

Matemática Aplicada  
Ecuaciones en Derivadas Parciales

Apunte de las materias

*Matemática Aplicada*  
*Ecuaciones en Derivadas Parciales*

Posgrados de la Universidad Nacional del Litoral

Hugo Aimar, Bruno Bongioanni, Pedro Morin

4 de julio de 2013

# Presentación

Este apunte contiene las notas del curso *Matemática Aplicada*, curso de posgrado para la Facultad de Ingeniería Química y la Facultad de Ingeniería y Ciencias Hídricas de la Universidad Nacional del Litoral. Este curso se dicta en paralelo con el curso *Ecuaciones en Derivadas Parciales*, optativa de la Licenciatura en Matemática Aplicada, y de posgrado para el doctorado y la maestría en Matemática. En la sección Ejercicios de cada capítulo hay problemas marcados con un asterisco. Estos problemas más teóricos están pensados para los alumnos de estas últimas carreras. Los problemas marcados con dos asteriscos son también para alumnos de estas carreras, pero son *opcionales*; si bien están relacionados con los contenidos del capítulo correspondiente, no son tan importantes para el objetivo del curso. Los alumnos del doctorado o la maestría en matemática deberían hacerlos.

Este apunte fue escrito durante el dictado de los cursos en el primer cuatrimestre de 2011, y actualizado durante el dictado en el primer cuatrimestre de 2012. Será revisado por última vez durante el primer cuatrimestre de 2013. Cualquier sugerencia u observación sobre errores será agradecida por los autores del apunte y también por los futuros alumnos del curso.

Santa Fe, marzo de 2013

# Índice general

<b>1. La integral como un promedio</b>	<b>6</b>
1.1. Desplazamiento y velocidad	6
1.2. Masa y densidad	7
1.3. Valor medio en $\mathbb{R}$	7
1.4. Valor medio en $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$	9
1.5. Aplicaciones	12
1.6. Valor medio generalizado	12
1.7. Ejercicios	14
<b>2. Integrales de línea y de superficie</b>	<b>17</b>
2.1. Integrales de línea	17
2.2. Integrales de superficie	18
2.3. Ejercicios	21
<b>3. Algunos resultados del Cálculo Vectorial</b>	<b>22</b>
3.1. Definición de operadores diferenciales	22
3.2. Divergencia y flujo	23
3.3. Teorema de Gauss	26
3.4. Teorema de Stokes	28
3.5. Ejercicios	31
<b>4. Coordenadas Generalizadas en el Espacio</b>	<b>33</b>
4.1. Superficies coordenadas	34
4.2. Curvas coordenadas	35
4.3. Vectores normales	37
4.4. Cálculo de longitudes en coordenadas generalizadas	38
4.5. Cálculo de áreas de <i>superficies coordenadas</i> en coordenadas generalizadas	40
4.6. Cálculo de volúmenes de <i> cubos </i> con aristas que sean <i> curvas coordenadas </i>	40
4.7. Los operadores diferenciales en coordenadas generalizadas	40
4.8. Ejercicios	42
<b>5. Leyes de conservación. Ecuaciones constitutivas</b>	<b>43</b>
5.1. Leyes de conservación. Balance	43
5.2. Relaciones constitutivas	45
5.3. Reducción de dimensiones	47
5.4. Condiciones iniciales y de borde	48
5.5. La ecuación de Laplace y la ecuación de Poisson	50

5.6.	Otras relaciones constitutivas . . . . .	50
5.7.	La ecuación de ondas . . . . .	52
5.8.	La ecuación de Schrödinger . . . . .	55
5.9.	Ejercicios . . . . .	55
<b>6.</b>	<b>Ecuaciones Diferenciales. Una breve introducción</b>	<b>57</b>
6.1.	Ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden . . . . .	57
6.1.1.	EDOs de primer orden separables . . . . .	57
6.1.2.	EDOs lineales de primer orden . . . . .	60
6.2.	EDOs lineales de 2do orden con coeficientes constantes . . . . .	64
6.3.	Sistemas especiales de EDOs . . . . .	66
6.4.	Generalidades sobre Ecuaciones en Derivadas Parciales . . . . .	68
6.4.1.	EDPs lineales y el principio de superposición . . . . .	69
6.5.	Ejercicios . . . . .	70
<b>7.</b>	<b>EDPs de primer orden</b>	<b>73</b>
7.1.	EDPs de primer orden con coeficientes constantes . . . . .	73
7.1.1.	Condición lateral . . . . .	78
7.1.2.	Un modelo para análisis de poblaciones o inventarios . . . . .	83
7.2.	EDPs de primer orden con coeficientes variables . . . . .	86
7.2.1.	Parametrización preferida . . . . .	89
7.2.2.	Soluciones en forma paramétrica . . . . .	91
7.2.3.	Consideraciones globales . . . . .	95
7.3.	EDPs de primer orden en más variables . . . . .	96
7.4.	Ejercicios . . . . .	97
<b>8.</b>	<b>La ecuación de difusión unidimensional</b>	<b>99</b>
8.1.	Solución fundamental de la ecuación de difusión . . . . .	99
8.2.	Unicidad, estabilidad, y el principio del máximo . . . . .	101
8.2.1.	Método de energía . . . . .	101
8.2.2.	El principio del máximo y sus consecuencias . . . . .	104
8.2.3.	Demostración del principio del máximo . . . . .	107
8.3.	Solución con CB Dirichlet homogéneas . . . . .	108
8.3.1.	Ecuación dependiente del tiempo . . . . .	110
8.3.2.	Problema a valores en el borde . . . . .	111
8.3.3.	Soluciones producto y el principio de superposición . . . . .	114
8.4.	Solución del problema de conducción del calor en un anillo circular . . . . .	119
8.5.	CB independientes del tiempo . . . . .	124
8.6.	CB dependientes del tiempo . . . . .	128
8.7.	El principio de Duhamel . . . . .	130
8.8.	Ejercicios . . . . .	133
<b>9.</b>	<b>Series de Fourier</b>	<b>140</b>
9.1.	Ortogonalidad de funciones . . . . .	140
9.2.	Serie de Fourier. Definición y ejemplos . . . . .	143
9.3.	La convergencia de las series de Fourier . . . . .	152
9.3.1.	Convergencia puntual . . . . .	155

9.3.2. Convergencia uniforme . . . . .	158
9.4. Series de Senos y series de Cosenos . . . . .	160
9.5. Ejercicios . . . . .	165
<b>10.La ecuación de Laplace</b>	<b>168</b>
10.1. Ecuación de Laplace en un Rectángulo . . . . .	168
10.2. Ecuación de Laplace en un Disco . . . . .	172
10.3. Condición de Compatibilidad para la Existencia de Soluciones. . . . .	176
10.4. Propiedades Cualitativas de la Ecuación de Laplace . . . . .	177
10.4.1. Propiedad del Valor Medio. . . . .	177
10.4.2. Principios del máximo . . . . .	179
10.4.3. Unicidad y estabilidad de soluciones. . . . .	180
10.5. Ejercicios . . . . .	182
<b>11.La ecuación de Ondas en una dimensión</b>	<b>184</b>
11.1. Solución en $\mathbb{R}$ . Fórmula de D'Alembert . . . . .	184
11.2. Cuerda vibrante con extremos fijos . . . . .	187
11.3. Ejercicios . . . . .	190
<b>12.Ecuaciones en más variables independientes.</b>	<b>191</b>
12.1. Difusión en dos dimensiones . . . . .	191
12.2. Ondas en dos dimensiones . . . . .	193
12.3. Problema de autovalores en un rectángulo . . . . .	195
12.4. Problema de autovalores en el disco. Funciones de Bessel . . . . .	198
12.4.1. El caso general . . . . .	198
12.4.2. El caso con simetría radial . . . . .	203
12.5. Ecuación de Laplace en un cilindro circular. Funciones de Bessel modificadas	204
12.6. Ejercicios . . . . .	211
<b>13.Métodos numéricos para difusión unidimensional</b>	<b>214</b>
13.1. Diferencias finitas . . . . .	214
13.1.1. Problema estacionario (Poisson) . . . . .	214
13.1.2. Difusión no estacionaria . . . . .	218
13.2. Elementos finitos . . . . .	222
13.2.1. Problema estacionario (Poisson) . . . . .	222
13.3. Ejercicios . . . . .	226

# Capítulo 1

## La integral como un promedio

### 1.1. Desplazamiento y velocidad

Si  $t$  denota el tiempo, medido por ejemplo en segundos, y  $x(t)$  denota la distancia recorrida por un vehículo durante el intervalo de tiempo  $[0, t]$ , digamos en metros, entonces:

- $\frac{x(t)}{t}$  es la velocidad media en el intervalo de tiempo  $[0, t]$ , en metros por segundo.
- $\frac{x(b) - x(a)}{b - a}$  (con  $0 \leq a < b$ ) es la velocidad media en el intervalo de tiempo  $[a, b]$ , en metros por segundo.
- $\frac{x(a + h) - x(a)}{h}$  es la velocidad media en el intervalo de tiempo que dura  $h$  segundos y comienza en  $t = a$ , también en metros por segundo.
- $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{x(a + h) - x(a)}{h}$  es la *velocidad instantánea* a tiempo  $t = a$ , en metros por segundo. Si definimos

$$v(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x(t + h) - x(t)}{h} = x'(t)$$

entonces  $v(t)$  es la velocidad instantánea a tiempo  $t$ .

- Por el teorema fundamental del cálculo

$$\int_a^b v(t) dt = \int_a^b x'(t) dt = x(b) - x(a).$$

Es decir, la integral de la velocidad (entre  $a$  y  $b$ ) es la distancia recorrida (entre los instantes de tiempo  $t = a$  y  $t = b$ ). Luego

$$\frac{1}{b - a} \int_a^b v(t) dt = \frac{x(b) - x(a)}{b - a}$$

es la velocidad media en el intervalo de tiempo  $[a, b]$ . En otras palabras, la cantidad

$\frac{1}{b - a} \int_a^b v(t) dt$  es *el valor medio* de  $v(t)$  en el intervalo  $[a, b]$ .

## 1.2. Masa y densidad

Supongamos que tenemos un cuerpo que ocupa una región llamada  $\Omega$  del espacio tri-dimensional  $\mathbb{R}^3$ . Si la masa de una (sub)región  $R$  de  $\Omega$  es  $m(R)$  (en gramos), y su volumen es  $\text{vol}(R)$  (en  $\text{cm}^3$ ), entonces:

- El cociente  $\frac{m(R)}{\text{vol}(R)}$  es la *densidad media* del cuerpo en la región  $R$ , en  $\frac{g}{\text{cm}^3}$ .
- Si  $B(P, r)$  denota la *bola con centro  $P$  y radio  $r$* , entonces la *densidad puntual*  $f(P)$  se define como

$$f(P) = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{m(B(P, r))}{\text{vol}(B(P, r))},$$

es decir, la densidad de un punto es el límite de las densidades de regiones que *se encogen cada vez más hacia ese punto*.

- Ahora no resulta tan obvio como en el caso del desplazamiento y la velocidad, pero en cálculo siempre nos enseñaron (por decreto) que si  $f(x)$  es la densidad puntual de un objeto que ocupa una región  $R$ , entonces su masa se calcula como

$$m(R) = \iiint_R f(x) \, d\text{vol},$$

¿no es cierto? Para afirmar que integrando la  $f(x)$  que se obtiene como en el punto anterior se *recupera* la masa  $m(R)$ , haría falta un teorema, ¿no les parece?

## 1.3. Valor medio en $\mathbb{R}$

Supongamos que  $f(x)$  es una función continua en  $\mathbb{R}$ . Consideremos el intervalo  $[a, b]$  y observemos que por definición de mínimo y máximo

$$\min_{[a,b]} f \leq f(x) \leq \max_{[a,b]} f, \quad \text{para todo } x \in [a, b].$$

Más precisamente, si  $m$  denota el mínimo valor que toma  $f$  en  $[a, b]$  y  $M$  el máximo, entonces

$$m \leq f(x) \leq M, \quad \text{para todo } x \in [a, b].$$

Integrando entre  $a$  y  $b$ , obtenemos que

$$\int_a^b m \, dx \leq \int_a^b f(x) \, dx \leq \int_a^b M \, dx,$$

o sea,

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x) \, dx \leq M(b-a),$$

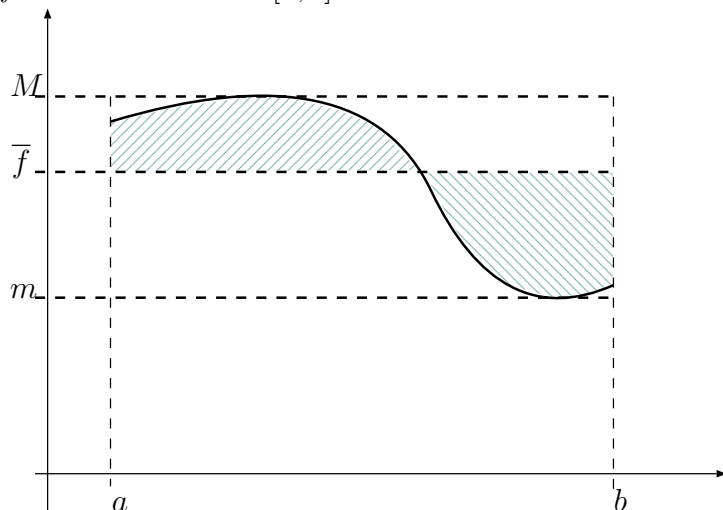
y por lo tanto

$$m \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) \, dx \leq M.$$

Además, si llamamos  $\bar{f} = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$ , observemos lo que ocurre al integrar esta constante  $\bar{f}$  sobre el intervalo  $[a, b]$ :

$$\int_a^b \bar{f} dx = (b-a)\bar{f} = (b-a) \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(x) dx.$$

Es decir, el valor  $\bar{f}$  es el valor de la función constante cuya integral es igual a la integral de  $f$  sobre el intervalo  $[a, b]$ .



El área bajo el gráfico de  $f$  es igual al área del rectángulo de base  $(b-a)$  y altura  $\bar{f}$ , es decir,

$$\int_a^b f(x) dx = \bar{f}(b-a).$$

Por lo tanto, el valor de  $\bar{f}$  hace que las dos regiones sombreadas tengan la misma área.

En base a estas observaciones:

Llamaremos *valor medio* de  $f$  sobre el intervalo  $[a, b]$  a la expresión  $\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$

Si ahora consideramos el valor medio de  $f$  en un intervalo  $[a, a+h]$  ( $h > 0$ ), obtenemos que

$$m_h := \underset{[a, a+h]}{\text{mín}} f \leq \frac{1}{h} \int_a^{a+h} f(x) dx \leq \underset{[a, a+h]}{\text{máx}} f =: M_h.$$

Pero como la función es continua,  $\lim_{h \rightarrow 0} M_h = f(a)$  y también  $\lim_{h \rightarrow 0} m_h = f(a)$ , y por lo tanto:

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{1}{h} \int_a^{a+h} f(x) dx = f(a).$$

De manera similar, se puede concluir lo siguiente:

**Teorema 1.1.** Si  $f$  es una función continua en  $x = x_0$  entonces

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{1}{2h} \int_{x_0-h}^{x_0+h} f(x) dx = f(x_0).$$

**Teorema 1.2.** Si  $f$  es una función continua en  $x = x_0$  e  $\{I_n\}_{n=1}^{\infty}$  es una sucesión de intervalos para la que existe una sucesión de números positivos  $\{h_n\}_{n=1}^{\infty}$  tales que  $I_n \subset [x_0 - h_n, x_0 + h_n]$  y  $h_n \rightarrow 0$ , entonces

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\text{longitud}(I_n)} \int_{I_n} f(x) dx = f(x_0).$$



*En palabras, si una sucesión de intervalos está metida en otra sucesión que se encoge a un punto entonces la sucesión de promedios tiende al valor de la función en ese punto.*

Las demostraciones rigurosas de estos teoremas quedan como ejercicio (ver 1.5– 1.9), y se sugiere hacerlas utilizando un argumento de tipo  $\varepsilon - \delta$ . El argumento previo con máximos y mínimos fue realizado para ilustración del resultado, pero no es un buen camino para obtener una demostración rigurosa.

**Ejemplos:**

- $\frac{1}{3h} \int_{x_0-2h}^{x_0+h} f(x) dx \rightarrow f(x_0)$  cuando  $h \rightarrow 0^+$ .
- $\frac{1}{h} \int_{x_0+h}^{x_0+2h} f(x) dx \rightarrow f(x_0)$  cuando  $h \rightarrow 0^+$ .
- $\frac{1}{h-h^2} \int_{x_0+h^2}^{x_0+h} f(x) dx \rightarrow f(x_0)$  cuando  $h \rightarrow 0^+$ .

## 1.4. Valor medio en $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$

En esta sección trabajaremos en  $\mathbb{R}^2$  y  $\mathbb{R}^3$ , pero los resultados pueden generalizarse fácilmente a  $\mathbb{R}^d$  para cualquier  $d > 1$ .

Dada una región  $R$  en  $\mathbb{R}^d$ , denotaremos con  $|R|$  su *medida*, que será el área cuando  $d = 2$  y el volumen cuando  $d = 3$ . Si  $S$  es una superficie en  $\mathbb{R}^3$ , y  $C$  una curva en  $\mathbb{R}^2$  o  $\mathbb{R}^3$ , también denotaremos con  $|S|$  su área y con  $|C|$  su longitud (respectivamente). Con esta notación resulta:

$$\begin{aligned} \text{vol}(R) = |R| &= \iiint_R d\text{vol} && \text{si } R \text{ es una región del espacio } \mathbb{R}^3 \\ \text{área}(R) = |R| &= \iint_R dA && \text{si } R \text{ es una región del plano } \mathbb{R}^2 \\ \text{área}(S) = |S| &= \iint_S d\sigma && \text{si } S \text{ es una superficie en } \mathbb{R}^3 \\ \text{longitud}(C) = |C| &= \int_C ds && \text{si } C \text{ es una curva en } \mathbb{R}^2 \text{ o } \mathbb{R}^3 \end{aligned}$$

De ahora en adelante utilizaremos la notación siguiente:

- $d\text{vol}$ : diferencial de volumen;
- $dA$ : diferencial de área en el plano  $\mathbb{R}^2$ ;
- $d\sigma$ : diferencial de área de superficie en  $\mathbb{R}^3$ ;
- $ds$ : diferencial de longitud de arco de curva en  $\mathbb{R}^2$  o en  $\mathbb{R}^3$ .

**Ejemplos:**

- Si consideramos el rectángulo  $R = [a, b] \times [c, d] = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\}$ , entonces  $|R| = (b - a) \times (d - c)$ .
- Si consideramos el prisma  $R = [a, b] \times [c, d] \times [e, f] = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : a \leq x \leq b, c \leq y \leq d, e \leq z \leq f\}$ , entonces  $|R| = (b - a) \times (d - c) \times (f - e)$ .
- Si  $B(x, r)$  denota la *bola* con centro en  $x$  y radio  $r$  en  $\mathbb{R}^3$ , entonces  $|B(x, r)| = \frac{4}{3}\pi r^3$ .
- Si  $D(x, r)$  denota el *disco* con centro en  $x$  y radio  $r$  en  $\mathbb{R}^2$ , entonces  $|D(x, r)| = \pi r^2$ .
- Si  $C(x, r)$  denota la *circunferencia* de centro  $x$  y radio  $r$  en  $\mathbb{R}^2$  (borde del disco  $D(x, r)$ ,  $C(x, r) = \partial D(x, r)$ ) entonces  $|C(x, r)| = 2\pi r$ .
- Si  $S(x, r)$  denota la *superficie esférica* de centro  $x$  y radio  $r$  en  $\mathbb{R}^3$  (cáscara o borde de la bola  $B(x, r)$ ,  $S(x, r) = \partial B(x, r)$ ) entonces  $|S(x, r)| = 4\pi r^2$ .

Haciendo el mismo razonamiento de antes, se cumple que si  $f$  es una función continua

$$\begin{aligned} \min_R f &\leq \frac{\iiint_R f \, d\text{vol}}{|R|} \leq \max_R f && \text{si } R \text{ es una región de } \mathbb{R}^3 \\ \min_R f &\leq \frac{\iint_R f \, dA}{|R|} \leq \max_R f && \text{si } R \text{ es una región de } \mathbb{R}^2 \\ \min_S f &\leq \frac{\iint_S f \, d\sigma}{|S|} \leq \max_S f && \text{si } S \text{ es una superficie en } \mathbb{R}^3 \\ \min_C f &\leq \frac{\int_C f \, ds}{|C|} \leq \max_C f && \text{si } C \text{ es una curva en } \mathbb{R}^2 \text{ o en } \mathbb{R}^3 \end{aligned}$$

y más aún,

$$\begin{aligned} \text{Si } \bar{f} &:= \frac{\iiint_R f \, d\text{vol}}{|R|} && \text{entonces } \iiint_R \bar{f} \, d\text{vol} = \iiint_R f \, d\text{vol} && (R \text{ región de } \mathbb{R}^3) \\ \text{Si } \bar{f} &:= \frac{\iint_R f \, dA}{|R|} && \text{entonces } \iint_R \bar{f} \, dA = \iint_R f \, dA && (R \text{ región de } \mathbb{R}^2) \\ \text{Si } \bar{f} &:= \frac{\iint_S f \, d\sigma}{|S|} && \text{entonces } \iint_S \bar{f} \, d\sigma = \iint_S f \, d\sigma && (S \text{ superficie en } \mathbb{R}^3) \\ \text{Si } \bar{f} &:= \frac{\int_C f \, ds}{|C|} && \text{entonces } \int_C \bar{f} \, ds = \int_C f \, ds && (C \text{ curva en } \mathbb{R}^2 \text{ o } \mathbb{R}^3) \end{aligned}$$

En todos estos casos diremos que  $\bar{f}$  es el valor medio de  $f$  sobre  $R$ ,  $S$  o  $C$  según corresponda.

