Matemática Aplicada
Ecuaciones en Derivadas Parciales

Apunte de las materias

Matemática Aplicada
Ecuaciones en Derivadas Parciales

Posgrados de la Universidad Nacional del Litoral

Hugo Aimar — Pedro Morin

9 de septiembre de 2009

Capítulo 1

La integral como un promedio

1.1. Desplazamiento y velocidad

Si t denota el tiempo, medido por ejemplo en segundos, y $x(t)$ denota la distancia recorrida por un vehículo durante el intervalo de tiempo $[0, t]$, digamos en metros, entonces:

- $\dfrac{x(t)}{t}$ es la velocidad media en el intervalo de tiempo $[0, t]$, en metros por segundo.
- $\dfrac{x(b) - x(a)}{b - a}$ (con $0 \leq a < b$) es la velocidad media en el intervalo de tiempo $[a, b]$, en metros por segundo.
- $\dfrac{x(a+h) - x(a)}{h}$ es la velocidad media en el intervalo de tiempo que dura h segundos y comienza en $t = a$, también en metros por segundo.
- $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{x(a+h) - x(a)}{h}$ es la *velocidad instantánea* a tiempo $t = a$, en metros por segundo. Si definimos

  $$v(t) = \lim_{h \to 0} \frac{x(t+h) - x(t)}{h} = x'(t)$$

  entonces $v(t)$ es la velocidad instantánea a tiempo t.
- Por el teorema fundamental del cálculo

  $$\int_a^b v(t)\, dt = \int_a^b x'(t)\, dt = x(b) - x(a).$$

  Es decir, la integral de la velocidad (entre a y b) es la distancia recorrida (entre los instantes de tiempo $t = a$ y $t = b$). Luego

  $$\frac{1}{b-a} \int_a^b v(t)\, dt = \frac{x(b) - x(a)}{b - a}$$

  es la velocidad media en el intervalo de tiempo $[a, b]$. En otras palabras, la cantidad $\dfrac{1}{b-a} \displaystyle\int_a^b v(t)\, dt$ es *el valor medio* de $v(t)$ en el intervalo $[a, b]$.

1.2. Masa y densidad

Supongamos que tenemos un cuerpo que ocupa una región llamada Ω del espacio tri-dimensional $\mathbb{R}^3$. Si la masa de una (sub)región R de Ω es $m(R)$ (en gramos), y su volumen es $\mathrm{vol}(R)$ (en cm^3), entonces:

- El cociente $\dfrac{m(R)}{\mathrm{vol}(R)}$ es la *densidad media* del cuerpo en la región R, en $\dfrac{g}{cm^3}$.
- Si $B(P,r)$ denota la *bola con centro P y radio r*, entonces la *densidad puntual $f(P)$* se define como
$$f(P) = \lim_{r\to 0} \frac{m\big(B(P,r)\big)}{\mathrm{vol}\,\big(B(P,r)\big)},$$
es decir, la densidad de un punto es el límite de las densidades de regiones que *se encogen cada vez más hacia ese punto.*
- Ahora no resulta tan obvio como en el caso del desplazamiento y la velocidad, pero en cálculo siempre nos enseñaron (por decreto) que si $f(x)$ es la densidad puntual de un objeto que ocupa una región R, entonces su masa se calcula como
$$m(R) = \iiint_R f(x)\, d\mathrm{vol},$$
¿no es cierto? Para afirmar que integrando la $f(x)$ que se obtiene como en el punto anterior se *recupera* la masa $m(R)$, haría falta un teorema, ¿no les parece?

