Calificación: **Apellido, Nombre:**

Segundo Examen Parcial
25/07/2012

Ecuaciones en Derivadas Parciales

---

(1) ________/25 pts

Sea Ω un dominio de $\mathbb{R}^d$ $(d \geq 2)$, y supongamos que $u = u(x,t)$ es una solución $C^2(\overline{\Omega} \times [0,T])$ del problema

$$\begin{aligned} &u_t = k\overline{\nabla}^2 u, && x \in \Omega, \quad 0 < t < T, \\ &u(x,t) = a(x,t), && x \in \partial\Omega, \quad t > 0, \\ &u(x,0) = f(x), && x \in \Omega. \end{aligned}$$

Demostrar que si

$$M = \max\left\{ \max_{x\in\partial\Omega, t\in[0,T]} a(x,t), \max_{x\in\overline{\Omega}} f(x) \right\}$$

entonces se cumple que $u(x,t) \leq M$, para todo $x \in \overline{\Omega}$ y $0 \leq t \leq T$.

---

(2) ________/35 pts

Considerar el problema

$$\begin{aligned} &u_t = u_{xx}, && 0 \leq x \leq 1, \quad t \geq 0, \\ &u_x(0,t) = 0, \quad u_x(1,t) = 2, && t \geq 0, \\ &u(x,0) = x^2(1 + 10(1-x)^2), && 0 \leq x \leq 1. \end{aligned}$$

(a) Notar que las condiciones de borde son no-homogéneas. Descomponer en dos problemas y resolverlos.

(b) Hallar una solución aproximada $u_N(x,t)$ que cumpla

$$|u(x,t) - u_N(x,t)| \leq 0{,}001, \qquad 0 \leq x \leq 1, \quad t \geq 0.$$

---

(3) ________/40 pts

Hallar la solución de la siguiente ecuación de ondas (amortiguada) en el disco unitario D:

$$\begin{cases} u_{tt} = \overline{\nabla}^2 u - \beta u_t & \text{en } D, \text{ para } t > 0, \\ u = 0 & \text{en } \partial D, \text{ para } t > 0, \\ u = f & \text{en } D, \text{ para } t = 0, \\ u_t = 0 & \text{en } D, \text{ para } t = 0. \end{cases}$$

Suponer que el dato inicial f y también la solución u dependen sólo de la distancia al origen, es decir, $f = f(r)$ no depende del ángulo θ y $u = u(r;t)$ depende de r y de t, pero no de θ.
Desarrollar la resolución por separación de variables partiendo de $u = u(r;t)$. Recordemos que el Laplaciano en coordenadas polares es:

$$\overline{\nabla}^2 \phi(r,\theta) = \frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial \phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 \phi}{\partial \theta^2}.$$

Suponer también que $0 < \beta < 2z_{01}$ con z_{01} la menor raíz positiva de la función de Bessel J_0.