Un resultado análogo al Teorema 1.1 en más dimensiones es el siguiente (lo enunciamos para  $\mathbb{R}^3$  pero lo mismo vale en  $\mathbb{R}^2$  cambiando  $B(x, r)$  por  $D(x, r)$  y  $d\text{vol}$  por  $dA$ ).

**Teorema 1.3.** *Si  $f$  es una función definida en  $\mathbb{R}^3$  y es continua en  $x = x_0$ , entonces*

$$\frac{1}{|B(x_0, r)|} \iiint_{B(x_0, r)} f \, d\text{vol} \longrightarrow f(x_0) \quad \text{cuando } r \rightarrow 0^+.$$

En otras palabras, si  $\{r_n\}$  es una sucesión de radios ( $r_n > 0$ ) que tiende a cero, entonces

$$\frac{1}{|B(x_0, r_n)|} \iiint_{B(x_0, r_n)} f \, d\text{vol} \longrightarrow f(x_0) \quad \text{cuando } n \rightarrow \infty.$$

**Observación 1.4.** Este teorema justifica ahora la definición de densidad puntual y la relación con la masa. Más precisamente, si  $f(x)$  es una función que cumple que

$$m(R) = \iiint_R f(x) \, d\text{vol},$$

entonces necesariamente

$$f(x) = \lim_{r \rightarrow 0^+} \frac{m(B(x, r))}{\text{vol}(B(x, r))}$$

Resultados análogos al Teorema 1.2 son los siguientes:

**Teorema 1.5.** Sea  $f$  una función definida en  $\mathbb{R}^3$ , continua en  $x_0$ . Si  $\{R_n\}_{n=1}^\infty$  es una sucesión de regiones de  $\mathbb{R}^3$  tales que  $R_n \subset B(x_0, r_n)$  y  $r_n \rightarrow 0$ , entonces

$$\frac{1}{|R_n|} \iiint_{R_n} f \, d\text{vol} \longrightarrow f(x_0) \quad \text{cuando } n \rightarrow \infty.$$

**Ejemplo 1.6.** Consideremos la función  $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ , calcular el siguiente límite

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^3} \int_1^{1+h} \int_2^{2+h} \int_3^{3+h} f(x, y, z) \, dz \, dy \, dx.$$

Las regiones de integración son cubos  $Q_h$  de lado  $h$  (volumen  $h^3$ ) que tienen un vértice en el punto  $x_0 = (1, 2, 3)$ . El cubo  $Q_h$  está entonces contenido en la bola  $B((1, 2, 3), 2h)$  de centro  $(1, 2, 3)$  y radio  $2h$ . Al hacer tender  $h$  a cero, obtenemos el valor de  $f$  en el punto  $(1, 2, 3)$ ,

$$f(1, 2, 3) = 1^2 + 2^2 + 3^2 = 14.$$

**Teorema 1.7.** Sea  $f$  una función definida en  $\mathbb{R}^3$ , continua en  $x_0$ . Si  $\{S_n\}_{n=1}^\infty$  es una sucesión de superficies de  $\mathbb{R}^3$  tales que  $S_n \subset B(x_0, r_n)$  y  $r_n \rightarrow 0$ , entonces

$$\frac{1}{|S_n|} \iint_{S_n} f \, d\sigma \longrightarrow f(x_0) \quad \text{cuando } n \rightarrow \infty.$$

**Ejemplo 1.8.** Consideremos la función  $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ , calcular el siguiente límite

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^2} \iint_{\partial Q_h} f(x, y, z) \, d\sigma,$$

donde  $Q_h$  son los cubos del ejemplo anterior, y  $\partial Q_h$  denota la superficie que recubre a  $Q_h$ . Como el área de  $\partial Q_h$  es  $6h^2$  tenemos que

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^2} \iint_{\partial Q_h} f(x, y, z) \, d\sigma = 6 \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{6h^2} \iint_{\partial Q_h} f(x, y, z) \, d\sigma = 6f(1, 2, 3),$$

puesto que los cubos  $Q_h$  cumplen las mismas hipótesis que antes.

## 1.5. Aplicaciones

En base a las observaciones de la sección anterior, podemos demostrar que:

**Teorema 1.9.** Si  $f$  es una función continua en una región  $\Omega$  de  $\mathbb{R}^3$  y  $\iiint_{B(x,r)} f \, d\text{vol} = 0$  para toda bola  $B(x,r)$  contenida en  $\Omega$ , entonces  $f \equiv 0$ .

*Demostración.* Sea  $x_0$  un punto de la región  $\Omega$ . Entonces

$$f(x_0) = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{|B(x_0, r)|} \iiint_{B(x_0, r)} f \, d\text{vol} = 0. \quad \square$$

**Teorema 1.10.** Si  $f$  es una función continua en una región  $\Omega$  de  $\mathbb{R}^3$  y  $\iiint_Q f \, d\text{vol} = 0$  para todo cubo  $Q$  contenido en  $\Omega$ , entonces  $f \equiv 0$ .

*Demostración.* Sea  $x_0$  un punto de la región  $\Omega$ , y denotemos con  $Q_h$  al cubo con centro  $x_0$  y lado  $h$ . Entonces

$$f(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{|Q_h|} \iiint_{Q_h} f \, d\text{vol} = 0. \quad \square$$

**Observación 1.11.** Es importante notar que si uno sabe que  $\iiint_Q f \, d\text{vol} = 0$  sobre una región  $Q$ , esto no implica necesariamente que  $f = 0$  en todos los puntos de  $Q$ .

Lo que afirmamos anteriormente es que si  $\iiint_Q f \, d\text{vol} = 0$  para todos los cubos  $Q$  contenidos en una región  $\Omega$  entonces  $f$  es cero en todos los puntos de  $\Omega$ . Por ejemplo, la función  $f(x, y, z) = xy$  tiene integral cero sobre el cubo  $[-h, h] \times [-h, h] \times [-h, h]$  y sin embargo no es cero en todos los puntos. También la función  $\text{sen}(x)$  tiene integral cero sobre el intervalo  $[-\pi, \pi]$ , y sin embargo no es idénticamente cero.

**Observación 1.12.** Sin embargo, si uno sabe que  $\iiint_Q f \, d\text{vol} = 0$  sobre una región  $Q$ , y también sabe que la función  $f$  no cambia de signo, por ejemplo, si se sabe que  $f(x) \geq 0$  para todo  $x \in Q$ , entonces sí se puede concluir que  $f(x) = 0$  para todo  $x \in Q$ .

## 1.6. Valor medio generalizado

Vimos en la sección 1.3 que si  $f$  es una función continua en  $\mathbb{R}$ , entonces

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{1}{2h} \int_{x_0-h}^{x_0+h} f(x) \, dx = f(x_0).$$

Si definimos

$$\chi_h(x) = \begin{cases} \frac{1}{2h} & \text{si } -h \leq x \leq h \\ 0 & \text{en c.o.c.} \end{cases}$$

Entonces  $\frac{1}{2h} \int_{x_0-h}^{x_0+h} f(x) \, dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \chi_h(x_0 - x) \, dx$ , y luego

$$\lim_{h \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \chi_h(x_0 - x) \, dx = f(x_0).$$

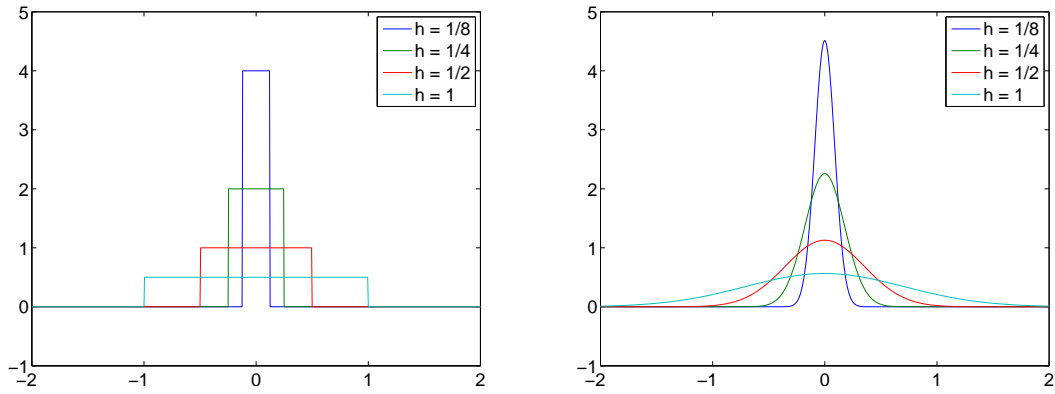


Figura 1.1: Gráfico de  $\chi_h(x)$  (izquierda) y de  $\rho_h(x)$  (derecha) para varios valores de  $h$ .

La integral  $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \chi_h(x_0 - x) dx$  se llama convolución de  $f$  y  $\chi_h$ , y se denota por  $f * \chi_h(x_0)$ , es decir

$$f * \chi_h(x_0) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \chi_h(x_0 - x) dx \longrightarrow f(x_0) \quad (\text{cuando } h \rightarrow 0^+).$$

Observemos que por un cambio de variables resulta

$$f * \chi_h(x_0) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \chi_h(x_0 - x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(x_0 - x) \chi_h(x) dx = \chi_h * f(x_0)$$

y por lo tanto también

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x_0 - x) \chi_h(x) dx \longrightarrow f(x_0) \quad (\text{cuando } h \rightarrow 0^+).$$

En la Figura 1.1 (izquierda) se muestran algunas funciones  $\chi_h(x)$ . Observamos que a medida que  $h$  se hace más cercano a cero, la función  $\chi_h$  se *concentra* en intervalos más pequeños alrededor de cero, pero que el área bajo el gráfico es siempre 1 ( $\int_{-\infty}^{\infty} \chi_h(x) dx = 1$ ). Otra observación que podemos hacer es que si definimos

$$\chi(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{si } -1 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{en c.o.c.} \end{cases}$$

entonces resulta que  $\chi_h(x) = \frac{1}{h} \chi\left(\frac{x}{h}\right)$ .

Puede demostrarse que el mismo resultado se cumple si cambiamos  $\chi(x)$  por cualquier función positiva que tenga integral 1. Por ejemplo, si consideramos la *campana de Gauss*

$$\rho(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2}$$

y definimos  $\rho_h(x) = \frac{1}{h} \rho\left(\frac{x}{h}\right)$  (ver Figura 1.1 derecha), entonces cuando  $h \rightarrow 0$

$$f * \rho_h(x_0) = \frac{1}{h\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-\left(\frac{x-x_0}{h}\right)^2} dx = \frac{1}{h\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x - x_0) e^{-\left(\frac{x}{h}\right)^2} dx \longrightarrow f(x_0).$$

Las sucesiones de funciones que se *concentran* alrededor del origen y tienen esta propiedad se denominan *aproximaciones de la identidad*, pues al hacer la convolución con una función  $f$  y tomar límite, se recupera el valor de  $f$ . También se dice usualmente que *tienden a la delta de Dirac*.

## 1.7. Ejercicios

**1.1.** Dar ejemplos de funciones continuas que no sean idénticamente nulas en el dominio indicado, y cuyas integrales den cero.

- (a) Intervalo  $[0, 1]$  de  $\mathbb{R}$ .
- (b) Cuadrado  $[0, 1] \times [0, 1]$  de  $\mathbb{R}^2$ .
- (c) Cubo  $[0, 1] \times [0, 1] \times [0, 1]$  de  $\mathbb{R}^3$ .

**1.2.** Calcular los siguientes límites para  $f(x, y, z) = 2x + y - z^2$  (**NO calcular ninguna integral**, usar los teoremas del Capítulo 1).

- (a)  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^3} \int_1^{1+h} \int_1^{1+h} \int_1^{1+h} f(x, y, z) dz dy dx$
- (b)  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^3} \int_{1-h}^{1+h} \int_{1-h}^{1+h} \int_{1-h}^{1+h} f(x, y, z) dz dy dx$
- (c)  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^2} \int_1^{1+h} \int_1^{1+h} \int_1^{1+h} f(x, y, z) dz dy dx$
- (d)  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^3} \int_{2+h}^{2+2h} \int_{-1-h}^{-1+h} \int_0^h f(x, y, z) dz dy dx$
- (e)  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^2} \int_{-1}^{-1+h} \int_4^{4+h} f(x, y, 0) dy dx$
- (f)  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^2} \int_{-1}^{-1+h} \int_4^{4+h} f(x, y, 2) dy dx$
- (g)  $\lim_{r \rightarrow 0^+} \frac{1}{r^3} \iiint_{B((-1,0,1),r)} f d\text{vol}$
- (h)  $\lim_{r \rightarrow 0^+} \frac{1}{r} \int_{C_r} f ds$ , donde  $C_r$  denota la circunferencia de radio  $r$  y centro  $(1, 1, 0)$  contenida en el plano  $xy$ .

**1.3.** Demostrar que si  $f$  y  $g$  son dos funciones continuas en  $\mathbb{R}^3$  y

$$\iiint_R f d\text{vol} = \iiint_R g d\text{vol},$$

para toda región  $R$  del espacio  $\mathbb{R}^3$ , entonces  $f(x_0) = g(x_0)$  para todo  $x_0 \in \mathbb{R}^3$ .

**1.4.** Calcular los siguientes límites:

$$(a) \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{1}{h\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right) e^{-\left(\frac{x}{h}\right)^2} dx$$

$$(b) \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{1}{\sqrt{t}} \int_{-\infty}^{\infty} \cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right) e^{-\frac{x^2}{t}} dx$$

\* **1.5.** Sea  $f$  una función definida en  $\mathbb{R}$ , integrable sobre todo intervalo acotado. Demostrar que si  $f$  es continua en  $x_0$ , entonces

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{1}{2h} \int_{x_0-h}^{x_0+h} f(x) dx = f(x_0).$$

\* **1.6.** Sea  $f$  una función definida en  $\mathbb{R}$ , integrable sobre todo intervalo acotado. Demostrar que si  $f$  es continua en  $x_0$ , e  $\{I_n\}_{n=1}^{\infty}$  es una sucesión de intervalos para la que existe una sucesión de números positivos  $\{h_n\}_{n=1}^{\infty}$  tales que  $I_n \subset [x_0 - h_n, x_0 + h_n]$  para  $n = 1, 2, \dots$  y  $h_n \rightarrow 0$  cuando  $n \rightarrow \infty$  entonces

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\text{longitud}(I_n)} \int_{I_n} f(x) dx = f(x_0).$$

\* **1.7.** Sea  $f$  una función definida en  $\mathbb{R}^3$ , integrable sobre toda bola. Demostrar que si  $f$  es continua en  $x_0$ , entonces

$$\frac{1}{|B(x_0, r)|} \iiint_{B(x_0, r)} f d\text{vol} \rightarrow f(x_0) \quad \text{cuando } r \rightarrow 0.$$

\* **1.8.** Sea  $f$  una función definida en  $\mathbb{R}^3$ , integrable sobre todo conjunto abierto acotado y continua en  $x_0$ . Demostrar que si  $\{R_n\}_{n=1}^{\infty}$  es una sucesión de conjuntos abiertos no-vacíos de  $\mathbb{R}^3$  tales que  $R_n \subset B(x_0, r_n)$  para  $n = 1, 2, \dots$  y  $r_n \rightarrow 0$  cuando  $n \rightarrow \infty$ , entonces

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{|R_n|} \iiint_{R_n} f d\text{vol} = f(x_0).$$

\* **1.9.** Sea  $f$  una función continua en  $\mathbb{R}^3$ . Si  $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$  es una sucesión de superficies (suficientemente suaves, donde esté definida la integral) de  $\mathbb{R}^3$  tales que  $S_n \subset B(x_0, r_n)$  para  $n = 1, 2, \dots$  y  $r_n \rightarrow 0$  cuando  $n \rightarrow \infty$ , entonces

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{|S_n|} \iint_{S_n} f d\sigma = f(x_0).$$

Interesante: las superficies podrían ser bastante raras, y “grandes” de manera que  $|S_n| \rightarrow \infty$  y aún así el límite ser  $f(x_0)$ .

\* **1.10.** Dada una función  $f \in L^2(\Omega)$ , con  $\Omega$  un subconjunto medible acotado de  $\mathbb{R}^d$  ( $d \in \mathbb{N}$ ), demostrar que el *valor medio de  $f$*  sobre  $\Omega$  definido por  $\bar{f} = \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} f$  es el valor de  $t$  que minimiza la función  $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  dada por  $\phi(t) = \int_{\Omega} |f(x) - t|^2 dx$ .

\* **1.11.** Sea  $\Omega$  un conjunto abierto no vacío de  $\mathbb{R}^d$  y sea  $f$  una función continua en  $\Omega$ . Demostrar que si  $\int_{\Omega} f\phi dx = 0$  para toda  $\phi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  de la forma

$$\phi(x) = \phi_{x_0,r}(x) = (r - |x - x_0|)_+ = \max\{0, r - |x - x_0|\}, \quad \text{con } B(x_0, 2r) \subset \Omega,$$

entonces  $f \equiv 0$  en  $\Omega$ . Graficar algunas funciones  $\phi$  de esa forma para ayudarse a entender.

\* **1.12.** Sea  $\Omega$  un conjunto abierto no vacío de  $\mathbb{R}^d$  y sea  $f$  una función continua en  $\Omega$ . Demostrar que si  $\int_{\Omega} f\phi dx = 0$  para toda  $\phi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  continua en  $\Omega$ , entonces  $f \equiv 0$  en  $\Omega$ .

\*\* **1.13.** Sea  $\rho : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$  definida por

$$\rho(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{(1-|x|^2)^2}}, & \text{si } |x| < 1, \\ 0 & \text{si } |x| > 1. \end{cases}$$

Demostrar que:

- $\rho \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$ ,
- $\rho(x) > 0$  para todo  $x \in \mathbb{R}^d$  con  $|x| < 1$ ,
- $\rho(x) = 0$  para todo  $x \in \mathbb{R}^d$  con  $|x| \leq 1$ .

\*\* **1.14.** Sea  $\Omega$  un conjunto abierto no vacío de  $\mathbb{R}^d$  y sea  $f$  una función continua en  $\Omega$ . Demostrar que si  $\int_{\Omega} f\phi dx = 0$  para toda  $\phi \in C_0^\infty(\Omega)$  entonces  $f \equiv 0$  en  $\Omega$ .

Aclaraciones y ayuda:

- $C_0^\infty(\Omega)$  denota el espacio de las funciones infinitamente diferenciables en  $\Omega$  que tienen soporte compacto contenido en  $\Omega$ .
- El soporte de una función continua es la clausura del conjunto de puntos donde no se anula, es decir  $\text{sop } \phi = \overline{\{x \in \Omega : \phi(x) \neq 0\}}$ .
- Ayuda: la función  $\rho$  del ejercicio anterior es  $C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ , trasladándola y *encogiéndola* se la puede hacer  $C_0^\infty(\Omega)$  y se la puede utilizar como a las funciones  $\phi_{x_0,r}$  del ejercicio 1.11 .



# Capítulo 2

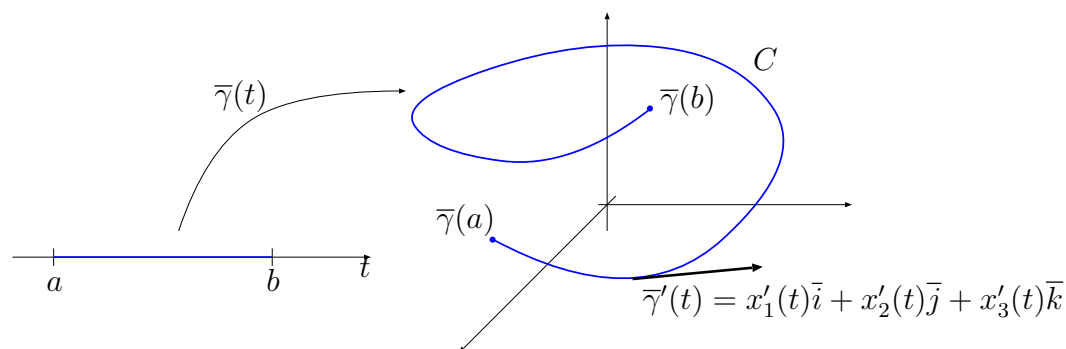
## Integrales de línea y de superficie

El objetivo de este capítulo es solamente repasar lo que significa integrar sobre una línea o sobre una superficie, y cuáles son las fórmulas que se utilizan.

### 2.1. Integrales de línea

Consideremos una curva  $C$  parametrizada por una función  $\bar{\gamma}(t)$ , para  $t \in [a, b]$ :

$$\bar{\gamma}(t) = x_1(t)\bar{i} + x_2(t)\bar{j} + x_3(t)\bar{k}$$



La fórmula para calcular la longitud de esta curva es la siguiente

$$\text{longitud}(C) = \int_C ds = \int_a^b |\bar{\gamma}'(t)| dt = \int_a^b \sqrt{x'_1(t)^2 + x'_2(t)^2 + x'_3(t)^2} dt,$$

y llamamos *diferencial de longitud de arco* a

$$ds = |\bar{\gamma}'(t)| dt = \sqrt{x'_1(t)^2 + x'_2(t)^2 + x'_3(t)^2} dt.$$

La integral de una función *escalar*  $f$  definida sobre  $C$  se calcula de la siguiente manera:

$$\int_C f ds = \int_a^b f(\bar{\gamma}(t)) |\bar{\gamma}'(t)| dt = \int_a^b f(x_1(t), x_2(t), x_3(t)) \sqrt{x'_1(t)^2 + x'_2(t)^2 + x'_3(t)^2} dt.$$

Si por ejemplo  $f$  representa una densidad lineal, que es la masa por unidad de longitud de un alambre que ocupa la curva  $C$ , entonces dicha integral es la masa del alambre.