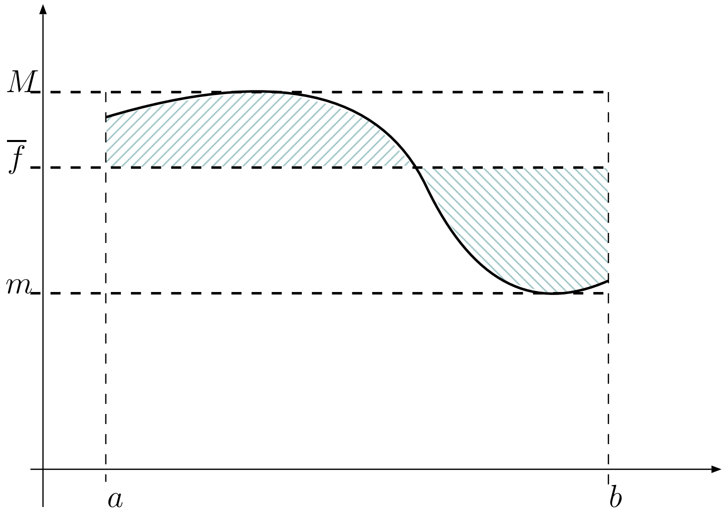
1.3. Valor medio en $\mathbb{R}$

Supongamos que $f(x)$ es una función continua en $\mathbb{R}$. Consideremos el intervalo $[a,b]$ y observemos que por definición de mínimo y máximo
$$\min_{[a,b]} f \le f(x) \le \max_{[a,b]} f, \qquad \text{para todo } x \in [a,b].$$
Más precisamente, si m denota el mínimo valor que toma f en $[a,b]$ y M el máximo, entonces
$$m \le f(x) \le M, \qquad \text{para todo } x \in [a,b].$$
Integrando entre a y b, obtenemos que
$$\int_a^b m\, dx \le \int_a^b f(x)\, dx \le \int_a^b M\, dx,$$
o sea,
$$m(b-a) \le \int_a^b f(x)\, dx \le M(b-a),$$
y por lo tanto
$$m \le \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)\, dx \le M.$$

Además, si llamamos $\overline{f} = \dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$, observemos lo que ocurre al integrar esta constante $\overline{f}$ sobre el intervalo $[a,b]$:

$$\int_a^b \overline{f}\,dx = (b-a)\overline{f} = (b-a)\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx.$$

Es decir, el valor $\overline{f}$ es el valor de la función constante cuya integral es igual a la integral de f sobre el intervalo $[a,b]$.



El valor de $\overline{f}$ hace que las dos regiones sombreadas tengan la misma área. Por lo tanto, el área bajo el gráfico de f es equivalente al rectángulo de base $(b-a)$ y altura $\overline{f}$, es decir,

$$\int_a^b f(x)\,dx = \overline{f}(b-a).$$

En base a estas observaciones:

$$\boxed{\text{Llamaremos } \textit{valor medio} \text{ de } f \text{ sobre el intervalo } [a,b] \text{ a la expresión } \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx}$$

Si ahora consideramos el valor medio de f en un intervalo $[a,a+h]$ $(h>0)$, obtenemos que

$$m_h := \min_{[a,a+h]} f \leq \frac{1}{h}\int_a^{a+h} f(x)\,dx \leq \max_{[a,a+h]} f =: M_h.$$

Pero como la función es continua, $\lim\limits_{h\to 0} M_h = f(a)$ y también $\lim\limits_{h\to 0} m_h = f(a)$, y por lo tanto:

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{1}{h}\int_a^{a+h} f(x)\,dx = f(a).$$

De manera similar, se puede demostrar el siguiente teorema:

Teorema 1.1. *Si f es una función continua en $x = x_0$ entonces*

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{1}{2h}\int_{x_0-h}^{x_0+h} f(x)\,dx = f(x_0).$$

En base a este teorema se puede demostrar el siguiente:

Teorema 1.2. *Si f es una función continua en $x = x_0$ e $\{I_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión de intervalos para la que existe una sucesión de números positivos $\{h_n\}_{n=1}^{\infty}$ tales que $I_n \subset [x_0 - h_n, x_0 + h_n]$ y $h_n \to 0$, entonces*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\text{longitud}(I_n)} \int_{I_n} f(x)\, dx = f(x_0).$$

En palabras, si una sucesión de intervalos está metida *en otra sucesión que se* encoge a un punto *entonces la sucesión de promedios tiende al valor de la función en ese punto.*

Ejemplos:

- $\dfrac{1}{3h} \displaystyle\int_{x_0-2h}^{x_0+h} f(x)\, dx \to f(x_0)$ cuando $h \to 0^+$.

