

Segundo Examen Parcial
25/07/2012

Matemática Aplicada

(1) _____/20 pts

Considerar el problema de difusión de calor siguiente:

$$\begin{aligned} u_t &= k u_{xx} + q, & 0 < x < L, \quad t > 0, \\ u_x(0, t) &= 0, \quad u_x(L, t) = 0 & t > 0, \\ u(x, 0) &= f(x), & 0 < x < L, \end{aligned}$$

con q un número positivo conocido.

- (a) ¿Qué representa físicamente el número q en el lado derecho de la ecuación diferencial?
 (b) Demostrar (sin hallar la solución), que si u es una solución C^2 de este problema, entonces para todo $t \geq 0$,

$$\int_0^L u(x, t) dx = \int_0^L f(x) dx + q L t. \quad (*)$$

(Ayuda: Definir $F(t) = \int_0^L u(x, t) dx$ y hallar la derivada de $F(t)$.)

- (c) Interpretar físicamente la igualdad (*).

(2) _____/40 pts

Considerar el problema

$$\begin{aligned} u_t &= u_{xx}, & 0 \leq x \leq 1, \quad t \geq 0, \\ u_x(0, t) &= 0, \quad u_x(1, t) = 2, & t \geq 0, \\ u(x, 0) &= x^2(1 + 10(1 - x)^2), & 0 \leq x \leq 1. \end{aligned}$$

- (a) Notar que las condiciones de borde son no-homogéneas. Descomponer en dos problemas y resolverlos.
 (b) Hallar una solución aproximada $u_N(x, t)$ que cumpla

$$|u(x, t) - u_N(x, t)| \leq 0,001, \quad 0 \leq x \leq 1, \quad t \geq 0.$$

(3) _____/40 pts

Hallar la solución de la siguiente ecuación de ondas (amortiguada) en el disco unitario D :

$$\begin{cases} u_{tt} = \bar{\nabla}^2 u - \beta u_t & \text{en } D, \text{ para } t > 0, \\ u = 0 & \text{en } \partial D, \text{ para } t > 0, \\ u = f & \text{en } D, \text{ para } t = 0, \\ u_t = 0 & \text{en } D, \text{ para } t = 0. \end{cases}$$

Suponer que el dato inicial f y también la solución u dependen sólo de la distancia al origen, es decir, $f = f(r)$ no depende del ángulo θ y $u = u(r; t)$ depende de r y de t , pero no de θ .

Desarrollar la resolución por separación de variables partiendo de $u = u(r; t)$. Recordemos que el Laplaciano en coordenadas polares es:

$$\bar{\nabla}^2 \phi(r, \theta) = \frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \theta^2}.$$

Suponer también que $0 < \beta < 2z_{01}$ con z_{01} la menor raíz positiva de la función de Bessel J_0 .