Cuando se pretende integrar una función vectorial  $\overline{F}$  sobre una curva  $C$ , en general se entiende que se quiere integrar la componente de  $\overline{F}$  *tangencial* a la curva (que es una función escalar), es decir

$$\int_C \overline{F} \cdot d\overline{s} = \int_C \overline{F} \cdot \overline{\tau} ds,$$

donde  $\overline{\tau}$  denota un vector tangencial a la curva  $C$  con una orientación elegida. Queda claro que si cambiamos la orientación del vector  $\tau$  entonces cambia el signo del resultado de la integral.

Si  $\overline{\gamma}$  parametriza la curva dada, entonces una elección obvia del vector tangente es  $\overline{\tau} = \frac{\overline{\gamma}'}{|\overline{\gamma}'|}$ . Por lo tanto

$$\int_C \overline{F} \cdot d\overline{s} = \int_a^b \left( \overline{F}(\overline{\gamma}(t)) \cdot \frac{\overline{\gamma}'(t)}{|\overline{\gamma}'(t)|} \right) |\overline{\gamma}'(t)| dt = \int_a^b \overline{F}(\overline{\gamma}(t)) \cdot \overline{\gamma}'(t) dt.$$

Si  $\overline{F}$  es un campo de fuerzas, entonces  $\int_C \overline{F} \cdot d\overline{s}$  es el trabajo realizado por el campo de fuerzas  $F$  sobre una partícula que recorre la curva  $C$  (en la dirección indicada por la tangente elegida). Si  $\overline{V}$  es un campo de velocidades y  $C$  es una curva cerrada, entonces  $\int_C \overline{V} \cdot d\overline{s}$  es la *circulación* del campo  $V$  a lo largo de la curva  $C$ .

**Observación 2.1.** En muchos casos no hará falta recurrir a la parametrización ni a escribir integrales complicadas, pues todo se simplifica antes de empezar a calcular. Veamos un ejemplo.

**Ejemplo 2.2.** Consideremos un campo de fuerzas  $\overline{F}$  dado por

$$\overline{F}(x_1, x_2, x_3) = -x_2\overline{i} + x_1\overline{j},$$

y calculemos el trabajo ejercido por  $\overline{F}$  sobre una partícula que recorre la circunferencia  $C$  de radio uno y centro  $\overline{0}$  sobre el plano  $xy$ , en sentido antihorario cuando lo vemos desde el lado en que  $x_3 > 0$ . Observamos que si el punto  $x_1\overline{i} + x_2\overline{j}$  pertenece a la circunferencia entonces el vector  $-x_2\overline{i} + x_1\overline{j}$  es tangente a la misma (y es unitario, pues  $|-x_2\overline{i} + x_1\overline{j}| = |x_1\overline{i} + x_2\overline{j}| = x_1^2 + x_2^2 = 1$ ). Por lo tanto

$$\overline{F}(x_1, x_2, x_3) \cdot \overline{\tau} = (-x_2\overline{i} + x_1\overline{j}) \cdot (-x_2\overline{i} + x_1\overline{j}) = 1.$$

Por lo tanto, el trabajo es

$$\int_C \overline{F} \cdot d\overline{s} = \int_C \overline{F} \cdot \overline{\tau} ds = \int_C 1 ds = \text{longitud}(C) = 2\pi.$$

## 2.2. Integrales de superficie

Antes de hablar de integrales de superficie conviene recordar la definición y algunas propiedades del producto vectorial o producto cruz de vectores. Dados dos vectores  $\overline{X} = x_1\overline{i} + x_2\overline{j} + x_3\overline{k}$  y  $\overline{Y} = y_1\overline{i} + y_2\overline{j} + y_3\overline{k}$  del espacio tridimensional  $\mathbb{R}^3$ , se define su producto vectorial por la fórmula

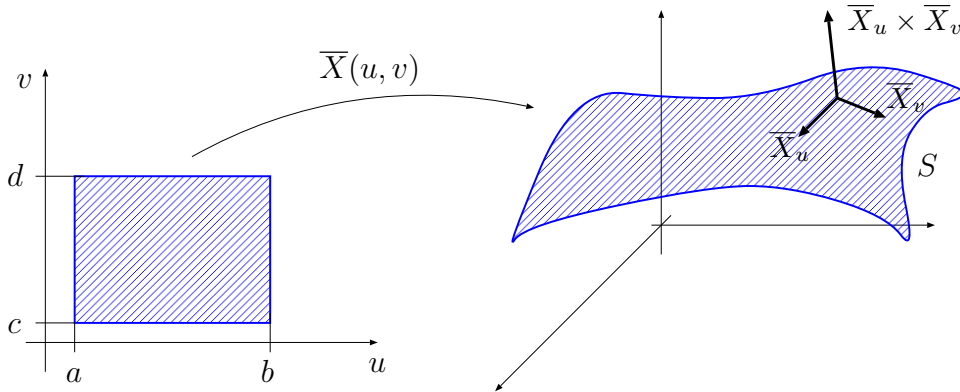
$$\overline{X} \times \overline{Y} = \det \begin{pmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{pmatrix} = (x_2y_3 - x_3y_2)\overline{i} + (x_3y_1 - x_1y_3)\overline{j} + (x_1y_2 - x_2y_1)\overline{k}.$$

Este producto tiene las siguientes propiedades:

- $\bar{X} \times \bar{Y} = -\bar{Y} \times \bar{X}$ .
- Si  $\bar{X}$  y  $\bar{Y}$  son paralelos, entonces  $\bar{X} \times \bar{Y} = \bar{0}$ .
- Si  $\bar{X}$  y  $\bar{Y}$  no son paralelos, entonces
  - $\bar{X} \times \bar{Y}$  es un vector perpendicular a  $\bar{X}$  y a  $\bar{Y}$ , i.e.,  $\bar{X} \times \bar{Y} \cdot \bar{X} = \bar{X} \times \bar{Y} \cdot \bar{Y} = 0$ .
  - $|\bar{X} \times \bar{Y}|$  es el área del paralelogramo que tiene a  $\bar{X}$  y a  $\bar{Y}$  como lados.

Consideremos ahora una superficie  $S$  parametrizada por la función vectorial

$$\bar{X}(u, v) = x(u, v)\bar{i} + y(u, v)\bar{j} + z(u, v)\bar{k}, \quad a < u < b, \quad c < v < d.$$



Si  $X_u = x_u\bar{i} + y_u\bar{j} + z_u\bar{k}$  y  $X_v = x_v\bar{i} + y_v\bar{j} + z_v\bar{k}$  (donde los subíndices  $u$  y  $v$  denotan derivadas con respecto a  $u$  y a  $v$  respectivamente), la fórmula para calcular el área de esta superficie es

$$\text{área}(S) = \iint_S d\sigma = \int_a^b \int_c^d |\bar{X}_u \times \bar{X}_v| dv du$$

La integral de una función escalar  $f$  definida sobre  $S$  se calcula de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \iint_S f d\sigma &= \int_a^b \int_c^d f(\bar{X}(u, v)) |\bar{X}_u \times \bar{X}_v| dv du \\ &= \int_a^b \int_c^d f(x(u, v), y(u, v), z(u, v)) |\bar{X}_u \times \bar{X}_v| dv du \end{aligned}$$

**Observación 2.3.** Si la superficie es un rectángulo en un plano paralelo a uno de los planos coordenados, entonces las fórmulas se simplifican significativamente. Por ejemplo, si la superficie es el rectángulo

$$S: \quad a \leq x \leq b, \quad c \leq y \leq d, \quad z = z_0,$$

entonces, utilizamos directamente  $x$  e  $y$  como variables en lugar de  $u$  y  $v$ , y la parametrización es:

$$\bar{X}(x, y) = x\bar{i} + y\bar{j} + z_0\bar{k}$$

De manera que  $\bar{X}_x = \bar{i}$ ,  $\bar{X}_y = \bar{j}$  y  $\bar{X}_x \times \bar{X}_y = \bar{k}$  y  $|\bar{X}_x \times \bar{X}_y| = 1$ , por lo que

$$\iint_S f d\sigma = \int_a^b \int_c^d f(x, y, z_0) dy dx.$$

Cuando se pretende integrar una función vectorial  $\vec{F}$  sobre una superficie  $S$ , en general se entiende que se quiere integrar la componente de  $\vec{F}$  perpendicular a la superficie, es decir, se quiere calcular

$$\iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} \, d\sigma,$$

donde  $\vec{n}$  denota el vector *normal* a la superficie  $S$ : perpendicular y de magnitud uno. En cada punto de la superficie hay dos vectores normales, que apuntan en direcciones opuestas. El signo de esta integral depende de qué vector normal se elige. La elección del vector normal depende de lo que se quiera calcular. Por ejemplo, dado un campo de velocidades  $\vec{V}$ , si se quiere calcular el flujo de  $V$  hacia *afuera* de la superficie esférica  $S$  de centro  $\vec{0}$  y radio 1, deberá calcularse  $\iint_S \vec{V} \cdot \vec{n} \, d\sigma$  eligiendo  $\vec{n}$  de manera que apunte hacia *afuera*.

**Observación 2.4.** Al igual que para curvas, también suele ocurrir que no haga falta recurrir a la parametrización, pues todo se simplifica antes de comenzar el cálculo. Veamos un ejemplo.

**Ejemplo 2.5.** Calcular el flujo del campo vectorial  $\vec{F} = x_1 x_2 \vec{i} + x_3 \vec{j} + (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) \vec{k}$  a través de la superficie

$$S: \quad x_1 = 3, \quad 2 \leq x_2 \leq 4, \quad 1 \leq x_3 \leq 6,$$

en la dirección en que  $x_1$  crece.

Observamos primero que  $\vec{n} = \vec{i}$  y que

$$\iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} \, d\sigma = \int_2^4 \int_1^6 \vec{F}(3, x_2, x_3) \cdot \vec{i} \, dx_3 \, dx_2,$$

Luego, como  $\vec{F} \cdot \vec{i} = x_1 x_2$  tenemos que

$$\iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} \, d\sigma = \int_2^4 \int_1^6 3x_2 \, dx_3 \, dx_2 = 15 \int_2^4 x_2 \, dx_2 = 15 \times 6 = 90.$$

**Ejemplo 2.6.** Flujo del campo de Newton. El campo de Newton está dado por la fórmula  $\vec{V} = -\frac{\vec{r}}{r^3}$ , donde  $\vec{r}$  denota el vector posición  $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$  y  $r = |\vec{r}|$  es la magnitud de  $\vec{r}$ , es decir  $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ . Calculemos el flujo del campo de Newton hacia afuera de la superficie esférica  $S$  de centro  $\vec{0}$  y radio 1. Si  $\vec{r}$  está sobre esta superficie, entonces  $r = 1$  y además, el vector normal exterior es exactamente el radio  $\vec{r}$ . Luego

$$\iint_S \vec{V} \cdot \vec{n} \, d\sigma = \iint_S -\frac{\vec{r}}{r^3} \cdot \vec{r} \, d\sigma = \iint_S -\frac{\vec{r} \cdot \vec{r}}{r^3} \, d\sigma = -\iint_S 1 \, d\sigma = -\text{área}(S) = -4\pi.$$

En el caso en que se requiera calcular la integral de  $\vec{F} \cdot \vec{n}$  sobre una superficie  $S$  utilizando una parametrización, conviene observar lo siguiente: en los puntos donde  $\vec{X}_u \times \vec{X}_v \neq \vec{0}$ ,

$$\vec{n} = \pm \frac{\vec{X}_u \times \vec{X}_v}{|\vec{X}_u \times \vec{X}_v|},$$

donde la elección del signo depende de la dirección del flujo que se quiere calcular. Por lo tanto:

$$\begin{aligned} \iint_S \bar{F} \cdot \bar{n} \, d\sigma &= \int_a^b \int_c^d \bar{F}(\bar{X}(u, v)) \cdot \bar{n} |\bar{X}_u \times \bar{X}_v| \, dv \, du \\ &= \pm \int_a^b \int_c^d \bar{F}(\bar{X}(u, v)) \cdot \frac{\bar{X}_u \times \bar{X}_v}{|\bar{X}_u \times \bar{X}_v|} |\bar{X}_u \times \bar{X}_v| \, dv \, du \\ &= \pm \int_a^b \int_c^d \bar{F}(\bar{X}(u, v)) \cdot (\bar{X}_u \times \bar{X}_v) \, dv \, du \end{aligned}$$

## 2.3. Ejercicios

**2.1.** Calcular el trabajo ejercido por la fuerza  $\bar{F}$  del Ejemplo 2.2 sobre una partícula que recorre la circunferencia de centro  $\bar{0}$  y radio  $R$  que se encuentra sobre el plano  $xy$ , en sentido horario cuando lo vemos desde el lado en que  $x_3 > 0$ .

**2.2.** Sea  $\bar{V}(x_1, x_2, x_3) = \omega_0(-x_2 \bar{i} + x_1 \bar{j})$  con  $\omega_0$  una constante (velocidad angular). Sea

$$C_R = \{(R \cos t, R \sin t, 0) : t \in [0, 2\pi)\}, \quad R > 0.$$

Calcular la circulación de  $\bar{V}$  a lo largo de  $C_R$ .

**2.3.** Calcular el flujo del campo de Newton hacia afuera de la superficie esférica  $S$  de centro  $\bar{0}$  y radio  $R$ , con  $R > 0$  fijo, arbitrario. Recordar que  $\bar{r} \cdot \bar{r} = r^2$  y que sobre la superficie esférica  $S$ , se cumple que  $r = R$ .

**2.4.** Hallar la masa y el centro de gravedad de un alambre delgado que tiene la forma de un cuarto de círculo  $x_1^2 + x_2^2 = r^2$  ( $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 = 0$ ) si la densidad en el punto  $(x_1, x_2)$  del mismo es  $\rho(x_1, x_2) = x_1 + x_2$ . (Nota: La coordenada  $i$ -ésima del centro de gravedad está dada por  $\frac{\int_C x_i \rho(x_1, x_2) \, ds}{\int_C \rho(x_1, x_2) \, ds}$ . ¡Oh casualidad! un promedio de la variable  $x_i$  ponderado por  $\rho$ .)

**2.5.** Hallar la masa y el centro de gravedad de una cúpula de densidad constante  $\rho$  que ocupa la superficie  $x_3 = 20 - x_1^2 - x_2^2$  con  $x_1^2 + x_2^2 \leq 25$ . (Nota: La coordenada  $i$ -ésima del centro de gravedad está dada por  $\frac{\int_S x_i \rho \, d\sigma}{\int_S \rho \, d\sigma}$ .) Dejar expresadas las integrales. No hace falta calcularlas.

## Bibliografía complementaria

[Marsden Tromba] Jerrold E. Marsden, Anthony J. Tromba, *Cálculo Vectorial*, Addison-Wesley Iberoamericana.

# Capítulo 3

## Algunos resultados del Cálculo Vectorial

### 3.1. Definición de operadores diferenciales

En esta sección recordamos la definición de los operadores diferenciales más usuales. Su significado físico quedará claro en las secciones siguientes.

El operador nabla  $\bar{\nabla}$  se define por

$$\bar{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x} \bar{i} + \frac{\partial}{\partial y} \bar{j} + \frac{\partial}{\partial z} \bar{k} \quad \text{o por} \quad \bar{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x_1} \bar{i} + \frac{\partial}{\partial x_2} \bar{j} + \frac{\partial}{\partial x_3} \bar{k},$$

dependiendo de si estamos llamando  $\{x, y, z\}$  o  $\{x_1, x_2, x_3\}$  a las coordenadas cartesianas ortogonales usuales del espacio  $\mathbb{R}^3$ , respectivamente. En esta sección usaremos  $\{x_1, x_2, x_3\}$  a tal efecto.

Recordemos que dada una región  $\Omega$  y un número entero no-negativo, un campo escalar se dice  $C^k(\Omega)$  si todas las derivadas parciales de orden menor o igual a  $k$  existen y con continuas en  $\Omega$ . Diremos que un campo es  $C^k$  cuando se sobreentiende la región a la que se hace referencia. Un campo vectorial es  $C^k$  si todas sus componentes son  $C^k$ .

**Gradiente** Dado un campo *escalar*  $f$ , el gradiente se define por:

$$\text{grad } f = \bar{\nabla} f = \left( \frac{\partial}{\partial x_1} \bar{i} + \frac{\partial}{\partial x_2} \bar{j} + \frac{\partial}{\partial x_3} \bar{k} \right) f = \frac{\partial f}{\partial x_1} \bar{i} + \frac{\partial f}{\partial x_2} \bar{j} + \frac{\partial f}{\partial x_3} \bar{k}.$$

El gradiente de un campo escalar es entonces un campo vectorial.

**Divergencia** Dado un campo vectorial  $\bar{V} = V_1 \bar{i} + V_2 \bar{j} + V_3 \bar{k}$ , la divergencia se define por

$$\text{div } \bar{V} = \bar{\nabla} \cdot \bar{V} = \left( \frac{\partial}{\partial x_1} \bar{i} + \frac{\partial}{\partial x_2} \bar{j} + \frac{\partial}{\partial x_3} \bar{k} \right) \cdot (V_1 \bar{i} + V_2 \bar{j} + V_3 \bar{k}) = \frac{\partial V_1}{\partial x_1} + \frac{\partial V_2}{\partial x_2} + \frac{\partial V_3}{\partial x_3}.$$

La divergencia de un campo vectorial es entonces un campo escalar.

Si un campo vectorial tiene divergencia nula, se dice que es *solenoidal*. Si el campo vectorial corresponde a la velocidad de un fluido, se dice que el flujo es *incompresible*.

**Laplaciano.** Dado un campo escalar  $f$  se define el Laplaciano como *la divergencia del gradiente*

$$\nabla^2 f = \operatorname{div} \operatorname{grad} f = \nabla \cdot (\nabla f) = \nabla \cdot \left( \frac{\partial f}{\partial x_1} \bar{i} + \frac{\partial f}{\partial x_2} \bar{j} + \frac{\partial f}{\partial x_3} \bar{k} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial x_3^2}.$$

Si un campo escalar tiene Laplaciano nulo, se dice que es *armónico*.

**Rotor.** Dado un campo vectorial  $\bar{V} = V_1 \bar{i} + V_2 \bar{j} + V_3 \bar{k}$ , el rotor o rotacional se define por

$$\nabla \times \bar{V} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ \frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_3} \\ V_1 & V_2 & V_3 \end{vmatrix} = \left( \frac{\partial V_3}{\partial x_2} - \frac{\partial V_2}{\partial x_3} \right) \bar{i} + \left( \frac{\partial V_1}{\partial x_3} - \frac{\partial V_3}{\partial x_1} \right) \bar{j} + \left( \frac{\partial V_2}{\partial x_1} - \frac{\partial V_1}{\partial x_2} \right) \bar{k}.$$

Si un campo vectorial tiene rotor nulo, entonces se dice que es *irrotacional*.

**Observación 3.1.** Vale la pena recordar algunas identidades útiles:

- Si  $\bar{V}$  es un campo vectorial  $C^2$ , entonces la divergencia del rotor es cero, i.e.,

$$\nabla \cdot \nabla \times \bar{V} = 0.$$

- Si  $f$  es un campo escalar  $C^2$ , entonces el rotor del gradiente es nulo, i.e.,

$$\nabla \times \nabla f = \bar{0}.$$

- Todo campo vectorial  $C^1$  puede escribirse como la suma de un campo vectorial solenoidal y uno irrotacional. Es decir, si  $\bar{V}$  es un campo vectorial, entonces existen dos campos vectoriales  $\bar{\Psi}$  y  $\bar{\Phi}$  tales que

$$\bar{V} = \bar{\Psi} + \bar{\Phi}, \quad \text{con} \quad \nabla \cdot \bar{\Psi} = 0 \quad \text{y} \quad \nabla \times \bar{\Phi} = \bar{0}.$$

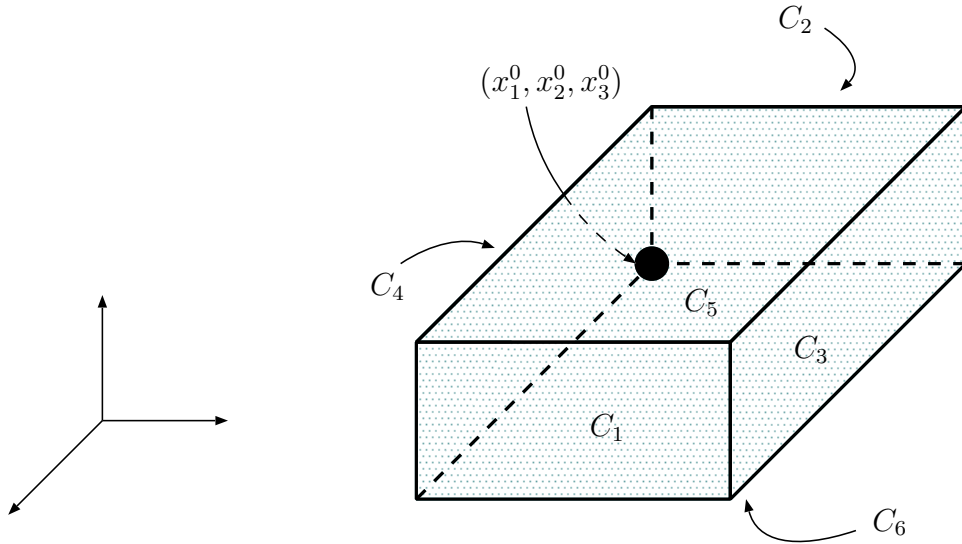
Esto se conoce como *descomposición de Helmholtz*.