- $\dfrac{1}{h} \displaystyle\int_{x_0+h}^{x_0+2h} f(x)\, dx \to f(x_0)$ cuando $h \to 0^+$.

- $\dfrac{1}{h-h^2} \displaystyle\int_{x_0+h^2}^{x_0+h} f(x)\, dx \to f(x_0)$ cuando $h \to 0^+$.

1.4. Valor medio en $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$

En esta sección trabajaremos en $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$, pero los resultados pueden generalizarse fácilmente a $\mathbb{R}^d$ para cualquier $d > 1$.

Dada una región R en $\mathbb{R}^d$, denotaremos con $|R|$ su *medida*, que será el área cuando $d = 2$ y el volumen cuando $d = 3$. Si S es una superficie en $\mathbb{R}^3$, y C una curva en $\mathbb{R}^2$ o $\mathbb{R}^3$, también denotaremos con $|S|$ su área y con $|C|$ su longitud (respectivamente). Con esta notación resulta:

$$\begin{aligned}
\text{vol}(R) = |R| &= \iiint_R d\text{vol} && \text{si } R \text{ es una región del espacio } \mathbb{R}^3 \\
\text{área}(R) = |R| &= \iint_R dA && \text{si } R \text{ es una región del plano } \mathbb{R}^2 \\
\text{área}(S) = |S| &= \iint_S d\sigma && \text{si } S \text{ es una superficie en } \mathbb{R}^3 \\
\text{longitud}(C) = |C| &= \int_C ds && \text{si } C \text{ es una curva en } \mathbb{R}^2 \text{ o } \mathbb{R}^3
\end{aligned}$$

De ahora en adelante utilizaremos la notación siguiente:

- $d$vol: diferencial de volumen;
- dA: diferencial de área en el plano $\mathbb{R}^2$;
- $d\sigma$: diferencial de área de superficie en $\mathbb{R}^3$;
- ds: diferencial de longitud de arco de curva en $\mathbb{R}^2$ o en $\mathbb{R}^3$.

Ejemplos:

- Si consideramos el rectángulo $R = [a,b] \times [c,d] = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\}$, entonces $|R| = (b-a) \times (d-c)$.
- Si consideramos el prisma $R = [a,b] \times [c,d] \times [e,f]\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : a \leq x \leq b, c \leq y \leq d, e \leq z \leq f\}$, entonces $|R| = (b-a) \times (d-c) \times (f-e)$.
- Si $B(x,r)$ denota la *bola* con centro en x y radio r en $\mathbb{R}^3$, entonces $|B(x,r)| = \frac{4}{3}\pi r^3$.
- Si $D(x,r)$ denota el *disco* con centro en x y radio r en $\mathbb{R}^2$, entonces $|D(x,r)| = \pi r^2$.
- Si $C(x,r)$ denota la *circunferencia* de centro x y radio r en $\mathbb{R}^2$ (borde del disco $D(x,r)$, $C(x,r) = \partial D(x,r)$) entonces $|C(x,r)| = 2\pi r$.
- Si $S(x,r)$ denota la *superficie esférica* de centro x y radio r en $\mathbb{R}^3$ (cáscara o borde de la bola $B(x,r)$, $S(x,r) = \partial B(x,r)$) entonces $|S(x,r)| = 4\pi r^2$.

