Calificación: **Apellido, Nombre:**

Segundo Examen Parcial
27/07/2011

Ecuaciones en Derivadas Parciales

---

(1) ________/15 pts

Considerar una función $f : [0, L] \to \mathbb{R}$.

(a) Definir la serie de Fourier de senos de f.

(b) Si f es C^1 a trozos en $[0, L]$. ¿A qué converge la serie de Fourier de senos de f en el intervalo $[-L, L]$?

(c) ¿Bajo qué hipótesis puede asegurarse que la serie de Fourier de senos de f converge *uniformemente* a f en $[0, L]$?

---

(2) ________/35 pts

Sea $f(x)$ una función C^3 en el intervalo $[-L, L]$ tal que $f(-L) = f(L)$, $f'(-L) = f'(L)$, y $f''(-L) = f''(L)$. Demostrar que si $\mathrm{SF}_N\, f(x)$ es la suma parcial de orden N de la serie de Fourier de senos y cosenos de f, entonces

(a) $\displaystyle\max_{x\in[-L,L]} |f(x) - \mathrm{SF}_N(x)| \leq \frac{4L^3M}{\pi^3N^2}$, donde $M = \max_{x\in[-L,L]} |f'''(x)|$.

(b) $\displaystyle\max_{x\in[-L,L]} |f'(x) - \mathrm{SF}'_N(x)| \leq \frac{4L^2M}{\pi^2N}$.

---

(3) ________/10 pts

¿Qué condición de compatibilidad deben cumplir las funciones f y g para que el siguiente problema tenga solución?

$$\begin{aligned} \overline{\nabla}^2 u &= f \quad \text{en } \Omega \\ \overline{\nabla} u \cdot \overline{n} &= g \quad \text{en } \partial\Omega. \end{aligned}$$

Aquí $\overline{n}$ denota el vector normal exterior a Ω.
Si f y g cumplen dicha condición de compatibilidad y el problema tiene solución: ¿cuántas soluciones tiene?

(4) ________/**20 pts**

Hallar la solución de la siguiente ecuación de difusión en el disco unitario D:

$$\begin{cases} u_t = \overline{\nabla}^2 u & \text{en } D, \text{ para } t > 0, \\ u = 0 & \text{en } \partial D, \text{ para } t > 0, \\ u = f & \text{en } D, \text{ para } t = 0. \end{cases}$$

Suponer que el dato inicial f y también la solución u dependen sólo de la distancia al origen, es decir, $f = f(r)$ no depende del ángulo θ y $u = u(r; t)$ depende de r y de t, pero no de θ.
Desarrollar la resolución por separación de variables partiendo de $u = u(r; t)$. Recordemos que el Laplaciano en coordenadas polares es:

$$\overline{\nabla}^2 \phi(r, \theta) = \frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial \phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 \phi}{\partial \theta^2}.$$

---

(5) ________/**30 pts**

Consideremos el siguiente problema de autovalores para el laplaciano (Ω un dominio en $\mathbb{R}^2$):

$$\begin{aligned} \overline{\nabla}^2 \phi = -\lambda \phi, &\qquad (x, y) \in \Omega \\ \phi = 0, &\qquad (x, y) \in \partial\Omega. \end{aligned}$$

El Teorema 12.1 enunciado en clase afirma que este problema tiene una sucesión infinita de autovalores λ_n y correspondientes autofunciones ϕ^n que satisfacen:

$$0 < \lambda_1 < \lambda_2 \leq \lambda_3 \leq \lambda_4 \leq \cdots \leq \lambda_n \leq \ldots \longrightarrow +\infty$$

$$\begin{aligned} \overline{\nabla}^2 \phi^n = -\lambda_n \phi^n, &\qquad (x, y) \in \Omega \\ \phi^n = 0, &\qquad (x, y) \in \partial\Omega, \end{aligned}$$

$$\iint_\Omega \phi^n \, \phi^m \, dx \, dy = 0, \quad \text{si } n \neq m, \quad n, m \in \mathbb{N}.$$

Además, toda f suficientemente suave en Ω puede aproximarse tanto como se desee por combinaciones lineales de estas autofunciones.

(a) Explique brevemente para qué sirve saber esto en relación con la ecuación del calor y la ecuación de ondas (decir cómo son las soluciones de estas ecuaciones).

(b) Explique muy brevemente, a partir de las fórmulas escritas en el ítem anterior, diferencias cualitativas entre las soluciones de la ecuación del calor y la ecuación de ondas.

(c) Usando las autofunciones y los autovalores hallar una fórmula para la solución de la ecuación de Poisson

$$\begin{aligned} \overline{\nabla}^2 u = f &\quad \text{en } \Omega \\ u = 0 &\quad \text{en } \partial\Omega \end{aligned}$$

Ayuda: En primer lugar, pensar cuál es la solución u cuando $f = \phi^n$. En segundo lugar, pensar cuál es la solución u cuando $f = \sum_{n=1}^{N} a_n \phi^n$. En tercer lugar ...