## 3.2. Divergencia y flujo

Sea  $\bar{V} = V_1 \bar{i} + V_2 \bar{j} + V_3 \bar{k} = (V_1, V_2, V_3)$  un campo vectorial en el espacio, por ejemplo el campo de velocidades de un fluido en un cierto instante de tiempo, en un sistema de coordenadas cartesianas ortogonales  $\{x_1, x_2, x_3\}$ . Tomamos un punto  $\bar{x}^0 = (x_1^0, x_2^0, x_3^0)$  en el espacio dentro de la región en que  $\bar{V}$  está bien definido y es  $C^1$ . Sea  $R$  un paralelepípedo con vértice en  $\bar{x}^0$ , dado por

$$\begin{aligned} R &= [x_1^0, x_1^0 + h_1] \times [x_2^0, x_2^0 + h_2] \times [x_3^0, x_3^0 + h_3] \\ &= \{(x_1, x_2, x_3) : x_1^0 \leq x_1 \leq x_1^0 + h_1; x_2^0 \leq x_2 \leq x_2^0 + h_2; x_3^0 \leq x_3 \leq x_3^0 + h_3\}. \end{aligned}$$

Sea  $S = \partial R$  la frontera de  $R$ . La superficie  $S$  se descompone en seis caras planas  $C_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, 6$ .



Como las aristas tienen área nula, tendremos que

$$\iint_S \bar{V} \cdot \bar{n} d\sigma = \sum_{i=1}^6 \iint_{C_i} \bar{V} \cdot \bar{n} d\sigma,$$

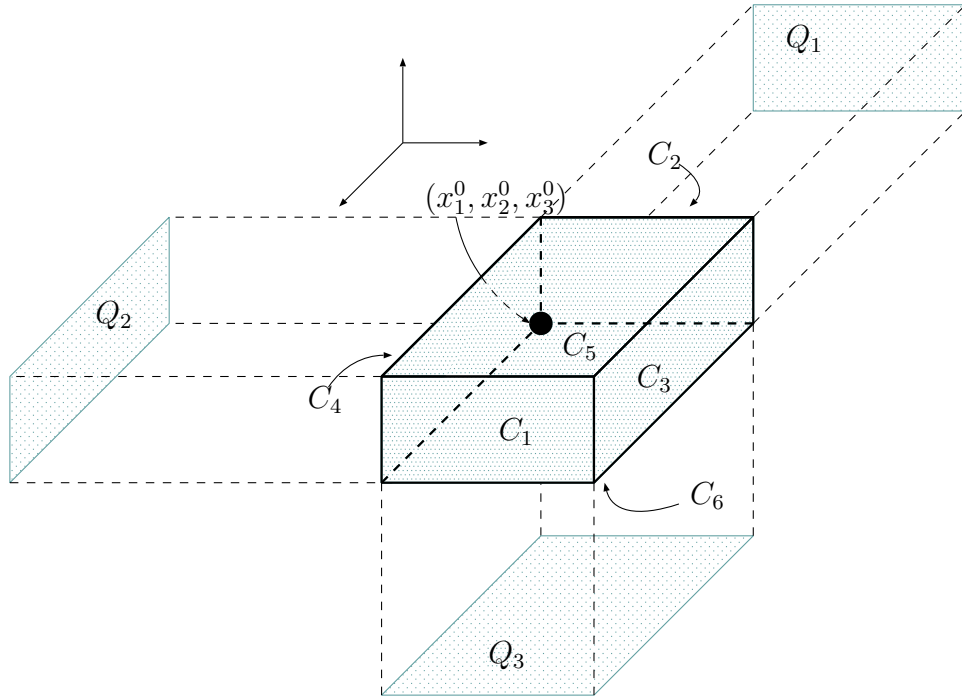
todas las integrales son de superficie en los correspondientes dominios y  $\bar{n}$  es la normal exterior. Hagamos el cálculo para las caras  $C_1$  y  $C_2$ . Puesto que sobre  $C_1$  la normal exterior es  $\bar{e}_1 = \bar{i}$  y sobre  $C_2$  la normal exterior es  $-\bar{e}_1 = -\bar{i}$ , tenemos que

$$\begin{aligned} \iint_{C_1} \bar{V} \cdot \bar{n} d\sigma &= \iint_{C_1} \bar{V} \cdot \bar{i} d\sigma = \iint_{C_1} V_1 d\sigma = \int_{x_2^0}^{x_2^0+h_2} \int_{x_3^0}^{x_3^0+h_2} V_1(x_1^0 + h_1, x_2, x_3) dx_3 dx_2, \\ \iint_{C_2} \bar{V} \cdot \bar{n} d\sigma &= \iint_{C_2} \bar{V} \cdot (-\bar{i}) d\sigma = - \iint_{C_2} V_1 d\sigma = - \int_{x_2^0}^{x_2^0+h_2} \int_{x_3^0}^{x_3^0+h_2} V_1(x_1^0, x_2, x_3) dx_3 dx_2. \end{aligned}$$

Definamos ahora  $Q_1 = [x_2^0, x_2^0 + h_2] \times [x_3^0, x_3^0 + h_3] \subset \mathbb{R}^2$  (la proyección de  $R$  sobre el plano  $x_2x_3$ ). Dividiendo por  $\text{vol}(R) = h_1 h_2 h_3$ , tenemos que

$$\frac{1}{\text{vol}(R)} \iint_{C_1 \cup C_2} \bar{V} \cdot \bar{n} d\sigma = \frac{1}{h_2 h_3} \iint_{Q_1} \frac{V_1(x_1^0 + h_1, x_2, x_3) - V_1(x_1^0, x_2, x_3)}{h_1} dx_2 dx_3.$$





Si definimos  $Q_2 = [x_1^0, x_1^0 + h_1] \times [x_3^0, x_3^0 + h_3] \subset \mathbb{R}^2$  y  $Q_3 = [x_1^0, x_1^0 + h_1] \times [x_2^0, x_2^0 + h_2] \subset \mathbb{R}^2$ , haciendo cuentas análogas obtenemos

$$\begin{aligned} \frac{1}{\text{vol}(R)} \iint_S \bar{V} \cdot \bar{n} d\sigma &= \frac{1}{h_2 h_3} \iint_{Q_1} \frac{V_1(x_1^0 + h_1, x_2, x_3) - V_1(x_1^0, x_2, x_3)}{h_1} dx_2 dx_3 \\ &+ \frac{1}{h_1 h_3} \iint_{Q_2} \frac{V_2(x_1, x_2^0 + h_2, x_3) - V_2(x_1, x_2^0, x_3)}{h_2} dx_1 dx_3 \\ &+ \frac{1}{h_1 h_2} \iint_{Q_3} \frac{V_3(x_1, x_2, x_3^0 + h_3) - V_3(x_1, x_2, x_3^0)}{h_3} dx_1 dx_2. \end{aligned}$$

Tomando ahora límite cuando  $(h_1, h_2, h_3) \rightarrow (0, 0, 0)$  obtenemos que

$$\begin{aligned} \lim \frac{1}{\text{vol}(R)} \iint_{\partial R} \bar{V} \cdot \bar{n} d\sigma &= \frac{\partial V_1}{\partial x_1}(x_1^0, x_2^0, x_3^0) + \frac{\partial V_2}{\partial x_2}(x_1^0, x_2^0, x_3^0) + \frac{\partial V_3}{\partial x_3}(x_1^0, x_2^0, x_3^0) \\ &= \bar{\nabla} \cdot \bar{V}(x_1^0, x_2^0, x_3^0) = \text{divergencia de } \bar{V} \text{ en } \bar{x}^0. \end{aligned}$$

En palabras, podemos decir que

Si  $\bar{V}$  es el campo de velocidades de un fluido, la divergencia de  $\bar{V}$  en  $\bar{x}^0$  es el flujo saliente de  $\bar{V}$  por unidad de volumen.

De un modo similar se obtiene que si  $\varphi$  es un campo escalar, entonces

$$\text{gradiente de } \varphi = \bar{\nabla} \varphi(\bar{x}^0) = \lim \frac{1}{\text{vol}(R)} \iint_{\partial R} \varphi \bar{n} d\sigma,$$

donde estamos integrando un campo vectorial  $\varphi \bar{n}$ , y entendemos que

$$\begin{aligned} \iint_{\partial R} \varphi \bar{n} d\sigma &= \iint_{\partial R} \varphi (n_1 \bar{i} + n_2 \bar{j} + n_3 \bar{k}) d\sigma \\ &= \left( \iint_{\partial R} \varphi n_1 d\sigma \right) \bar{i} + \left( \iint_{\partial R} \varphi n_2 d\sigma \right) \bar{j} + \left( \iint_{\partial R} \varphi n_3 d\sigma \right) \bar{k}. \end{aligned}$$

También se puede demostrar que

$$\text{rotor de } \bar{V} = \bar{\nabla} \times \bar{V}(\bar{x}^0) = \lim \frac{1}{\text{vol}(R)} \iint_{\partial R} \bar{n} \times \bar{V} d\sigma.$$

En todos los casos mencionados, el límite se toma cuando  $(h_1, h_2, h_3) \rightarrow (0, 0, 0)$ .

Notemos que entonces valen las siguientes relaciones:

$$\begin{aligned} \bar{\nabla} \cdot \bar{V}(\bar{x}^0) &= \lim \frac{1}{\text{vol}(R)} \iint_{\partial R} \bar{n} \cdot \bar{V} d\sigma, \\ \bar{\nabla} \varphi(\bar{x}^0) &= \lim \frac{1}{\text{vol}(R)} \iint_{\partial R} \bar{n} \varphi d\sigma, \\ \bar{\nabla} \times \bar{V}(\bar{x}^0) &= \lim \frac{1}{\text{vol}(R)} \iint_{\partial R} \bar{n} \times \bar{V} d\sigma. \end{aligned}$$

### 3.3. Teorema de Gauss

Hemos probado que

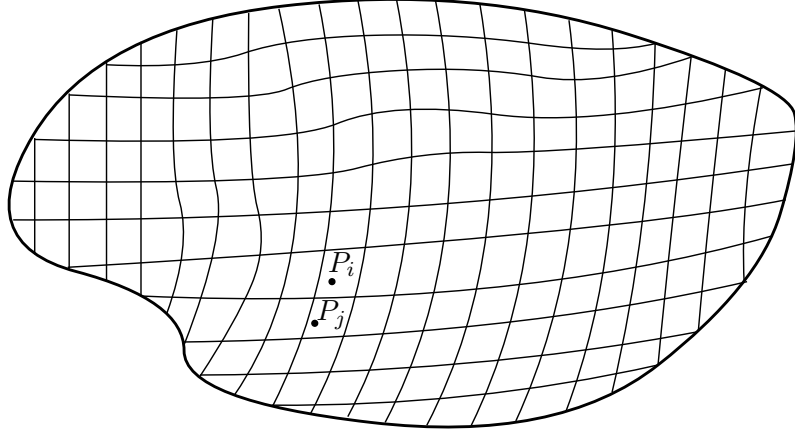
$$\frac{1}{\text{vol}(R)} \iint_{\partial R} \bar{V} \cdot \bar{n} d\sigma \longrightarrow \bar{\nabla} \cdot \bar{V}(P),$$

si  $R$  es un paralelepípedo rectangular que *converge a  $P$*  (o se encoge a  $P$ ). La forma explícita de  $R$  para la validez de este resultado es irrelevante. Una demostración del teorema de la divergencia de Gauss puede hallarse en muchos libros (por ejemplo en el Vol. II del *Calculus* de Apostol [Apostol] o en [Marsden-Tromba]), pero una heurística razonable puede obtenerse a partir de esta identidad.

Sea  $\Omega$  un dominio de  $\mathbb{R}^3$  con frontera  $\partial\Omega$  suave. Sea  $\bar{V}$  un campo vectorial  $C^1$  en todo un entorno de  $\bar{\Omega} = \Omega \cup \partial\Omega$ . Partimos el dominio  $\Omega$  en subdominios  $\Omega_i$  muy pequeños de modo que la aproximación

$$\frac{1}{\text{vol}(\Omega_i)} \iint_{\partial\Omega_i} \bar{V} \cdot \bar{n} d\sigma \approx \bar{\nabla} \cdot \bar{V}(P_i) \approx \frac{1}{\text{vol}(\Omega_i)} \iiint_{\Omega_i} \bar{\nabla} \cdot \bar{V} d\text{vol}$$

sea buena (el punto  $P_i$  está en  $\Omega_i$ ), digamos con un error menor a  $\varepsilon$ .



Multiplicando por  $\text{vol}(\Omega_i)$  y sumando para todos los índices  $i = 1, 2, \dots, I$  tendremos

$$\sum_{i=1}^I \iint_{\partial\Omega_i} \bar{V} \cdot \bar{n} \, d\sigma \approx \sum_{i=1}^I \bar{\nabla} \cdot \bar{V}(P_i) \text{vol}(\Omega_i) \approx \iiint_{\Omega} \bar{\nabla} \cdot \bar{V} \, d\text{vol},$$

(siguiendo ahora con un error menor a  $\varepsilon \text{vol}(\Omega)$ ). En el miembro izquierdo, todos los trozos de  $\partial\Omega_i$  que son interiores a  $\Omega$  aparecen dos veces y con normales opuestas. No ocurre lo mismo con las caras de  $\partial\Omega_i$  que no son interiores a  $\Omega$  sino que son parte de la frontera de  $\Omega$ . Por consiguiente, en la suma de la izquierda, todas las integrales de superficie calculadas sobre superficies interiores a  $\Omega$  se cancelan mutuamente y entonces esa suma es  $\iint_{\partial\Omega} \bar{V} \cdot \bar{n} \, d\sigma$ . En el límite tenemos

$$\iint_{\partial\Omega} \bar{V} \cdot \bar{n} \, d\sigma = \iiint_{\Omega} \bar{\nabla} \cdot \bar{V} \, d\text{vol}.$$

**Observación 3.2.** La igualdad

$$\iint_{\partial\Omega} \bar{V} \cdot \bar{n} \, d\sigma = \iiint_{\Omega} \bar{\nabla} \cdot \bar{V} \, d\text{vol}. \quad (3.1)$$

se cumple siempre que  $\bar{V}$  sea diferenciable y sus derivadas sean continuas en  $\bar{\Omega} = \Omega \cup \partial\Omega$ . Por ejemplo, si  $\bar{V}$  es el campo de Newton

$$\bar{V}(\bar{r}) = -\frac{\bar{r}}{r^3},$$

con  $\bar{r} = (x_1, x_2, x_3)$  y  $r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$ , que es diferenciable en  $\mathbb{R}^3 - \{\bar{0}\}$  (tiene una singularidad en el origen), la igualdad (3.1) vale siempre que  $\Omega$  sea una región tal que  $\bar{\Omega}$  no toca al origen. Por ejemplo, la igualdad (3.1) vale en la esfera con centro en  $(1, 1, 1)$  y radio 1, pero no vale en la esfera centrada en el origen con radio 1. Tampoco vale en la esfera centrada en el  $(1, 0, 0)$  y radio 1, aunque sí vale en la esfera ahuecada  $\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : 1 < x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 < 4\} = B((0, 0, 0), 2) - B((0, 0, 0), 1)$ .

**Observación 3.3.** Si  $\bar{V}$  es un campo vectorial  $C^1(\mathbb{R}^3)$  y  $\bar{\nabla} \cdot \bar{V} = 0$  en  $\mathbb{R}^3$ , entonces

$$\iint_{\partial\Omega} \bar{V} \cdot \bar{n} \, d\sigma = \iiint_{\Omega} \bar{\nabla} \cdot \bar{V} \, d\text{vol} = 0.$$

Es decir, para toda superficie cerrada  $\partial\Omega$  que encierre una región de  $\mathbb{R}^3$  donde  $\bar{V}$  tiene divergencia nula, se cumple que el flujo de  $\bar{V}$  total saliente/entrante a través de  $\partial\Omega$  es nulo. Esto no nos dice que la velocidad  $\bar{V}$  sea nula, sino que el *balance* es nulo. Si  $\bar{V}$  representa la velocidad de un fluido, entonces  $\bar{\nabla} \cdot \bar{V} = 0$  indica que el flujo es *incompresible*.

### 3.4. Teorema de Stokes

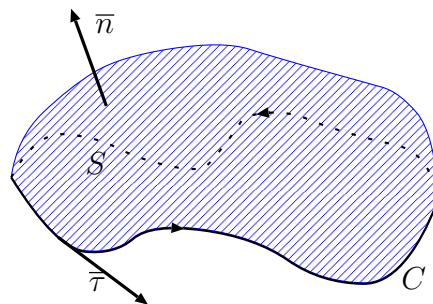
Sea  $\bar{V}$  un campo vectorial suave en el espacio  $\mathbb{R}^3$ . Sea  $C$  una curva cerrada simple en el espacio  $\mathbb{R}^3$ . La circulación de  $\bar{V}$  a lo largo de  $C$  está dada por la integral

$$\int_C \bar{V} \cdot d\bar{s} = \int_C \bar{V} \cdot \bar{\tau} ds,$$

que es la integral de la componente de  $\bar{V}$  tangencial a la curva  $C$  ( $\bar{\tau}$  denota el vector tangencial a  $C$  orientado en la dirección en que se recorre la curva  $C$ ).

El **Teorema de Stokes** afirma que el rotor de  $\bar{V}$  también mide la circulación del fluido con velocidad  $\bar{V}$ . Precisamente, si  $C$  es una curva suave en el espacio y  $S$  es una superficie (cualquiera) suave cuyo contorno es  $C$ , ambas dentro de la región donde  $\bar{V}$  es  $C^1$ , entonces

$$\iint_S (\bar{\nabla} \times \bar{V}) \cdot \bar{n} d\sigma = \int_C \bar{V} \cdot d\bar{s},$$



donde la normal  $\bar{n}$  a  $S$  y la dirección de recorrido de  $C$  indicada por la elección de  $\bar{\tau}$  se toman de modo que se satisfaga la regla de la mano derecha.

**Observación 3.4.** La primera observación que se puede hacer de la fórmula de Stokes, justifica el nombre de rotor o rotacional para el vector  $\bar{\nabla} \times \bar{V}$ , puesto que la anulaci3n del rotor implica la anulaci3n de la circulaci3n sobre cualquier curva cerrada.

### Teoría de Potencial.

Otras consecuencias profundas del teorema de Stokes se dan en la Teoría de Potencial.

Dado un campo vectorial  $\bar{V}$ , se dice que el campo escalar  $\varphi$  es *un potencial para  $\bar{V}$*  si satisface

$$\bar{\nabla}\varphi = \bar{V}.$$

No es cierto que todo campo vectorial admita un potencial, por ejemplo, es fácil ver que el gradiente de cualquier potencial suficientemente suave  $\varphi$  es *irrotacional*. Es decir

$$\bar{\nabla} \times \bar{\nabla}\varphi = \bar{0}.$$

Esto nos dice que para que un campo vectorial admita un potencial, es *necesario* que dicho campo vectorial sea irrotacional:

Si  $\bar{V}$  admite un potencial ( $\bar{V} = \bar{\nabla}\varphi$ ) entonces  $\bar{\nabla} \times \bar{V} = \bar{0}$ .

**Trabajo.** Dado un campo vectorial  $\bar{F}$  (pensamos ahora en un campo de fuerzas), se define el trabajo realizado por  $\bar{F}$  sobre una partícula que se desplaza por una curva  $C$  como la integral

$$\int_C \bar{F} \cdot d\bar{s} = \int_C \bar{F} \cdot \bar{\tau} ds$$

donde  $\bar{\tau}$  denota (como antes) el vector tangencial a la curva  $C$  y apunta en la dirección que se recorre. Es decir, el trabajo de  $\bar{F}$  sobre  $C$  es la integral a lo largo de  $C$  de la componente tangencial a  $C$  de  $\bar{F}$ . El signo dependerá de la orientación de la curva.

**Campos Conservativos.** Se dice que un campo vectorial  $\bar{F}$  (pensamos en fuerzas) es *conservativo* si el trabajo realizado por  $\bar{F}$  al desplazar una partícula entre los puntos  $P$  y  $Q$  solo depende de los puntos  $P$  y  $Q$  pero no de la particular trayectoria que los una, mientras la misma no salga del dominio de suavidad<sup>1</sup> de  $\bar{F}$ . Equivalentemente un campo es conservativo si el trabajo realizado por el mismo en cualquier circuito cerrado es nulo.

Observemos ahora que si  $\bar{F}$  admite un potencial  $\varphi$ , y  $C$  es una curva, parametrizada por  $\bar{\gamma} : [0, 1] \rightarrow C$  que une  $P$  con  $Q$  ( $\bar{\gamma}(0) = P$ ,  $\bar{\gamma}(1) = Q$ ), entonces

$$\begin{aligned} \int_C \bar{F} \cdot d\bar{s} &= \int_0^1 \bar{F}(\bar{\gamma}(t)) \cdot \bar{\gamma}'(t) dt \\ &= \int_0^1 \bar{\nabla}\varphi(\bar{\gamma}(t)) \cdot \bar{\gamma}'(t) dt \\ &= \int_0^1 \frac{d}{dt}(\varphi(\bar{\gamma}(t))) dt \\ &= \varphi(\bar{\gamma}(1)) - \varphi(\bar{\gamma}(0)) \\ &= \varphi(Q) - \varphi(P). \end{aligned}$$

Por lo tanto, si  $\bar{F}$  admite un potencial, el trabajo depende solamente de los puntos inicial y final, y por lo tanto es conservativo.