Haciendo el mismo razonamiento de antes, se cumple que si f es una función continua

$$\begin{aligned}
\min_R f \leq \frac{\iiint_R f \,d\mathrm{vol}}{|R|} \leq \max_R f \qquad & \text{si } R \text{ es una región de } \mathbb{R}^3 \\
\min_R f \leq \frac{\iint_R f \,dA}{|R|} \leq \max_R f \qquad & \text{si } R \text{ es una región de } \mathbb{R}^2 \\
\min_S f \leq \frac{\iint_S f \,d\sigma}{|S|} \leq \max_S f \qquad & \text{si } S \text{ es una superficie en } \mathbb{R}^3 \\
\min_C f \leq \frac{\int_C f \,ds}{|C|} \leq \max_C f \qquad & \text{si } C \text{ es una curva en } \mathbb{R}^2 \text{ o en } \mathbb{R}^3
\end{aligned}$$

y más aún,

$$\begin{array}{lll}
\text{Si } \overline{f} := \dfrac{\iiint_R f \,d\mathrm{vol}}{|R|} & \text{entonces } \displaystyle\iiint_R \overline{f} \,d\mathrm{vol} = \iiint_R f \,d\mathrm{vol} & (R \text{ región de } \mathbb{R}^3) \\
\text{Si } \overline{f} := \dfrac{\iint_R f \,dA}{|R|} & \text{entonces } \displaystyle\iint_R \overline{f} \,dA = \iint_R f \,dA & (R \text{ región de } \mathbb{R}^2) \\
\text{Si } \overline{f} := \dfrac{\iint_S f \,d\sigma}{|S|} & \text{entonces } \displaystyle\iint_S \overline{f} \,d\sigma = \iint_S f \,d\sigma & (S \text{ superficie en } \mathbb{R}^3) \\
\text{Si } \overline{f} := \dfrac{\int_C f \,ds}{|C|} & \text{entonces } \displaystyle\int_C \overline{f} \,ds = \int_C f \,ds & (C \text{ curva en } \mathbb{R}^2 \text{ o } \mathbb{R}^3)
\end{array}$$

En todos estos casos diremos que $\overline{f}$ es el valor medio de f sobre R, S o C según corresponda.

Un resultado análogo al Teorema 1.1 en más dimensiones es el siguiente (lo enunciamos para $\mathbb{R}^3$ pero lo mismo vale en $\mathbb{R}^2$ cambiando $B(x,r)$ por $D(x,r)$ y $d$vol por dA).

Teorema 1.3. *Si f es una función definida en $\mathbb{R}^3$ y es continua en $x = x_0$, entonces*

$$\frac{1}{|B(x_0,r)|} \iiint_{B(x_0,r)} f \,d\mathrm{vol} \longrightarrow f(x_0) \quad \textit{cuando } r \to 0.$$

En otras palabras, si $\{r_n\}$ es una sucesión de radios ($r_n > 0$) que tienden a cero, entonces

$$\frac{1}{|B(x_0, r_n)|} \iiint_{B(x_0,r_n)} f \, \mathrm{dvol} \longrightarrow f(x_0) \quad \textit{cuando } n \to \infty.$$

Observación 1.4. Este teorema justifica ahora la definición de densidad puntual y la relación con la masa. Más precisamente, si $f(x)$ es una función que cumple que

$$m(R) = \iiint_R f(x) \, \mathrm{dvol},$$

entonces necesariamente

$$f(x) = \lim_{r \to 0^+} \frac{m(B(x,r))}{\mathrm{vol}(B(x,r))}$$

Resultados análogos al Teorema 1.2 son los siguientes:

Teorema 1.5. *Sea f una función definida en $\mathbb{R}^3$, continua en x_0. Si $\{R_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión de regiones de $\mathbb{R}^3$ tales que $R_n \subset B(x_0, r_n)$ y $r_n \to 0$, entonces*

$$\frac{1}{|R_n|} \iiint_{R_n} f \, \mathrm{dvol} \longrightarrow f(x_0) \quad \textit{cuando } n \to \infty.$$

Ejemplo 1.6. Consideremos la función $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$, calcular el siguiente límite

$$\lim_{h \to 0} \frac{1}{h^3} \int_1^{1+h} \int_2^{2+h} \int_3^{3+h} f(x, y, z) \, dz \, dy \, dx.$$

