_4\, y'(b) &= 0 \qquad c_3^2 + c_4^2 \neq 0 \end{aligned} \tag{SL}$$

(suponiendo que $K'$, $g$, $q$ son continuas en $[a, b]$ con $K(x) > 0$ para todo $x \in [a, b]$).
Demostrar que todos los ceros de $y(x)$ en $[a, b]$ son simples.

---

**(9)** Sea $y(x)$ una solución no-trivial de la ecuación de Sturm-Liouville

$$\frac{d}{dx}\left[K(x)\frac{dy}{dx}\right] + [q(x) + \lambda g(x)]\, y = 0 \qquad a \le x \le b,$$

(suponiendo que $K'$, $g$, $q$ son continuas en $[a, b]$ con $K(x) > 0$ para todo $x \in [a, b]$).
Demostrar que $y(x)$ tiene a lo sumo un número finito de ceros en $[a, b]$.

---