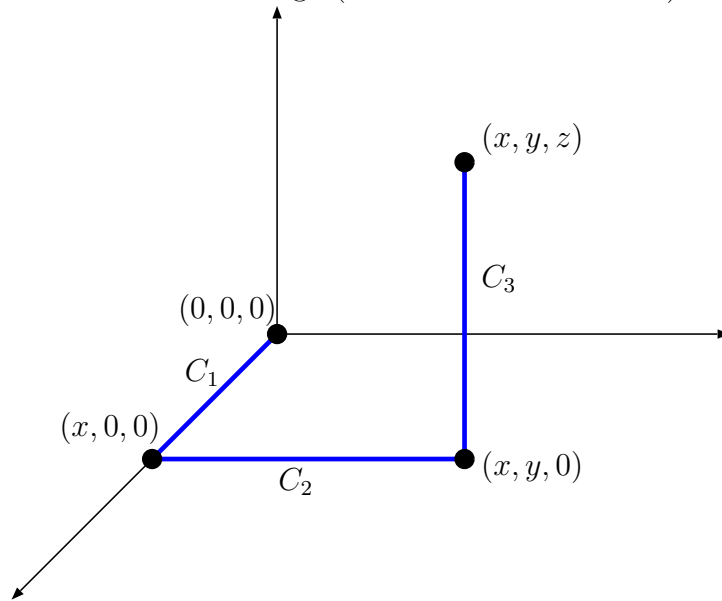
Si  $\bar{F}$  admite un potencial ( $\bar{F} = \bar{\nabla}\varphi$ ) entonces  $\bar{F}$  es conservativo

Por otro lado, si  $\bar{F} = F_1\bar{i} + F_2\bar{j} + F_3\bar{k}$  es un campo vectorial conservativo, entonces las integrales de línea nos permiten construir un potencial para  $\bar{F}$ . Es decir, nos permiten construir (al menos) una función escalar  $\varphi$  tal que  $\bar{F} = \bar{\nabla}\varphi$ . Basta fijar un punto  $O$  en el dominio de  $\bar{F}$  y definir  $\varphi(O) = 0$ . Luego, para cada  $P$  en el dominio de  $\bar{F}$  (que estamos suponiendo simplemente conexo) definir

$$\varphi(P) = \varphi(P) - \varphi(O) = \int_{C_{OP}} \bar{F} \cdot d\bar{s},$$

<sup>1</sup>El *dominio de suavidad* de una función es el dominio donde la función está definida y es  $C^1$ . Por ejemplo, el dominio de suavidad del campo de Newton es  $\mathbb{R}^3 - \{\bar{0}\}$ .

Donde  $C_{OP}$  es una curva suave (a trozos) que une  $O$  con  $P$ . Como  $\bar{F}$  es conservativo, el resultado da lo mismo a través de *cualquier* curva  $C_{OP}$  que se elija. De esta manera resulta  $\nabla\varphi = \bar{F}$ . Veamos como ejemplo que  $\frac{\partial\varphi}{\partial z}(x, y, z) = F_3(x, y, z)$ , el resto de las igualdades se obtiene de manera análoga (utilizando otra curva  $C$ ).



Utilicemos como curva  $C$  la de la figura, entonces

$$\begin{aligned} \varphi(x, y, z) &= \int_C \bar{F} \cdot \tau \, ds \\ &= \int_{C_1} \bar{F} \cdot \bar{i} \, ds + \int_{C_2} \bar{F} \cdot \bar{j} \, ds + \int_{C_3} \bar{F} \cdot \bar{k} \, ds \\ &= \int_{C_1} F_1 \, ds + \int_{C_2} F_2 \, ds + \int_{C_3} F_3 \, ds \\ &= \int_0^x F_1(s, 0, 0) \, ds + \int_0^y F_2(x, s, 0) \, ds + \int_0^z F_3(x, y, s) \, ds. \end{aligned}$$

Luego,

$$\frac{\partial\varphi}{\partial z}(x, y, z) = F_3(x, y, z).$$

En conclusión:

Todo campo conservativo es el gradiente de algún campo escalar.

Recordando ahora que el rotacional de un gradiente es siempre el vector nulo:

Todo campo conservativo es irrotacional.

El teorema de Stokes nos permite afirmar la recíproca, siempre que estemos en un dominio *simplemente conexo*:

Todo campo irrotacional es conservativo, y por consiguiente tiene un potencial  $\varphi$ .

En efecto, si  $\bar{F}$  es irrotacional, entonces  $\bar{\nabla} \times \bar{F} = \bar{0}$  y de aquí que

$$\int_C \bar{F} \cdot d\bar{s} = \iint_S (\bar{\nabla} \times \bar{F}) \cdot \bar{n} d\sigma = 0,$$

para toda curva cerrada simple en el dominio. Entonces  $\bar{F}$  es conservativo y por consiguiente existe  $\varphi$  tal que  $\bar{F} = \bar{\nabla}\varphi$ . El campo escalar  $\varphi$  es *un potencial* para  $\bar{F}$ .

## 3.5. Ejercicios

**3.1.** Sea  $f(\bar{r}) = \frac{1}{r}$  el potencial Newtoniano cuyo dominio es  $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ .

(Notación:  $\bar{r} = x_1\bar{i} + x_2\bar{j} + x_3\bar{k}$  y  $r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$ )

(a) Calcular el gradiente de  $f$ .

(b) Calcular el Laplaciano de  $f$ .

**3.2.** Demostrar que el gradiente de cualquier función escalar  $\varphi$  que tiene derivadas de segundo orden continuas, es un campo vectorial irrotacional. Más precisamente, demostrar que

$$\bar{\nabla} \times \bar{\nabla}\varphi = \bar{0},$$

para cualquier función escalar  $\varphi$  con derivadas de segundo orden continuas.

\* **3.3.** Sea  $f$  una función de clase  $C^1$  en  $\mathbb{R}^3$ . Demostrar que

$$\lim_{h_2, h_3} \frac{1}{h_2 h_3} \int_{x_3^0}^{x_3^0+h_3} \int_{x_2^0}^{x_2^0+h_2} \frac{f(x_1^0 + h_1, x_2, x_3) - f(x_1^0, x_2, x_3)}{h_1} dx_2 dx_3 = \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1^0, x_2^0, x_3^0),$$

donde el límite se toma cuando  $(h_1, h_2, h_3) \rightarrow (0, 0, 0)$ .

**3.4.** Calcular el flujo del campo de Newton

$$\bar{V}(\bar{r}) = -\frac{\bar{r}}{r^3},$$

a través de una superficie esférica centrada en  $(1, 1, 1)$  y de radio uno. (Usar Teorema de Gauss).

¿Cuál es el flujo a través de cualquier superficie cerrada suave que no deje el origen en el interior?

**3.5.** Sea  $\bar{V}(\bar{r}) = -\frac{\bar{r}}{r^3}$ . Recuerde que según se resolvió en el ejercicio 2.3, el flujo de  $\bar{V}$  a través de la superficie esférica centrada en  $\bar{0} = (0, 0, 0)$  y radio  $R$ , hacia el *infinito* es  $-4\pi$ .

Calcular el flujo de  $\bar{V}$  a través de cualquier superficie cerrada suave que contenga a  $\bar{0}$  en su interior.

**3.6.** Sea  $S$  una superficie cerrada y suave en el espacio, y sea  $n_i$  la  $i$ -ésima componente del vector normal exterior a  $S$ . Demostrar que entonces

$$\iint_S n_i d\sigma = 0.$$

**3.7.** Sea  $S$  una superficie cerrada y suave en el espacio, sea  $\bar{n}$  el vector normal exterior a  $S$ , y  $\bar{r}$  el *vector posición* (o función identidad de  $\mathbb{R}^3$ ). Demostrar que entonces

$$\frac{1}{3} \iint_S \bar{r} \cdot \bar{n} \, d\sigma = V,$$

donde  $V$  es el volumen de la región rodeada por  $S$ .

**3.8.** Sea  $\varphi(x_1, x_2, x_3) = \ln(x_1^2 + x_2^2)$ . Determinar su dominio y el de su gradiente  $\bar{V} = \bar{\nabla}\varphi$ . ¿Es  $\bar{V}$  conservativo? ¿Es incompresible? ¿Es  $\varphi$  armónico?

## Bibliografía complementaria

[Apostol] Tom M. Apostol, *Calculus*, Vol. 2., Editorial Reverté, 2005.

[Arfken-Weber] Arfken, G.B., Weber, H.J., *Mathematical Methods For Physicists*, HARCOUT-Academic Press, 2001.

[Marsden-Tromba] Jerrold E. Marsden, Anthony J. Tromba, *Cálculo Vectorial*, Addison-Wesley Iberoamericana.

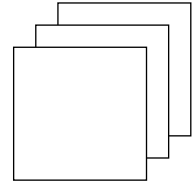


# Capítulo 4

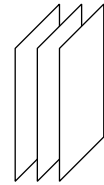
## Coordenadas Generalizadas en el Espacio

Las coordenadas cartesianas usuales en  $\mathbb{R}^3$  pueden verse también como un sistema de tres familias de superficies en el espacio, de modo que cada punto (físico)  $P$  pueda describirse como la intersección de tres superficies: una de cada familia.

$$\mathcal{F}_1 = \{x_1 = \text{constante}\} = \{\text{planos frontales (paralelos al plano } x_2x_3)\}$$



$$\mathcal{F}_2 = \{x_2 = \text{constante}\} = \{\text{planos verticales (paralelos al plano } x_1x_3)\}$$



$$\mathcal{F}_3 = \{x_3 = \text{constante}\} = \{\text{planos horizontales (paralelos al plano } x_1x_2)\}$$



Tomando este punto de vista, dados tres campos escalares  $Q_1, Q_2, Q_3$  en el espacio introducimos tres familias de superficies: las superficies de nivel de cada  $Q_i, i = 1,2,3$ . Ahora,

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_1 &= \{Q_1(x_1, x_2, x_3) = \text{constante}\}, \\ \mathcal{F}_2 &= \{Q_2(x_1, x_2, x_3) = \text{constante}\}, \\ \mathcal{F}_3 &= \{Q_3(x_1, x_2, x_3) = \text{constante}\}. \end{aligned}$$

Ver por ejemplo la Fig. 4.1.

Si el punto físico  $P$  se representa por  $(x_1, x_2, x_3)$  en coordenadas cartesianas, entonces  $P$  se representa por  $(q_1, q_2, q_3)$  en coordenadas generalizadas, con

$$\begin{cases} q_1 = Q_1(x_1, x_2, x_3), \\ q_2 = Q_2(x_1, x_2, x_3), \\ q_3 = Q_3(x_1, x_2, x_3), \end{cases} \quad \text{o inversamente} \quad \begin{cases} x_1 = X_1(q_1, q_2, q_3), \\ x_2 = X_2(q_1, q_2, q_3), \\ x_3 = X_3(q_1, q_2, q_3). \end{cases} \quad (4.1)$$

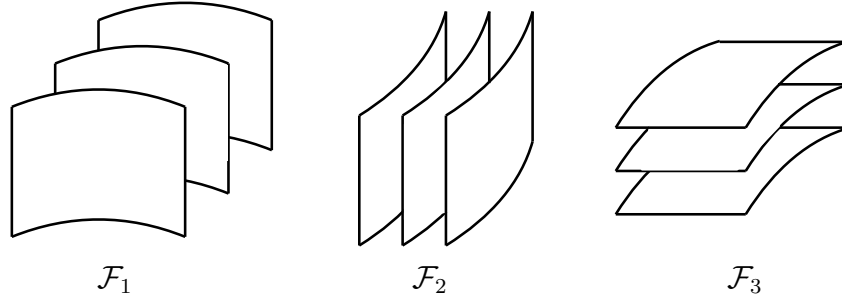
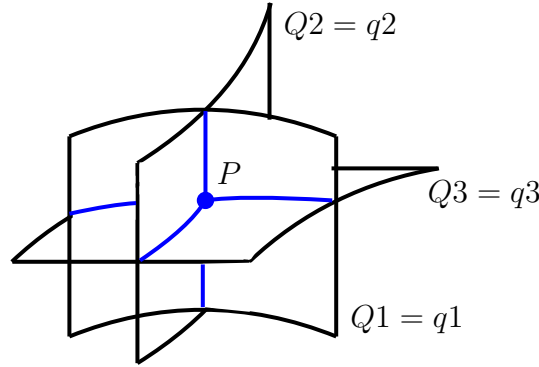


Figura 4.1: Ejemplo de familias  $\mathcal{F}_1$ ,  $\mathcal{F}_2$ ,  $\mathcal{F}_3$

Geoméricamente, esto significa que el punto  $P$ , además de ser la intersección de tres planos (el frontal por  $x_1$ , el vertical por  $x_2$  y el horizontal por  $x_3$ ) también es la intersección de las superficies de nivel  $Q_1(x_1, x_2, x_3) = q_1$ ,  $Q_2(x_1, x_2, x_3) = q_2$ ,  $Q_3(x_1, x_2, x_3) = q_3$ :



**Ejemplo 4.1.** Si  $q_1 = r$ ,  $q_2 = \theta$ ,  $q_3 = \varphi$ , con  $0 \leq r$ ,  $0 \leq \theta < 2\pi$  y  $0 \leq \varphi \leq \pi$ , dados por las relaciones

$$\begin{cases} x_1 = X_1(r, \theta, \varphi) = r \operatorname{sen} \varphi \cos \theta \\ x_2 = X_2(r, \theta, \varphi) = r \operatorname{sen} \varphi \operatorname{sen} \theta \\ x_3 = X_3(r, \theta, \varphi) = r \cos \varphi \end{cases} \quad (4.2)$$

tenemos el sistema de *coordenadas esféricas*.

**Ejemplo 4.2.** Si  $q_1 = \rho$ ,  $q_2 = \theta$ ,  $q_3 = z$ , con  $0 \leq \rho$ ,  $0 \leq \theta < 2\pi$  y  $z \in \mathbb{R}$ , dados por las relaciones

$$\begin{cases} x_1 = X_1(\rho, \theta, z) = \rho \cos \theta \\ x_2 = X_2(\rho, \theta, z) = \rho \operatorname{sen} \theta \\ x_3 = X_3(\rho, \theta, z) = z \end{cases} \quad (4.3)$$

tenemos el sistema de *coordenadas cilíndricas*.

## 4.1. Superficies coordenadas

Son *superficies coordenadas* las que se obtienen manteniendo una coordenada fija y permitiendo variar a las otras dos. Es decir, superficies contenidas en alguna de las superficies de las familias  $\mathcal{F}_1$ ,  $\mathcal{F}_2$ ,  $\mathcal{F}_3$  mencionadas antes.

En el caso de las coordenadas cartesianas usuales, las superficies coordenadas son superficies contenidas en un plano paralelo a alguno de los planos coordenados.

Por ejemplo, la superficie

$$x_1 = -3, \quad 0 < x_2 < 2, \quad 1 < x_3 < 5$$

es un rectángulo de  $2 \times 4$  contenido en el plano  $x_1 = -3$ , paralelo al plano  $x_2x_3$ .

Si consideramos las coordenadas esféricas, la superficie

$$r = 3, \quad 0 \leq \theta < 2\pi, \quad 0 \leq \varphi \leq \pi,$$

es la esfera de centro en el origen y radio 3. La superficie

$$0 \leq r < \infty, \quad 0 \leq \theta < 2\pi, \quad \varphi = \frac{\pi}{4},$$

es el cono circular con orientación vertical (eje contenido en eje  $x_3$ ) que abre hacia arriba con un ángulo de apertura de  $\pi/2$  radianes (o 90 grados). El ángulo con respecto al eje  $x_3$  es de  $\pi/4$  radianes o 45 grados.

Si consideramos las coordenadas cilíndricas, la superficie

$$\rho = 5, \quad 0 \leq \theta < 2\pi, \quad 0 < z < 1,$$

es la cara lateral de un cilindro vertical de base circular de radio 5 y altura 1.

## 4.2. Curvas coordenadas

Son curvas coordenadas las que se obtienen dejando fijas dos coordenadas y permitiendo variar a la tercera. Por lo tanto están contenidas en la intersección de dos superficies coordenadas.

Consideremos por ejemplo las coordenadas esféricas. La curva

$$r = 2, \quad \theta = \frac{\pi}{2}, \quad 0 \leq \varphi \leq \pi$$

es la media circunferencia centrada en el origen, de radio 2, que se encuentra en el semiplano del plano  $x_2x_3$  donde  $x_2 \geq 0$ . Si reemplazamos los valores de las coordenadas fijas en las fórmulas (4.2), obtenemos una parametrización de la curva:

$$\begin{cases} x_1(\varphi) = 2 \operatorname{sen} \varphi \cos \frac{\pi}{2} = 0, \\ x_2(\varphi) = 2 \operatorname{sen} \varphi \operatorname{sen} \frac{\pi}{2} = 2 \operatorname{sen} \varphi, \\ x_3(\varphi) = 2 \cos \varphi = 2 \cos \varphi, \end{cases} \quad 0 \leq \varphi \leq \pi.$$

Esta curva resulta un *meridiano* de la esfera de radio 2.

La curva

$$r = 1, \quad 0 \leq \theta < 2\pi, \quad \varphi = \frac{3}{4}\pi,$$

es una circunferencia ubicada en el cono  $\varphi = \frac{3}{4}\pi$ , paralela al plano  $x_1x_2$ . Veamos su parametrización

$$\begin{cases} x_1(\varphi) = \operatorname{sen} \frac{3}{4}\pi \cos \theta = \frac{\sqrt{2}}{2} \cos \theta, \\ x_2(\varphi) = \operatorname{sen} \frac{3}{4}\pi \operatorname{sen} \theta = \frac{\sqrt{2}}{2} \operatorname{sen} \theta, \\ x_3(\varphi) = \cos \frac{3}{4}\pi = -\frac{\sqrt{2}}{2}, \end{cases} \quad 0 \leq \theta < 2\pi.$$

Se ve aquí que la curva en cuestión es el *paralelo* de la esfera de radio unitario que está contenido en el plano  $x_3 = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ .

Es interesante observar que por cada punto de coordenadas generalizadas  $(q_1, q_2, q_3)$  pasan tres curvas coordenadas. Que son las que se obtienen de dejar dos coordenadas fijas, y la restante variable. Por ejemplo, la parametrización de la curva coordenada que resulta de variar  $q_1$  y dejar fijos  $q_2$  y  $q_3$  es

$$\bar{X}(t, q_2, q_3) = X_1(t, q_2, q_3)\bar{i} + X_2(t, q_2, q_3)\bar{j} + X_3(t, q_2, q_3)\bar{k}.$$

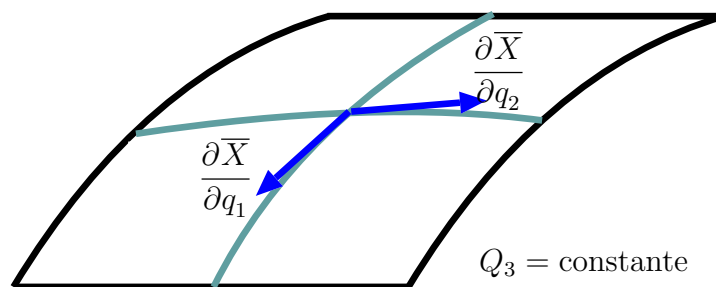
Un vector tangente a esta curva en el punto  $(q_1, q_2, q_3)$  ( $t = q_1$ ) está dado por

$$\frac{d}{dt}\bar{X}(t, q_2, q_3)|_{t=q_1} = \frac{\partial \bar{X}}{\partial q_1}(q_1, q_2, q_3) = \frac{\partial X_1}{\partial q_1}(q_1, q_2, q_3)\bar{i} + \frac{\partial X_2}{\partial q_1}(q_1, q_2, q_3)\bar{j} + \frac{\partial X_3}{\partial q_1}(q_1, q_2, q_3)\bar{k}.$$

Así, los vectores tangentes a las curvas coordenadas que pasan por el punto que tiene coordenadas  $(q_1, q_2, q_3)$  son tres, a saber:  $\frac{\partial \bar{X}}{\partial q_i}(q_1, q_2, q_3)$ ,  $i = 1, 2, 3$ .

Cada par de estos vectores (se pueden armar tres pares diferentes) determina el plano tangente a una de las tres *superficies* coordenadas que pasan por dicho punto. Más precisamente:

- El plano paralelo a  $\frac{\partial \bar{X}}{\partial q_2}$  y a  $\frac{\partial \bar{X}}{\partial q_3}$  que pasa por  $(q_1, q_2, q_3)$  es el plano tangente a la superficie coordenada  $\{q_1 = \text{constante}\}$  que pasa por dicho punto.
- El plano paralelo a  $\frac{\partial \bar{X}}{\partial q_1}$  y a  $\frac{\partial \bar{X}}{\partial q_3}$  que pasa por  $(q_1, q_2, q_3)$  es el plano tangente a la superficie coordenada  $\{q_2 = \text{constante}\}$  que pasa por dicho punto.
- El plano paralelo a  $\frac{\partial \bar{X}}{\partial q_1}$  y a  $\frac{\partial \bar{X}}{\partial q_2}$  que pasa por  $(q_1, q_2, q_3)$  es el plano tangente a la superficie coordenada  $\{q_3 = \text{constante}\}$  que pasa por dicho punto.