Las regiones de integración son cubos Q_h de lado h (volumen h^3) que tienen un vértice en el punto $x_0 = (1, 2, 3)$. El cubo Q_h está entonces contenido en la bola $B((1, 2, 3), 2h)$ de centro $(1, 2, 3)$ y radio $2h$. Al hacer tender h a cero, obtenemos el valor de f en el punto $(1, 2, 3)$,

$$f(1, 2, 3) = 1^2 + 2^2 + 3^2 = 14.$$

Teorema 1.7. *Sea f una función definida en $\mathbb{R}^3$, continua en x_0. Si $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión de superficies de $\mathbb{R}^3$ tales que $S_n \subset B(x_0, r_n)$ y $r_n \to 0$, entonces*

$$\frac{1}{|S_n|} \iint_{S_n} f \, d\sigma \longrightarrow f(x_0) \quad \textit{cuando } n \to \infty.$$

Ejemplo 1.8. Consideremos la función $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$, calcular el siguiente límite

$$\lim_{h \to 0} \frac{1}{h^2} \iint_{\partial Q_h} f(x, y, z) \, d\sigma,$$

donde Q_h son los cubos del ejemplo anterior, y ∂Q_h denota la superficie que recubre a Q_h. Como el área de ∂Q_h es $6h^2$ tenemos que

$$\lim_{h \to 0} \frac{1}{h^2} \iint_{\partial Q_h} f(x, y, z) \, d\sigma = 6 \lim_{h \to 0} \frac{1}{6h^2} \iint_{\partial Q_h} f(x, y, z) \, d\sigma = 6f(1, 2, 3),$$

puesto que los cubos Q_h cumplen las mismas hipótesis que antes.

1.5. Aplicaciones

En base a las observaciones de la sección anterior, podemos demostrar que:

Teorema 1.9. *Si f es una función continua en una región Ω de $\mathbb{R}^3$ y $\iiint_{B(x,r)} f\,d\mathrm{vol} = 0$ para toda bola $B(x,r)$ contenida en Ω, entonces $f \equiv 0$.*

Demostración. Sea x_0 un punto de la región Ω. Entonces

$$f(x_0) = \lim_{r\to 0} \frac{1}{|B(x_0,r)|} \iiint_{B(x_0,r)} f\,d\mathrm{vol} = 0. \qquad \square$$

Teorema 1.10. *Si f es una función continua en una región Ω de $\mathbb{R}^3$ y $\iiint_Q f\,d\mathrm{vol} = 0$ para todo cubo Q contenido en Ω, entonces $f \equiv 0$.*

Demostración. Sea x_0 un punto de la región Ω, y denotemos con Q_h al cubo con centro x_0 y lado h. Entonces

$$f(x_0) = \lim_{h\to 0} \frac{1}{|Q_h|} \iiint_{Q_h} f\,d\mathrm{vol} = 0. \qquad \square$$

Observación 1.11. Es importante notar que si uno sabe que $\iiint_Q f\,d\mathrm{vol} = 0$ sobre una región Q, esto no implica necesariamente que $f = 0$ en todos los puntos de Q.

Lo que afirmamos anteriormente es que si $\iiint_Q f\,d\mathrm{vol} = 0$ *para todos los cubos Q contenidos en una región* Ω entonces f es cero en todos los puntos de Ω. Por ejemplo, la función $f(x,y,z) = xy$ tiene integral cero sobre el cubo $[-h,h] \times [-h,h] \times [-h,h]$ y sin embargo no es cero en todos los puntos. También la función $\operatorname{sen}(x)$ tiene integral cero sobre el intervalo $[-\pi,\pi]$, y sin embargo no es idénticamente cero.

Observación 1.12. Sin embargo, si uno sabe que $\iiint_Q f\,d\mathrm{vol} = 0$ sobre una región Q, y también sabe que la función f no cambia de signo, por ejemplo, si se sabe que $f(x) \geq 0$ para todo $x \in Q$, entonces sí se puede concluir que $f(x) = 0$ para todo $x \in Q$.