Apellido, Nombre: ______________________________

Calificación:

Primer Examen Parcial
29/05/2013

Ecuaciones Diferenciales Parciales

---

(1) ________/15 pts

Consideremos un trozo de oro, que ocupa una región R de $\mathbb{R}^3$ de forma arbitraria, pero suave (vale el teorema de la divergencia), tal que el volumen de R es $V = 2{,}5$. Supongamos que $u(x, y, z)$ es una temperatura que satisface

$$\begin{aligned} -\overline{\nabla}^2 u &= 1 \quad \text{en } R, \\ u &= 0 \quad \text{en } \partial R. \end{aligned}$$

Para este problema consideremos los siguientes valores:

Conductividad	K	308,2
Capacidad calórica o calor específico	c	0,03106
Densidad	ρ	$19{,}3 \times 10^6$

¿Cuál es el flujo de calor hacia afuera de la región R?

---

(2) ________/20 pts

Consideremos la ecuación diferencial siguiente:

$$\text{(ED)} \qquad 3u_x - 2u_y = x - y, \qquad u = u(x, y).$$

(a) Hallar la solución general de (ED), y decir cuáles son las curvas características. Verificar.

En cada uno de los siguientes casos hallar (si es posible) una solución de la ecuación (ED) que cumpla la condición lateral indicada. Si no hay, indicar por qué. Si hay más de una, indicar tres soluciones diferentes.

(b) $u(x, x) = e^x$, **(c)** $u(-3x, 2x) = e^x$.

---

(3) ________/15 pts

Dar un ejemplo de ecuación lineal de primer orden con coeficientes constantes (en $\mathbb{R}^2$), y condición lateral dada sobre una curva lateral que corte todas las características, pero que no tenga solución. Explicar por qué no tiene solución.

(4) ______/30 pts

(a) Supongamos que $v(x,t)$ es una función C^2 que satisface

$$\begin{array}{rl} \text{(ED)} & v_t = v_{xx} \quad 0 \le x \le 1, \quad t > 0; \\ \text{(CB1)} & v(0,t) = 0, \quad t > 0; \\ \text{(CB2)} & v_x(1,t) = -Hv(1,t), \quad t > 0. \end{array}$$

Aquí H es una constante positiva (arbitraria).

Demostrar que:

$$\text{Si} \quad 0 \le t_1 \le t_2 \qquad \text{entonces} \qquad \int_0^1 [v(x,t_2)]^2\,dx \le \int_0^1 [v(x,t_1)]^2\,dx. \tag{1}$$

(b) Mostrar que

$$v(x,t) = \operatorname{senh}(x)\,e^t$$

es solución de

$$\begin{array}{rl} \text{(ED)} & v_t = v_{xx} \quad 0 \le x \le 1, \quad t > 0; \\ \text{(CB1)} & v(0,t) = 0, \quad t > 0; \\ \text{(CB2')} & v_x(1,t) = Hv(1,t), \quad t > 0, \end{array}$$

si $H = \dfrac{\cosh 1}{\operatorname{senh} 1}$.

Observar que esta función v no cumple (1). Más aún,

$$\int_0^L [v(x,t)]^2\,dx \to +\infty \qquad \text{cuando} \quad t \to +\infty.$$

(c) ¿Qué condición de borde, (CB2) o (CB2') corresponde a la ley de enfriamiento de Newton en el extremo derecho del intervalo? Explicar.

---

(5) ______/20 pts

Hallar la solución de

$$\begin{array}{l} u_t = 3u_{xx}, \qquad 0 \le x \le 1, \quad t \ge 0, \\ u_x(0,t) = 2, \quad u_x(1,t) = -2, \qquad t \ge 0, \\ u(x,0) = 1 + \dfrac{1}{10}\cos(\pi x) + 2x - 2x^2, \qquad 0 \le x \le 1. \end{array}$$