En los ejemplos de coordenadas esféricas y cilíndricas que consideramos resulta que los vectores  $\frac{\partial \bar{X}}{\partial q_i}(q_1, q_2, q_3)$ ,  $i = 1, 2, 3$ , son perpendiculares entre sí (ver ejercicio 4.2), y por lo tanto el vector  $\frac{\partial \bar{X}}{\partial q_i}$  que no es paralelo al plano tangente de la superficie coordenada, es necesariamente perpendicular. Más precisamente

- En cada punto, el vector  $\frac{\partial \bar{X}}{\partial q_1}$  es perpendicular al plano tangente a la superficie coordenada  $\{q_1 = \text{constante}\}$  que pasa por dicho punto.
- En cada punto, el vector  $\frac{\partial \bar{X}}{\partial q_2}$  es perpendicular al plano tangente a la superficie coordenada  $\{q_2 = \text{constante}\}$  que pasa por dicho punto.
- En cada punto, el vector  $\frac{\partial \bar{X}}{\partial q_3}$  es perpendicular al plano tangente a la superficie coordenada  $\{q_3 = \text{constante}\}$  que pasa por dicho punto.

En general decimos que un vector es perpendicular a una superficie en un punto si es perpendicular al plano tangente a dicha superficie en ese punto, es por eso que las tres afirmaciones anteriores pueden re-escribirse de la siguiente manera (resumida):

- El vector  $\frac{\partial \bar{X}}{\partial q_1}$  es perpendicular a la superficie  $\{q_1 = \text{constante}\}$ .
- El vector  $\frac{\partial \bar{X}}{\partial q_2}$  es perpendicular a la superficie  $\{q_2 = \text{constante}\}$ .
- El vector  $\frac{\partial \bar{X}}{\partial q_3}$  es perpendicular a la superficie  $\{q_3 = \text{constante}\}$ .

Finalmente observamos que el vector  $\frac{\partial \bar{X}}{\partial q_i}$  apunta en la dirección en que  $q_i$  *aumenta*.

### 4.3. Vectores normales

Denotaremos con  $\bar{a}_i$  al vector normal a las superficies de la familia  $\mathcal{F}_i$  (perpendicular a cada superficie y de longitud uno) de manera que su dirección es la del crecimiento de  $q_i$ .

Cuando los vectores tangentes a las curvas paramétricas  $\frac{\partial \bar{X}}{\partial q_i}$  son perpendiculares entre sí, que es el caso de las coordenadas rectangulares usuales, de las esféricas y también de las cilíndricas, el cálculo puede hacerse utilizando lo visto en la sección anterior, normalizando los vectores  $\frac{\partial \bar{X}}{\partial q_i}$ :

$$\bar{a}_i = \frac{\frac{\partial \bar{X}}{\partial q_i}}{\left| \frac{\partial \bar{X}}{\partial q_i} \right|} = \frac{1}{h_i} \frac{\partial \bar{X}}{\partial q_i},$$

donde hemos definido  $h_i = \left| \frac{\partial \bar{X}}{\partial q_i} \right|$ , y como antes  $\frac{\partial \bar{X}}{\partial q_i} = \frac{\partial X_1}{\partial q_i} \bar{i} + \frac{\partial X_2}{\partial q_i} \bar{j} + \frac{\partial X_3}{\partial q_i} \bar{k}$ .

**Ejemplo 4.3.** Consideremos las coordenadas esféricas y calculemos  $h_2$  y  $\bar{a}_2$ . Para realizar esto debemos utilizar las fórmulas (4.2) y derivar con respecto a  $q_2 = \theta$ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial X_1}{\partial \theta} &= -r \operatorname{sen} \varphi \operatorname{sen} \theta \\ \frac{\partial X_2}{\partial \theta} &= r \operatorname{sen} \varphi \cos \theta & \implies & \frac{\partial \bar{X}}{\partial \theta} = r \operatorname{sen} \varphi (-\operatorname{sen} \theta \bar{i} + \cos \theta \bar{j}) \\ \frac{\partial X_3}{\partial \theta} &= 0 \end{aligned}$$

Por lo tanto  $h_2 = r \operatorname{sen} \varphi$  y  $\bar{a}_2 = -\operatorname{sen} \theta \bar{i} + \cos \theta \bar{j}$ .

## 4.4. Cálculo de longitudes en coordenadas generalizadas

Sea  $\bar{\gamma}(t)$  una curva en el espacio que describe (por ejemplo) la trayectoria de una partícula. Si representamos la curva en coordenadas cartesianas ortogonales  $\bar{\gamma}(t) = x_1(t)\bar{i} + x_2(t)\bar{j} + x_3(t)\bar{k}$ , para calcular la longitud de un arco cualquiera de la curva, necesitamos conocer  $\left| \frac{d\bar{\gamma}}{dt}(t) \right|$  ya que la longitud del arco que une  $\bar{\gamma}(a)$  con  $\bar{\gamma}(b)$  está dada por:

$$\int_C ds = \int_a^b \left| \frac{d\bar{\gamma}}{dt}(t) \right| dt = \int_a^b \underbrace{\sqrt{\left(\frac{dx_1}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dx_2}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dx_3}{dt}\right)^2}}_{ds} dt.$$

Supongamos ahora que  $q_j(t) = Q_j(\bar{\gamma}(t))$  son las coordenadas generalizadas de la curva, y tratemos de hallar una fórmula para  $\left| \frac{d\bar{\gamma}}{dt}(t) \right|^2$  en términos de las coordenadas  $q_j(t)$ . Estamos considerando entonces que

$$\begin{aligned} \bar{\gamma}(t) &= \bar{X}(q_1(t), q_2(t), q_3(t)) \\ &= X_1(q_1(t), q_2(t), q_3(t))\bar{i} + X_2(q_1(t), q_2(t), q_3(t))\bar{j} + X_3(q_1(t), q_2(t), q_3(t))\bar{k}, \end{aligned}$$

y por la regla de la cadena

$$\begin{aligned} \bar{\gamma}'(t) &= \frac{\partial \bar{X}}{\partial q_1} q_1'(t) + \frac{\partial \bar{X}}{\partial q_2} q_2'(t) + \frac{\partial \bar{X}}{\partial q_3} q_3'(t) \\ &= h_1 \bar{a}_1 q_1'(t) + h_2 \bar{a}_2 q_2'(t) + h_3 \bar{a}_3 q_3'(t) \end{aligned}$$

Además  $|\bar{\gamma}'(t)| = \sqrt{\bar{\gamma}'(t) \cdot \bar{\gamma}'(t)}$  y como  $\frac{\partial \bar{X}}{\partial q_i} = h_i \bar{a}_i$ ,

$$\bar{\gamma}'(t) \cdot \bar{\gamma}'(t) = h_1^2 (q_1'(t))^2 + h_2^2 (q_2'(t))^2 + h_3^2 (q_3'(t))^2,$$

porque  $\bar{a}_i \cdot \bar{a}_j = 0$  cuando  $i \neq j$  y  $a_i \cdot a_i = 1$ . Luego

$$|\bar{\gamma}'(t)| = \sqrt{h_1^2(q_1'(t))^2 + h_2^2(q_2'(t))^2 + h_3^2(q_3'(t))^2}.$$

En forma sintética, la fórmula obtenida para calcular longitudes de curvas en las coordenadas generalizadas puede escribirse

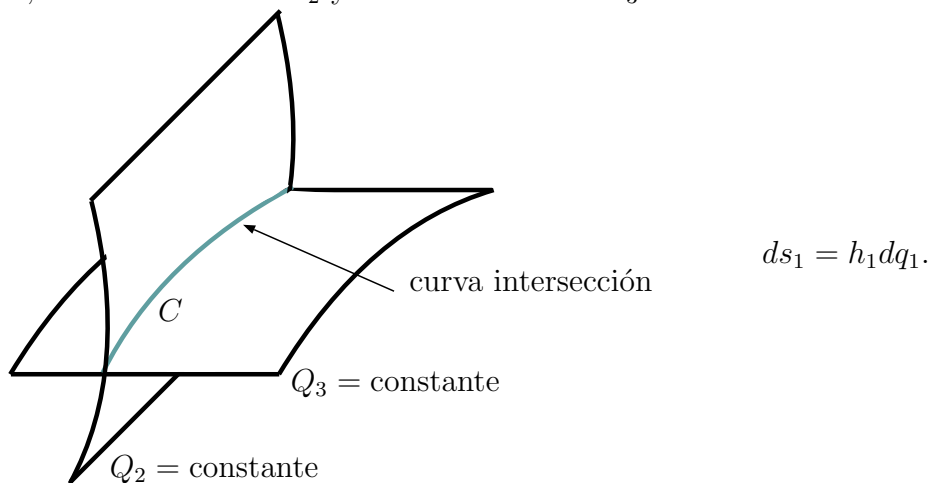
$$\begin{aligned}(ds)^2 &= (dx_1)^2 + (dx_2)^2 + (dx_3)^2 \\ &= (h_1 dq_1)^2 + (h_2 dq_2)^2 + (h_3 dq_3)^2,\end{aligned}$$

donde  $ds$  representa el diferencial de longitud de arco. Lo que esta fórmula sintetiza es el hecho que si pretendemos calcular la longitud de una curva  $C$  que se describe por  $(q_1(t), q_2(t), q_3(t))$  en coordenadas generalizadas, entonces la longitud del camino recorrido entre los instantes  $a$  y  $b$  está dado por

$$\int_C ds = \int_a^b \sqrt{(h_1 \frac{dq_1}{dt})^2 + (h_2 \frac{dq_2}{dt})^2 + (h_3 \frac{dq_3}{dt})^2} dt$$

con  $h_\ell = \left| \frac{\partial \bar{X}}{\partial q_\ell} \right| = \sqrt{\sum_{i=1}^3 \left( \frac{\partial X_i}{\partial q_\ell} \right)^2}.$

Algunas curvas son particularmente importantes en un sistema de coordenadas generalizadas. Por ejemplo, si  $q_2$  y  $q_3$  son constantes, tenemos la curva de intersección de dos superficies, una de la familia  $\mathcal{F}_2$  y otra de la familia  $\mathcal{F}_3$ .



Para una curva como  $C$  en el dibujo, el diferencial de longitud es  $ds_1 = h_1 dq_1$ . Si  $q_1$  y  $q_3$  son constantes tenemos  $ds_2 = h_2 dq_2$ , y si  $q_1$  y  $q_2$  son constantes tenemos  $ds_3 = h_3 dq_3$ .

La cantidad  $h_i$  indica cuánto se estira o encoge la longitud de un intervalo cuando se deforma para describir una curva coordenada.

**Ejemplo 4.4.** Utilizando las coordenadas esféricas calcular la longitud de un paralelo cualquiera en la esfera de radio 4 (dado por  $\varphi = \text{constante}$ ,  $0 \leq \theta \leq 2\pi$ , y  $r = 4$ ).

Observando que  $\theta = q_2$ , y sabiendo por el Ejemplo 4.3 que  $h_2 = r \sin \varphi$ , calculamos

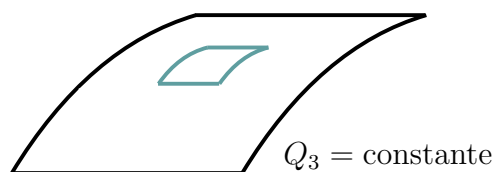
$$\text{longitud paralelo de ángulo } \varphi = \int_0^{2\pi} h_2 d\theta = \int_0^{2\pi} 4 \sin \varphi d\theta = 8\pi \sin \varphi.$$

**Observación 4.5.** Notar que para obtener la longitud de *cualquier* paralelo, se debe calcular una integral entre 0 y  $2\pi$ . Sin embargo los resultados dependen de  $q_1 = r$  y  $q_3 = \varphi$ . Aquí queda un poco más claro lo que significa  $h_2$ : mide cuánto *se estira* el segmento  $[0, 2\pi]$  cuando se deforma para describir un *paralelo* de la esfera.

## 4.5. Cálculo de áreas de *superficies coordenadas* en coordenadas generalizadas

Si  $q_3$  es constante y queremos aproximar el área de un rectángulo curvilíneo como el del dibujo, construido con *curvas coordenadas* dentro de la superficie  $Q_3 = \text{constante}$ , tendremos

$$d\sigma_{12} = ds_1 ds_2 = h_1 h_2 dq_1 dq_2.$$



De un modo análogo, si  $Q_2 = \text{constante}$ ,  $d\sigma_{13} = ds_1 ds_3 = h_1 h_3 dq_1 dq_3$ .

Y si  $Q_1 = \text{constante}$ ,  $d\sigma_{23} = ds_2 ds_3 = h_2 h_3 dq_2 dq_3$ .

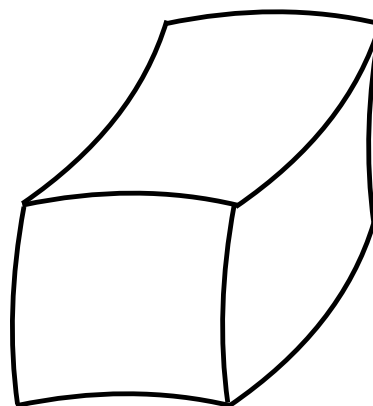
La cantidad  $\sigma_{ij}$  indica cuánto se estira o encoge el área de un rectángulo cuando se deforma para describir una superficie coordenada.

## 4.6. Cálculo de volúmenes de *cubos* con aristas que sean *curvas coordenadas*

Análogamente a lo anterior, ahora tenemos que

$$d\text{vol} = ds_1 ds_2 ds_3 = h_1 h_2 h_3 dq_1 dq_2 dq_3.$$

La cantidad  $h_1 h_2 h_3$  indica cuánto se estira o encoge el volumen de un cubo cuando se deforma para describir un cubo coordenado.



## 4.7. Los operadores diferenciales en coordenadas generalizadas

**Gradiente.** La idea es ahora escribir el gradiente de un campo escalar que viene dado en coordenadas generalizadas, como una combinación lineal de los vectores normales  $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \bar{a}_3$ .



Si  $\psi$  es un campo escalar en el espacio, entonces

$$\begin{aligned}\bar{\nabla}\psi(q_1, q_2, q_3) &= \bar{a}_1(\bar{\nabla}\psi(q_1, q_2, q_3) \cdot \bar{a}_1) + \bar{a}_2(\bar{\nabla}\psi(q_1, q_2, q_3) \cdot \bar{a}_2) + \bar{a}_3(\bar{\nabla}\psi(q_1, q_2, q_3) \cdot \bar{a}_3) \\ &= \bar{a}_1 \frac{1}{h_1} \frac{\partial\psi}{\partial q_1} + \bar{a}_2 \frac{1}{h_2} \frac{\partial\psi}{\partial q_2} + \bar{a}_3 \frac{1}{h_3} \frac{\partial\psi}{\partial q_3}.\end{aligned}$$

En la última igualdad hemos usado que  $\bar{\nabla}\psi(q_1, q_2, q_3) \cdot \bar{a}_i = \frac{1}{h_i} \frac{\partial\psi}{\partial q_i}$ ,  $i = 1, 2, 3$ , lo que puede verse a partir del siguiente razonamiento: La expresión  $\frac{\partial\psi}{\partial q_i}$  mide la variación de la cantidad  $\psi$  a medida que uno se mueve por la curva coordenada con velocidad  $h_i$ . Por lo tanto, la variación de la cantidad  $\psi$  a medida que uno se mueve con velocidad 1 es  $\frac{1}{h_i} \frac{\partial\psi}{\partial q_i}$ .

Si no lo convence este argumento, he aquí una demostración rigurosa: Supongamos que  $\psi(q_1, q_2, q_3)$  y  $\Psi(x_1, x_2, x_3)$  denotan dos fórmulas para el campo escalar  $\psi$  que coinciden en cada punto físico del espacio tridimensional, es decir

$$\psi(q_1, q_2, q_3) = \Psi(x_1, x_2, x_3)$$

siempre que  $(q_1, q_2, q_3)$  y  $(x_1, x_2, x_3)$  se relacionen a través de las fórmulas (4.1). Más precisamente

$$\psi(q_1, q_2, q_3) = \Psi(X_1(q_1, q_2, q_3), X_2(q_1, q_2, q_3), X_3(q_1, q_2, q_3)).$$

Luego, el gradiente del campo escalar es

$$\bar{\nabla}\Psi(x_1, x_2, x_3) = \frac{\partial\Psi}{\partial x_1}(x_1, x_2, x_3) \bar{i} + \frac{\partial\Psi}{\partial x_2}(x_1, x_2, x_3) \bar{j} + \frac{\partial\Psi}{\partial x_3}(x_1, x_2, x_3) \bar{k}.$$

Por otro lado, por la regla de la cadena,

$$\begin{aligned}\frac{\partial\psi}{\partial q_i} &= \frac{\partial\Psi}{\partial x_1} \frac{\partial X_1}{\partial q_i} + \frac{\partial\Psi}{\partial x_2} \frac{\partial X_2}{\partial q_i} + \frac{\partial\Psi}{\partial x_3} \frac{\partial X_3}{\partial q_i} \\ &= \bar{\nabla}\Psi \cdot \frac{\partial\bar{X}}{\partial q_i} = \bar{\nabla}\Psi \cdot (h_i \bar{a}_i),\end{aligned}$$

donde hemos usado que  $\frac{\partial\bar{X}}{\partial q_i} = \frac{\partial X_1}{\partial q_i} \bar{i} + \frac{\partial X_2}{\partial q_i} \bar{j} + \frac{\partial X_3}{\partial q_i} \bar{k}$ , y  $h_i = \left| \frac{\partial\bar{X}}{\partial q_i} \right|$  (ver Sección 4.3).

Finalmente,

$$\frac{\partial\psi}{\partial q_i} = h_i \bar{\nabla}\Psi \cdot \bar{a}_i,$$

o, lo que es lo mismo

$$\bar{\nabla}\Psi \cdot \bar{a}_i = \frac{1}{h_i} \frac{\partial\psi}{\partial q_i}.$$

**Divergencia.** Si  $\bar{V}$  es un campo vectorial en el espacio, expresado en términos de los vectores normales  $\bar{a}_i$ ,

$$\bar{V} = V_1 \bar{a}_1 + V_2 \bar{a}_2 + V_3 \bar{a}_3,$$

entonces

$$\bar{\nabla} \cdot \bar{V}(q_1, q_2, q_3) = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left[ \frac{\partial}{\partial q_1} (V_1 h_2 h_3) + \frac{\partial}{\partial q_2} (V_2 h_3 h_1) + \frac{\partial}{\partial q_3} (V_3 h_1 h_2) \right].$$

Esto se demuestra usando que  $\bar{\nabla} \cdot \bar{V} = \lim_{\text{vol } R} \frac{1}{\text{vol } R} \iint_{\partial R} \bar{V} \cdot \bar{n} d\sigma$ , con  $R$  cubos coordenados con *lados coordenados* tendiendo a cero.

**Laplaciano.** Si  $\psi$  es un campo escalar en el espacio, combinando las definiciones de gradiente y divergencia, recordando que  $\bar{\nabla}^2 \psi = \bar{\nabla} \cdot [\bar{\nabla} \psi]$ , obtenemos

$$\bar{\nabla}^2 \psi(q_1, q_2, q_3) = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left[ \frac{\partial}{\partial q_1} \left( \frac{h_2 h_3}{h_1} \frac{\partial \psi}{\partial q_1} \right) + \frac{\partial}{\partial q_2} \left( \frac{h_3 h_1}{h_2} \frac{\partial \psi}{\partial q_2} \right) + \frac{\partial}{\partial q_3} \left( \frac{h_1 h_2}{h_3} \frac{\partial \psi}{\partial q_3} \right) \right]$$

**Rotor.** Si  $\bar{V}$  es un campo vectorial en el espacio

$$\bar{\nabla} \times \bar{V}(q_1, q_2, q_3) = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \begin{vmatrix} \bar{a}_1 h_1 & \bar{a}_2 h_2 & \bar{a}_3 h_3 \\ \frac{\partial}{\partial q_1} & \frac{\partial}{\partial q_2} & \frac{\partial}{\partial q_3} \\ h_1 V_1 & h_2 V_2 & h_3 V_3 \end{vmatrix}$$

## 4.8. Ejercicios

**4.1.** Considerar las coordenadas esféricas y cilíndricas. Para cada caso:

- Describir  $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, \mathcal{F}_3$ ;
- Calcular  $h_1, h_2, h_3$ ;
- Describir los vectores normales  $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \bar{a}_3$ .
- Calcular  $d\sigma_{12}, d\sigma_{13}, d\sigma_{23}$ , y  $dvol$ ;

**4.2.** Verificar que para las coordenadas cilíndricas y esféricas se cumple que

$$\frac{\partial \bar{X}}{\partial q_i} \cdot \frac{\partial \bar{X}}{\partial q_j} = 0, \quad \text{si } i \neq j.$$

**4.3.** Describir todos los tipos de *curvas coordenadas* en los sistemas cartesianos, esféricos y cilíndricos.

**4.4.** Utilizando coordenadas cilíndricas, calcular la longitud de la hélice  $\theta(t) = t, \rho(t) = R, z(t) = t, 0 \leq t \leq 2\pi$ .

**4.5.** Utilizando coordenadas esféricas. Calcular el área del casquete esférico de apertura  $\varphi = \pi/4$ .

**4.6.** Utilizando coordenadas esféricas, calcular el volumen del cono esférico de apertura  $\varphi = \pi/4$ .

**4.7.** Escribir gradiente, divergencia y Laplaciano en coordenadas esféricas y cilíndricas.

**4.8.** Estudiar las soluciones de  $\bar{\nabla}^2 u = 0$  que solo dependen de una de las coordenadas generalizadas  $q_i$  en coordenadas cartesianas, cilíndricas y esféricas.

## Bibliografía complementaria

[Arfken-Weber] Arfken, G.B., Weber, H.J., *Mathematical Methods For Physicists*, HARCOUT-Academic Press, 2001.

# Capítulo 5

## Leyes de conservación. Ecuaciones constitutivas

### 5.1. Leyes de conservación. Balance

Sea  $\Omega$  una región del espacio  $\mathbb{R}^3$  y sea  $\partial\Omega$  su frontera, que suponemos suave a trozos. Estamos interesados en describir (cuantitativamente) la evolución espacio-temporal de una cantidad  $E$  en  $\Omega$ . Por ejemplo, la energía térmica, la masa de un compuesto, etc. La ley de conservación básica establece el hecho casi obvio siguiente:

$$\begin{array}{rcc} \text{razón de cambio} & & \text{razón de inmigración} \\ \text{temporal de } E & = & \text{menos} \\ & & \text{razón de emigración} \\ & & \text{a través de } \partial\Omega \end{array} + \begin{array}{r} \text{razón de creación} \\ \text{menos} \\ \text{razón de desaparición} \\ \text{dentro de } \Omega. \end{array} \quad (5.1)$$

Supondremos, para fijar ideas, que  $E$  es energía térmica. Más precisamente, suponemos que si  $E = E(\Omega; t)$  es la energía térmica en la región  $\Omega$  a tiempo  $t$ , entonces la *densidad de energía térmica*  $e = e(x; t)$  es la *propiedad intensiva* asociada a  $E$  y se relacionan de la siguiente manera:

$$E(\Omega; t) = \iiint_{\Omega} e(x; t) \, d\text{vol} \quad \iff \quad e(x; t) = \lim_{r \rightarrow 0^+} \frac{E(B(x, r); t)}{\text{vol}(B(x, r))}.$$

La cantidad  $e(x; t)$  también se denomina *energía térmica por unidad de volumen* en el punto  $x$  de  $\Omega$  en el instante  $t$ . Con esta notación resulta

$$\text{razón de cambio} \\ \text{temporal de } U = \frac{d}{dt} E(\Omega; t) = \frac{d}{dt} \iiint_{\Omega} e(x; t) \, d\text{vol}$$

Llamemos  $\bar{\phi}(x_1, x_2, x_3; t)$  al campo vectorial de velocidades de desplazamiento de la energía térmica, de manera que:

$$\iint_S \bar{\phi}(x; t) \cdot \bar{n} \, d\sigma = \begin{array}{l} \text{cantidad de energía térmica} \\ \text{que atraviesa la superficie } S \\ \text{en la dirección que apunta } \bar{n} \\ \text{por unidad de tiempo.} \end{array}$$

$\bar{\phi}(x; t)$  se denomina flujo de energía térmica por unidad de área en el punto  $x$  a tiempo  $t$ . Por lo tanto, si  $\bar{n}$  es el vector normal a  $\partial\Omega$  que apunta hacia fuera de  $\Omega$ ,

$$\begin{array}{l} \text{razón de inmigración} \\ \text{menos} \\ \text{razón de emigración} \\ \text{a través de } \partial\Omega \end{array} = - \iint_{\partial\Omega} \bar{\phi}(x; t) \cdot \bar{n} \, d\sigma$$

La creación y aniquilación de la cantidad  $E$  en  $\Omega$  (que en el caso de energía térmica puede corresponder a reacciones químicas exotérmicas o endotérmicas respectivamente, o a la circulación de una corriente eléctrica) está dada por una función  $f(x; t)$  definida en  $\Omega$ . La función  $f$  tiene signo arbitrario. En los puntos e instantes donde sea positiva tendremos *fuentes* de energía, mientras que cuando sea negativa tendremos *sumideros* de energía. La función  $f$  es una tasa de creación/aniquilación de energía por unidad de volumen por unidad de tiempo, de manera que

$$\begin{array}{l} \text{razón de creación} \\ \text{menos} \\ \text{razón de desaparición} \\ \text{dentro de } \Omega \end{array} = \iiint_{\Omega} f(x; t) \, d\text{vol}$$

Con estas tres magnitudes básicas, la *ley de conservación* y el Teorema de Gauss, podemos establecer una relación cuantitativa precisa entre  $e$ ,  $\bar{\phi}$  y  $f$ .

Sea  $x^0 = (x_1^0, x_2^0, x_3^0)$  un punto fijo en  $\Omega$  y sea  $B = B(x^0, r)$  una bolita chica centrada en  $x^0$  de manera que  $\overline{B(x^0, r)} \subset \Omega$ . Consideremos el balance en  $B$ .

$$\begin{array}{l} \text{razón de cambio} \\ \text{temporal de } E \text{ en } B \end{array} = \frac{d}{dt} E(B; t) = \frac{d}{dt} \iiint_B e(x; t) \, d\text{vol}$$

$$\begin{array}{l} \text{razón de inmigración/emigración} \\ \text{a través de } \partial B \end{array} = - \iint_{\partial B} \bar{\phi}(x; t) \cdot \bar{n} \, d\sigma$$

$$\begin{array}{l} \text{razón de creación/desaparición} \\ \text{dentro de } B \end{array} = \iiint_B f(x; t) \, d\text{vol}$$

Por el enunciado *verbal* del balance (5.1) tenemos que

$$\frac{d}{dt} \iiint_B e(x; t) \, d\text{vol} = - \iint_{\partial B} \bar{\phi}(x; t) \cdot \bar{n} \, d\sigma + \iiint_B f(x; t) \, d\text{vol} \quad (5.2)$$

Por el Teorema de la Divergencia de Gauss, el primer término en el miembro derecho de la ecuación anterior es:

$$- \iint_{\partial B} \bar{\phi}(x; t) \cdot \bar{n} \, d\sigma = - \iiint_B \bar{\nabla} \cdot \bar{\phi}(x; t) \, d\text{vol},$$

donde  $\bar{\nabla} \cdot \bar{\phi}$  es, claro, la divergencia del flujo térmico. Si  $e$  es una función *suave*, como la derivación en el miembro izquierdo de (5.2) es con respecto a la variable tiempo, que no es la de integración, y como estamos considerando una bola  $B$  fija que no depende de la variable temporal, tenemos también que

$$\frac{d}{dt} \iiint_B e(x; t) \, d\text{vol} = \iiint_B \frac{\partial}{\partial t} e(x; t) \, d\text{vol}.$$

Finalmente, la ecuación (5.2) se reescribe

$$\iiint_B \left[ \frac{\partial}{\partial t} e(x; t) + \bar{\nabla} \cdot \bar{\phi}(x; t) - f(x; t) \right] d\text{vol} = 0.$$

Esta igualdad debe cumplirse para toda bola  $B$  tal que  $\bar{B} \subset \Omega$ . Si  $e$  y  $\bar{\phi}$  son de clase  $C^1$  y si  $f$  es continua, entonces la función entre corchetes es continua, y por lo visto en el Capítulo 1 se tiene que cumplir que

$$\frac{\partial}{\partial t} e(x; t) + \bar{\nabla} \cdot \bar{\phi}(x; t) - f(x; t) = 0$$

para todo  $x \in \Omega$  y todo instante de tiempo  $t$ .

La *ley de conservación* (de la energía) es entonces la ecuación diferencial en derivadas parciales de primer orden dada por

$$\frac{\partial e}{\partial t} + \bar{\nabla} \cdot \bar{\phi} = f. \quad (5.3)$$

**Observación 5.1.** Una ley de conservación similar se cumple si  $C$  representa una *concentración*, que es también una densidad de masa de una cierta sustancia, por unidad de volumen:

$$\frac{\partial C}{\partial t} + \bar{\nabla} \cdot \bar{\phi} = f. \quad (5.4)$$

En este caso  $\bar{\phi}$  es el flujo de masa por unidad de área, y  $f$  es un término fuente de masa por unidad de volumen por unidad de tiempo.

## 5.2. Relaciones constitutivas

Supongamos ahora que denotamos con:

- $u = u(x; t)$  a la temperatura en el punto  $x \in \Omega$  en el instante  $t$ ;
- $\rho = \rho(x)$  a la densidad (de masa) del medio en el punto  $x$  de  $\Omega$ ;
- $c = c(x)$  al calor específico del medio en el punto  $x$  de  $\Omega$ . Se denomina calor específico a la energía térmica necesaria para aumentar en *un grado* de temperatura *un gramo* de la sustancia que constituye el medio en el punto  $x$ ).

Entonces

$$e = c\rho u.$$

La ley de conservación toma pues la forma

$$c\rho \frac{\partial u}{\partial t} + \bar{\nabla} \cdot \bar{\phi} = f,$$

donde  $c$ ,  $\rho$  y  $f$  son generalmente datos del problema, y  $u$ ,  $\bar{\phi}$  son las incógnitas.

Es claro que teniendo una sola ecuación, el problema de encontrar  $u$  y  $\bar{\phi}$  no está suficientemente determinado. Las ecuaciones de balance, o leyes de conservación tienen que

acoplarse con *relaciones constitutivas* que describen, cuantitativamente relaciones entre  $\bar{\phi}$  y  $u$ . La relación constitutiva para la conducción del calor se llama Ley de Fourier y es elemental desde el punto de vista heurístico: “La energía térmica fluye desde las regiones más calientes hacia las más frías y la magnitud del flujo es proporcional a la razón de cambio (espacial) de la temperatura”. En otros términos (más concretos),

$$\bar{\phi} = -K\bar{\nabla}u,$$

donde  $K = K(x)$  se llama conductividad térmica del material y puede ser diferente en puntos diferentes. Es claro que a mayor  $K$ , mayor flujo  $|\bar{\phi}|$ . Notar que el signo menos, admitiendo que  $K$  es positiva, está para satisfacer el requerimiento de dirección del flujo: “de altas a bajas temperaturas” que es lo opuesto de la dirección del gradiente de  $u$ .

El sistema

$$\begin{cases} \text{Ley de Conservación} \\ \text{Relación Constitutiva} \end{cases}$$

nos da

$$\begin{cases} c\rho \frac{\partial u}{\partial t} + \bar{\nabla} \cdot \bar{\phi} = f, \\ \bar{\phi} = -K\bar{\nabla}u. \end{cases}$$

Sustituyendo la segunda en la primera, obtenemos la forma general de la ecuación de difusión o ecuación del calor en el espacio tridimensional:

$$c\rho \frac{\partial u}{\partial t} - \bar{\nabla} \cdot (K\bar{\nabla}u) = f. \quad (5.5)$$

Recordemos que  $c$ ,  $\rho$  y  $K$  son funciones del punto.

Cuando la conductividad térmica  $K$  es constante, la ecuación toma la forma

$$c\rho \frac{\partial u}{\partial t} - K\bar{\nabla}^2 u = f.$$

Cuando no hay fuentes (ni sumideros) y también el calor específico y la densidad son constantes, tenemos

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k\bar{\nabla}^2 u = k\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_3^2}\right)$$

con  $k = \frac{K}{c\rho}$  la *difusividad* del material.

**Observación 5.2.** Cuando consideramos una concentración (de masa)  $C$  en lugar de una temperatura, o densidad de energía térmica, la relación constitutiva que relaciona  $C$  con el flujo  $\bar{\phi}$  se denomina *Ley de Fick*:

$$\bar{\phi} = -k\bar{\nabla}C,$$

que es igual a la de Fourier. Incorporando esta relación constitutiva en la ley de conservación obtenemos:

$$\frac{\partial C}{\partial t} - \bar{\nabla} \cdot (k\bar{\nabla}C) = f.$$

Obtuvimos la misma ecuación para la incógnita  $C$  que habíamos obtenido anteriormente para la incógnita  $u$ . Esta ecuación se denomina *ecuación de difusión* y modela tanto difusión de calor como de masa.

### 5.3. Reducción de dimensiones

Volvamos a la ecuación del calor. Cuando hay razones físicas para predecir la independencia de la temperatura de algunas de las variables  $x_1, x_2, x_3$  se tienen versiones de la ecuación del calor en dimensiones uno (varillas) y dos (placas), pero esto no implica, necesariamente la unidimensionalidad, o bidimensionalidad del medio en el que está ocurriendo el proceso de difusión.

**Ecuación del calor unidimensional:** Si consideramos una varilla de pequeño espesor, aislada lateralmente, y alineada con el eje  $x_1$ , resulta un modelo válido al suponer que todas las cantidades son constantes sobre planos paralelos al plano  $x_2x_3$ . Por lo tanto obtenemos la ecuación:

$$c\rho \frac{\partial u}{\partial t} - \underbrace{\frac{\partial}{\partial x_1} \left( K \frac{\partial u}{\partial x_1} \right)}_{=\nabla \cdot (K \nabla u)} = f,$$

con  $u = u(x_1; t)$  y  $f = f(x_1; t)$ . En este caso el flujo  $\bar{\phi} = \left( -K \frac{\partial u}{\partial x_1}, 0, 0 \right) = -K \frac{\partial u}{\partial x_1} \bar{i}$ , y suele definirse directamente el *flujo escalar*  $\phi = -K \frac{\partial u}{\partial x_1}$ , interpretando que el flujo es hacia la derecha cuando  $\phi > 0$  y hacia la izquierda cuando  $\phi < 0$ .

Llamando  $x$  a  $x_1$  (ya que es la única variable de interés) obtenemos

$$c\rho \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x} \left( K \frac{\partial u}{\partial x} \right) = f,$$

que también podemos escribir

$$c\rho u_t - (K u_x)_x = f.$$

En el caso en que los coeficientes  $c, \rho$  y  $K$  son constantes, y llamando  $\tilde{f}$  a  $\frac{f}{c\rho}$

$$\frac{\partial u}{\partial t} - k \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \tilde{f},$$

o, lo que es lo mismo

$$u_t - k u_{xx} = \tilde{f}.$$

**Ecuación del calor bidimensional:** Si consideramos una placa plana delgada, alineada con el plano  $x_1x_2$ , aislada en su parte superior e inferior, es válido suponer que todas las cantidades son constantes sobre rectas paralelas al eje  $x_3$  y obtenemos la ecuación:

$$c\rho \frac{\partial u}{\partial t} - \underbrace{\left[ \frac{\partial}{\partial x_1} \left( K \frac{\partial u}{\partial x_1} \right) + \frac{\partial}{\partial x_2} \left( K \frac{\partial u}{\partial x_2} \right) \right]}_{=\nabla \cdot (K \nabla u)} = f$$

con  $u = u(x_1, x_2; t)$  y  $f = f(x_1, x_2; t)$ . En el caso en que los coeficientes  $c, \rho$  y  $K$  son constantes, y llamando  $x, y$  a  $x_1, x_2$  respectivamente obtenemos

$$\frac{\partial u}{\partial t} - k \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) = \tilde{f},$$

o, lo que es lo mismo

$$u_t - k(u_{xx} + u_{yy}) = \tilde{f}.$$

## 5.4. Condiciones iniciales y de borde

Cuando intentemos resolver la ecuación del calor en una región delimitada, por ejemplo, correspondiente a un objeto con una cierta forma y con ciertas propiedades físicas, necesitaremos agregar al problema ciertas *condiciones iniciales* (CI) y *de borde* (CB).

Consideremos entonces, para fijar ideas, que tenemos un objeto conductor del calor (por ejemplo un metal) que ocupa una región  $\Omega$  del espacio.

Quisiéramos usar la ecuación del calor para calcular soluciones y predecir temperaturas futuras, o calcular temperaturas en puntos del objeto donde no podemos medir.

Como la ecuación del calor tiene *una* derivada con respecto al tiempo  $t$ , debemos proveer una *condición inicial* (CI), usualmente a tiempo  $t = 0$ : la temperatura inicial. Es posible que la temperatura inicial no sea constante, sino que dependa de  $x$ . Luego, debemos proveer una *distribución* inicial de temperatura

$$u(x; 0) = f(x), \quad x \in \Omega.$$

Esta condición suele escribirse también de la siguiente manera:

$$u = f, \quad x \in \Omega, \quad t = 0.$$

¿Es esta información suficiente para predecir la temperatura en el futuro? La respuesta es no. Sabemos la distribución de temperatura inicial y sabemos que la temperatura cambia acorde a la ecuación diferencial parcial (5.5). Pero aún nos falta saber qué ocurre en el borde del objeto  $\Omega$ . Sin esta información, no podemos predecir el futuro.

Los siguientes tipos de condiciones de borde son los más usuales:

**Temperatura prescrita.** En ciertas situaciones, puede suponerse que la temperatura en el borde del objeto (o en parte del borde) se conoce o está predeterminada y es igual a  $u_B(x; t)$  en el punto  $x$  de  $\partial\Omega$  en el instante  $t$ . En este caso, la condición de borde se escribe

$$u(x; t) = u_B(x; t), \quad x \in \partial\Omega, \quad t \geq 0. \quad (5.6)$$

Una situación física que puede representarse con esta CB es el caso en que  $u_B(t)$  es la temperatura de un baño de fluido con el cual el objeto está en contacto.

Otra situación donde esta condición de borde puede ser útil es cuando se conoce la temperatura de un objeto en todos los puntos de su *borde* y quiere utilizarse la ecuación del calor para (una vez resuelta) conocer la temperatura en todos los puntos interiores. Por ejemplo, cuando sumergimos un ñoqui en agua hirviendo, todos los puntos del borde del ñoqui estarán a  $100^\circ\text{C}$ , podemos utilizar la ecuación del calor para saber cuándo las partes del ñoqui más centrales llegan a  $99^\circ\text{C}$ . En este caso, la condición de borde será

$$u(x; t) = 100, \quad x \in \partial\Omega, \quad t \geq 0.$$

La condición de borde en que se prescribe el valor de la incógnita  $u$  se denomina condición de borde de tipo *Dirichlet*.



**Flujo prescripto.** En otras situaciones es posible suponer que se conoce (o está prescripto) el *flujo de calor* en lugar de la temperatura, es decir

$$-K(x) \underbrace{\nabla u(x;t) \cdot \bar{n}}_{\frac{\partial u}{\partial \bar{n}}} = \varphi(x;t), \quad x \in \partial\Omega, \quad t \geq 0, \quad (5.7)$$

donde  $\varphi(x;t)$  es una función conocida o dada, y  $\bar{n}$  es el vector normal exterior a  $\partial\Omega$ .

El ejemplo más simple de flujo de calor prescripto en la frontera es cuando el borde está *perfectamente aislado*. En este caso no hay flujo en la frontera ( $\varphi \equiv 0$ ), y la condición de borde se escribe

$$\frac{\partial u}{\partial \bar{n}}(x;t) = 0, \quad x \in \partial\Omega, \quad t \geq 0. \quad (5.8)$$

La condición de borde en que se prescribe el valor de la *derivada normal* de la incógnita  $u$  se denomina condición de borde de tipo *Neumann*.

**Ley de enfriamiento de Newton.** Cuando el objeto está en contacto con un fluido en movimiento (aire, agua, aceite, etc.), entonces las condiciones hasta ahora vistas no parecen del todo apropiadas. Por ejemplo, imaginemos un objeto que está caliente, y en contacto con aire en movimiento. El calor saldrá del objeto, calentando el aire. Y el aire se llevará el calor por el movimiento mismo. Experimentos muestran que el flujo de calor que sale del objeto es proporcional a la diferencia de temperatura entre el objeto ( $u(x;t)$ ) y la temperatura del fluido exterior ( $u_B(x,t)$ ). Esta condición de frontera se llama *Ley de enfriamiento de Newton*. Si la queremos escribir en términos matemáticos resulta

$$-K(x) \frac{\partial u}{\partial \bar{n}}(x;t) = H[u(x;t) - u_B(x,t)], \quad x \in \partial\Omega, \quad t \geq 0, \quad (5.9)$$

donde la constante de proporcionalidad  $H$  se llama *coeficiente de transferencia de calor* o coeficiente de convección. Esta condición de borde involucra una combinación lineal de  $u$  y  $\frac{\partial u}{\partial \bar{n}}$ .

El coeficiente  $H$  en la ley de enfriamiento de Newton se determina experimentalmente. Depende de las propiedades del objeto como así también de las del fluido (inclusive de la velocidad con la que el fluido se mueve). Si el coeficiente es muy pequeño, muy poca energía fluye a través del borde. En el límite  $H \rightarrow 0$ , la ley de enfriamiento de Newton, se convierte en la condición de borde aislado. Podemos pensar que la ley de Newton con  $H \neq 0$  representa la situación en que el borde no está perfectamente aislado.

Cuando  $H$  es grande, *mucha* energía fluye a través del extremo. En el límite  $H \rightarrow \infty$ , la condición de borde se transforma la condición de temperatura prescripta  $u(x,t) = u_B(x,t)$ . Esto puede verse fácilmente si dividimos (5.9) por  $H$ :

$$-\frac{K(x)}{H} \frac{\partial u}{\partial \bar{n}}(x,t) = u(x,t) - u_B(x,t),$$

y tomamos límite cuando  $H \rightarrow \infty$ .

La condición de borde en que se relaciona el valor de la derivada normal  $\frac{\partial u}{\partial \bar{n}}$  con la diferencia entre  $u$  y un dato  $u_B$  se denomina condición de borde de tipo *Robin*.

**Observación 5.3.** Cuando consideramos el flujo de calor *unidimensional*, por ejemplo en una barra cilíndrica de longitud  $L$ , las condiciones de borde se escriben de la siguiente manera:

$x$	Dirichlet	Neumann	Robin
0	$u(0, t) = u_B(0, t)$	$K(0)u_x(0, t) = \phi(0, t)$	$K(0)u_x(0, t) = H[u(0, t) - u_B(0, t)]$
$L$	$u(L, t) = u_B(L, t)$	$-K(L)u_x(L, t) = \phi(L, t)$	$-K(L)u_x(L, t) = H[u(L, t) - u_B(L, t)]$

Es importante observar el cambio de signo: el flujo hacia afuera por unidad de área es  $K(0)u_x(0, t)$  en  $x = 0$  y es  $-K(L)u_x(L, t)$  en  $x = L$ .

## 5.5. La ecuación de Laplace y la ecuación de Poisson

Cuando la conductividad térmica del material y la fuente  $f$  son independientes del tiempo en la ecuación general de conducción del calor

$$c\rho \frac{\partial u}{\partial t} = \bar{\nabla} \cdot K \bar{\nabla} u + f,$$

y nos proponemos encontrar soluciones estacionarias (independientes del tiempo) de esa ecuación, al hacer  $u_t = 0$  tenemos la ecuación de Poisson

$$\begin{aligned} \bar{\nabla} \cdot K \bar{\nabla} u &= -f \\ \bar{\nabla}^2 u &= -\tilde{f} \quad \text{si } K \text{ es constante.} \end{aligned}$$

Cuando la fuente es nula tenemos la ecuación de Laplace

$$\begin{aligned} \bar{\nabla} \cdot K \bar{\nabla} u &= 0 \\ \bar{\nabla}^2 u &= 0 \quad \text{si } K \text{ es constante.} \end{aligned}$$

## 5.6. Otras relaciones constitutivas

La forma general de una ley de conservación de una cantidad  $u = u(x; t)$  es una relación diferencial entre  $u$ , el flujo  $\bar{\phi}$  de la cantidad  $u$  y las fuentes  $f$  que miden la generación o desaparición de la cantidad  $u$  en el dominio. Precisamente

$$u_t + \bar{\nabla} \cdot \bar{\phi} = f.$$

En muchos casos la fuente  $f$  es función del punto del espacio, del instante  $t$  y también de  $u$  misma:  $f = f(x, t, u)$ .

Las relaciones constitutivas son las relaciones entre el flujo  $\bar{\phi}$  y la cantidad  $u$ . En el caso de la conducción del calor, la relación constitutiva es la Ley de Fourier  $\bar{\phi} = -K\bar{\nabla}u$ . Otros modelos físicos (en sentido amplio) que tienen la misma ley de conservación están dados por otras relaciones constitutivas. En dimensión espacial igual a uno, la ley de conservación toma la forma

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial x} = f$$

o

$$u_t + \bar{\phi}_x = f.$$

El carácter vectorial de  $\bar{\phi}$  queda determinado por su signo, entendiendo que cuando  $\phi$  es positivo el flujo es en el sentido creciente de la variable  $x$  (hacia la derecha) y cuando es negativo, el flujo ocurre en el sentido opuesto. Así, la ecuación que da la ley de conservación tiene la forma sencilla

$$u_t + \phi_x = f,$$

$$u = u(x, t); \phi = \phi(x, t); f = f(x, t, u).$$

**Transporte, advección:** Relación constitutiva “*el flujo es proporcional a la cantidad que fluye*”

$$\phi = cu.$$

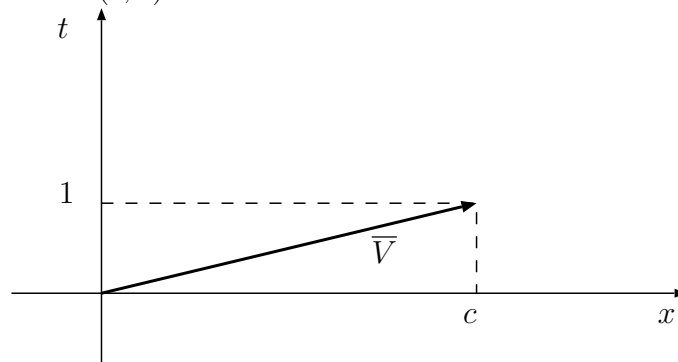
El flujo  $\phi$  no depende explícitamente de  $t$  ni de  $x$ , solo a través de  $u$ . La incógnita  $u$  satisface la ecuación diferencial en derivadas parciales de primer orden

$$u_t + cu_x = f.$$

Cuando  $f = 0$  se tiene la ecuación de advección:

$$u_t + cu_x = 0; \quad u = u(x, t).$$

Esta ecuación es sencilla porque es esencialmente una ecuación ordinaria elemental. En efecto, pensemos el lado izquierdo como el producto escalar del vector  $(c, 1)$  con el gradiente espacio-temporal  $(u_x, u_t)$  de  $u$ . La ecuación de advección dice entonces que la derivada direccional de  $u$  en la dirección  $(c, 1)$  es nula. Esto significa que  $u$  es constante en la dirección del vector  $(c, 1)$ .



En otras palabras, la ecuación de advección dice que  $u$  es constante en líneas paralelas a  $\bar{V} = (c, 1)$ . Notar que un vector perpendicular a  $(c, 1)$  es  $(1, -c)$ , y por consiguiente  $u$  solo puede depender de la *variable perpendicular a  $cx + t$* , es decir

$$u(x, t) = F(x - ct)$$

para alguna función  $F$  de una variable, de clase  $C^1$  (derivable con derivada continua). En efecto, por la regla de la cadena

$$u_t = F'(x - ct)(-c), \quad u_x = F'(x - ct)1,$$

y por lo tanto

$$u_t + cu_x = 0.$$

Notemos de paso que si  $u(x, 0) = F(x)$  es la condición inicial, entonces necesariamente tendremos que la única solución del problema

$$\begin{cases} u_t + cu_x = 0, & (x, t) \in \mathbb{R}^2, \\ u(x, 0) = F(x), & x \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

está dada por  $u(x, t) = F(x - ct)$ . Por ejemplo, si  $F(x) = e^{-x^2}$ , la solución es una Gaussiana que se traslada a velocidad  $c$ :

$$u(x, t) = e^{-(x-ct)^2}.$$

Se tiene *advección con decaimiento* cuando el término fuente  $f = -\lambda u$  con  $\lambda > 0$ .

**Advección no lineal:** Cuando la relación constitutiva  $\phi = \varphi(u)$  está dada por una función no lineal  $\varphi$  de la variable  $u$ . La ecuación diferencial de primer orden toma ahora la forma

$$u_t + \varphi'(u)u_x = f.$$

## 5.7. La ecuación de ondas

Más adelante haremos una deducción de la ecuación de ondas desde el punto de vista de vibraciones de una cuerda. Elegimos ahora el punto de vista de las ondas electromagnéticas porque esto nos lleva a introducir el sistema de las Ecuaciones de Maxwell.

La profunda relación entre campos eléctricos y magnéticos, cuya investigación se inicia con los experimentos de Faraday, “moviendo imanes” y “haciendo girar corrientes eléctricas” está expresada en el sistema de ecuaciones diferenciales en derivadas parciales de primer orden llamado *Las Ecuaciones de Maxwell*. Denotemos por  $\bar{B} = \bar{B}(x; t)$  el campo magnético en el punto  $x$  y en el instante  $t$ . Denotemos con  $\bar{E} = \bar{E}(x; t)$  el campo eléctrico. Ambos campos son solenoidales ( $\nabla \cdot \bar{B} = \nabla \cdot \bar{E} = 0$ ) y las variaciones temporales de cada uno de ellos se traducen en variaciones espaciales del otro. Muchísimo más precisamente,

el sistema de Ecuaciones de Maxwell se escribe:

$$M : \begin{cases} \nabla \cdot \bar{B} = 0 & \text{(M.1) Ley de Gauss para el campo magnético} \\ \nabla \cdot \bar{E} = 0 & \text{(M.2) Ley de Gauss} \\ \nabla \times \bar{B} = \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \bar{E}}{\partial t} & \text{(M.3) Ley de Ampère} \\ \nabla \times \bar{E} = -\frac{\partial \bar{B}}{\partial t} & \text{(M.4) Ley de Faraday} \end{cases}$$

donde  $\varepsilon_0$  es la *permisividad* del espacio (constante eléctrica) y  $\mu_0$  es la *permeabilidad* del espacio (constante magnética). A partir de este sistema obtendremos la ecuación de ondas electromagnéticas. Para ello necesitaremos una fórmula que es muy útil y relaciona tres operadores de segundo orden obtenidos por iteración del operador *nabla*:  $\nabla$ .

Si  $\bar{V}$  es un campo vectorial de clase  $C^2$  en el espacio, el *Laplaciano vectorial* de  $\bar{V}$  es el campo vectorial cuyas componentes son los Laplacianos de cada una de las componentes de  $\bar{V}$ :

$$\text{Si } \bar{V} = V_1 \bar{i} + V_2 \bar{j} + V_3 \bar{k}, \quad \text{entonces } \nabla^2 \bar{V} = \nabla^2 V_1 \bar{i} + \nabla^2 V_2 \bar{j} + \nabla^2 V_3 \bar{k}.$$

Por otra parte, puesto que la divergencia de  $\bar{V}$  es un campo escalar, podemos calcular su gradiente para obtener  $\nabla(\nabla \cdot \bar{V})$ . También está bien definido el rotor del rotor de  $\bar{V}$ :  $\nabla \times (\nabla \times \bar{V})$ . La fórmula que nos interesa es una relación entre estos tres operadores vectoriales, que resumimos en el siguiente lema

**Lema 5.4.** *Si  $\bar{V}$  es un campo vectorial  $C^2$  en el espacio, entonces*

$$\nabla^2 \bar{V} = \nabla(\nabla \cdot \bar{V}) - \nabla \times (\nabla \times \bar{V}).$$

*O sea, el Laplaciano vectorial es el gradiente de la divergencia menos el rotor del rotor.*

*Demostración.* Supongamos primero que  $\bar{V} = V_1 \bar{i}$ , entonces  $\nabla^2 \bar{V} = \nabla^2 V_1 \bar{i}$ , y por otro lado

$$\begin{aligned} \nabla(\nabla \cdot \bar{V}) - \nabla \times (\nabla \times \bar{V}) &= \nabla \left( \frac{\partial V_1}{\partial x_1} \right) - \nabla \times \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ \frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_3} \\ V_1 & 0 & 0 \end{vmatrix} \\ &= \nabla \left( \frac{\partial V_1}{\partial x_1} \right) - \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ \frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_3} \\ 0 & \frac{\partial V_1}{\partial x_3} & -\frac{\partial V_1}{\partial x_2} \end{vmatrix} \\ &= \frac{\partial^2 V_1}{\partial x_1^2} \bar{i} + \frac{\partial^2 V_1}{\partial x_2 \partial x_1} \bar{j} + \frac{\partial^2 V_1}{\partial x_3 \partial x_1} \bar{k} \\ &\quad + \left( \frac{\partial^2 V_1}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 V_1}{\partial x_3^2} \right) \bar{i} - \frac{\partial^2 V_1}{\partial x_2 \partial x_1} \bar{j} - \frac{\partial^2 V_1}{\partial x_3 \partial x_1} \bar{k} \\ &= \nabla^2 V_1 \bar{i} = \nabla^2 \bar{V}. \end{aligned}$$

De la misma manera se prueba la tesis en el caso  $\bar{V} = V_2 \bar{j}$  y en el caso  $\bar{V} = V_3 \bar{k}$ . Como todos los operadores son lineales, se pueden sumar todos los casos y obtener la tesis deseada. Más precisamente, si  $\bar{V} = V_1 \bar{i} + V_2 \bar{j} + V_3 \bar{k}$

$$\begin{aligned} \bar{\nabla}(\bar{\nabla} \cdot \bar{V}) - \bar{\nabla} \times (\bar{\nabla} \times \bar{V}) &= \bar{\nabla}(\bar{\nabla} \cdot (V_1 \bar{i})) - \bar{\nabla} \times (\bar{\nabla} \times (V_1 \bar{i})) \\ &\quad + \bar{\nabla}(\bar{\nabla} \cdot (V_2 \bar{j})) - \bar{\nabla} \times (\bar{\nabla} \times (V_2 \bar{j})) \\ &\quad + \bar{\nabla}(\bar{\nabla} \cdot (V_3 \bar{k})) - \bar{\nabla} \times (\bar{\nabla} \times (V_3 \bar{k})) \\ &= \bar{\nabla}^2 V_1 \bar{i} + \bar{\nabla}^2 V_2 \bar{j} + \bar{\nabla}^2 V_3 \bar{k} = \bar{\nabla}^2 \bar{V}. \quad \square \end{aligned}$$

Volvamos ahora al sistema de Maxwell con la fórmula del lema. Calculamos el rotor en ambos miembros de (M.4):

$$\bar{\nabla} \times (\bar{\nabla} \times \bar{E}) = -\bar{\nabla} \times \left( \frac{\partial \bar{B}}{\partial t} \right) = -\frac{\partial}{\partial t} (\bar{\nabla} \times \bar{B}),$$

Derivamos con respecto a  $t$  ambos miembros de (M.3)

$$\frac{\partial}{\partial t} (\bar{\nabla} \times \bar{B}) = \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \bar{E}}{\partial t^2},$$

y obtenemos, usando (M.2) que

$$\varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \bar{E}}{\partial t^2} = -\bar{\nabla} \times (\bar{\nabla} \times \bar{E}) = -\bar{\nabla} \times (\bar{\nabla} \times \bar{E}) + \bar{\nabla}(\bar{\nabla} \cdot \bar{E}).$$

Luego, por el Lema 5.4

$$-\bar{\nabla} \times (\bar{\nabla} \times \bar{E}) + \bar{\nabla}(\bar{\nabla} \cdot \bar{E}) = \bar{\nabla}^2 \bar{E},$$

y por lo tanto el campo eléctrico satisface

$$\bar{\nabla}^2 \bar{E} = \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \bar{E}}{\partial t^2}.$$

De manera análoga, el campo magnético  $\bar{B}$  satisface

$$\bar{\nabla}^2 \bar{B} = \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \bar{B}}{\partial t^2}.$$

Más precisamente,

$$\begin{cases} \bar{\nabla}^2 E_i = \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 E_i}{\partial t^2}, \\ \bar{\nabla}^2 B_i = \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 B_i}{\partial t^2}, \end{cases} \quad i = 1, 2, 3,$$

son las *ecuaciones de ondas* que deben satisfacer las componentes de los campos eléctrico y magnético.

## 5.8. La ecuación de Schrödinger

La función de onda de una partícula es un campo escalar (complejo)  $\psi(P, t)$  cuyo módulo mide la probabilidad de que la partícula, en el instante  $t$ , esté en una región dada del espacio. Así:

$$\text{Prob}(\Omega, t) = \iiint_{\Omega} |\psi(x; t)|^2 d\text{vol}$$

es la probabilidad de que *la partícula* esté en  $\Omega$  en el instante  $t$ . Necesariamente

$$\iiint_{\mathbb{R}^3} |\psi(x; t)|^2 d\text{vol} = 1.$$

La función de onda  $\psi$  de una partícula bajo la acción de un potencial  $V$  tiene que satisfacer la Ecuación de Schrödinger que, en forma simplificada luce de la siguiente manera

$$i \frac{\partial \psi}{\partial t} + \nabla^2 \psi = V.$$

Esta ecuación se parece solo en su aspecto exterior a una ecuación de difusión, porque el factor complejo  $i$  cambia completamente el comportamiento de las soluciones.

## 5.9. Ejercicios

\* **5.1.** Sea  $\Omega$  un abierto de  $\mathbb{R}^d$ , y sea  $B$  una bola tal que su clausura está contenida en  $\Omega$ . Demostrar que si  $u : \Omega \times (0, T) \rightarrow \mathbb{R}$  es  $C^1$  (todas las derivadas parciales de primer orden son continuas) entonces

$$\frac{d}{dt} \int_B u(x, t) dx = \int_B u_t(x, t) dx, \quad \forall t \in (0, T).$$

**5.2.** Considerar una barra cilíndrica de longitud  $L$  alineada con el eje  $x$ , ocupando el intervalo  $[0, L]$ , suponer que su conductividad térmica y temperatura son constantes en los planos paralelos al plano  $yz$ . Llamemos  $K(x)$  a la conductividad térmica a distancia  $x$  del extremo izquierdo y  $u(x; t)$  a la temperatura a distancia  $x$  del extremo izquierdo. Supongamos que el área de la sección transversal de la barra cilíndrica es  $A$ .

- (a) Escribir sendas fórmulas para el flujo total de calor *hacia fuera* de la barra en  $x = 0$  y en  $x = L$ .
- (b) Escribir sendas fórmulas para la cantidad total de calor que fluyó hacia fuera de la barra en  $x = 0$  y en  $x = L$  por el período de tiempo desde  $t = 0$  hasta  $t = T$ .

**5.3.** Supongamos que se unen dos barras cilíndricas de la misma forma, pero diferente material en el plano  $x = x_0$ . Supongamos que la que ocupa el intervalo  $[0, x_0]$  tiene conductividad térmica  $K_1$  y la que ocupa el intervalo  $[x_0, L]$  tiene conductividad térmica  $K_2$ . Se dice que estas dos barras están en *contacto térmico perfecto* si la temperatura es continua en  $x = x_0$ :

$$u(x_0^-, t) = u(x_0^+, t)$$

y no se pierde nada de energía calórica en  $x = x_0$  (es decir, la energía calórica que fluye hacia fuera de una barra fluye hacia adentro de la otra). ¿Qué ecuación matemática representa la condición

*la energía calórica que fluye hacia fuera de una barra fluye hacia adentro de la otra en  $x = x_0$ ?*

**5.4.** Considerar un baño conteniendo un volumen  $V$  de aceite, con calor específico  $c_f$  y densidad de masa  $\rho_f$ , en el que se sumerge un cuerpo de metal con calor específico  $c_m$ , densidad  $\rho_m$  y conductividad térmica  $K_m$ . Suponer que el baño se agita rápidamente de modo que la temperatura del baño es aproximadamente uniforme en todo el recipiente que lo contiene, y ésta es igual a la temperatura del cuerpo de metal en todo su contorno. Supongamos que el baño está térmicamente aislado excepto donde está en perfecto contacto térmico con el cuerpo de metal, donde puede enfriarse o calentarse dependiendo de la temperatura del mismo. El objetivo de este problema es determinar una ecuación para la temperatura del baño, que resultará a su vez una condición de borde para el cuerpo de metal. Para hacerlo seguiremos los siguientes pasos.

- (a) Llamemos  $T(t)$  a la temperatura del aceite. Escribir una fórmula que represente la energía térmica total del baño de aceite.
- (b) Escribir una fórmula que represente la razón de cambio de la energía térmica total del aceite.
- (c) Sea  $\Omega$  la región que ocupa el cuerpo de metal, y sea  $u(x; t)$  la temperatura en el punto  $x$  del metal a tiempo  $t$ . Escribir una fórmula que represente el flujo de calor hacia fuera del cuerpo de metal.
- (d) Como la cantidad de calor que fluye hacia fuera del cuerpo de metal es la cantidad de calor que *ingresa* al fluido, igualando las fórmulas de los ítems (b) y (c) obtenemos una ecuación diferencial (ordinaria) para  $T(t)$  que está acoplada con la ecuación del calor en el metal. Escribirla.
- (e) Escribir un sistema de ecuaciones diferenciales para  $T(t)$  (la temperatura del aceite) y  $u(x; t)$  (la temperatura del metal).

## Bibliografía complementaria

[Haberman 1998] Haberman, R., *Elementary Applied Partial Differential Equations*, Prentice Hall, Upper Saddle River, NJ, 1998.



# Capítulo 6

## Ecuaciones Diferenciales. Una breve introducción

Una ecuación diferencial es una ecuación que involucra una *función incógnita* y algunas de sus derivadas. Si la incógnita es una función de más de una variable, entonces la ecuación se llama *ecuación en derivadas parciales* (EDP) pues las derivadas de la incógnita son derivadas parciales. Ejemplos de EDPs son las ecuaciones que aparecieron en el capítulo anterior cuando vimos las leyes de conservación junto con las ecuaciones constitutivas, y nuestro objetivo es resolver y comprender propiedades cuantitativas y cualitativas de las soluciones de estas ecuaciones.

Cuando la función incógnita depende solo de una variable, la ecuación se llama *ecuación diferencial ordinaria* (EDO). A continuación veremos un breve repaso de algunos aspectos básicos de EDOs, que serán necesarios para resolver las EDPs, que son la parte principal de este curso.

### 6.1. Ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden

Una EDO es de primer orden si en su formulación aparece la derivada de la función incógnita, y tal vez la función incógnita sin derivar, pero no aparecen derivadas de orden superior a uno de la incógnita.

#### 6.1.1. EDOs de primer orden separables

Una EDO de primer orden se dice *separable* si puede escribirse de la siguiente manera:

$$f(y) \frac{dy}{dx} = g(x), \quad (6.1)$$

donde  $y$  es la función incógnita de la variable independiente  $x$ .

Son ejemplos de EDOs de primer orden separables las siguientes ecuaciones en la función incógnita  $y = y(x)$ .

- $\frac{dy}{dx} = 5$  ;
- $\frac{dy}{dx} = -3y$  (pues es equivalente a  $\frac{1}{y} \frac{dy}{dx} = -3$ );
- $\frac{dy}{dx} = xy$  (pues es equivalente a  $\frac{1}{y} \frac{dy}{dx} = x$ );
- $\frac{dy}{dx} - y^2 = 0$  (pues es equivalente a  $\frac{1}{y^2} \frac{dy}{dx} = 1$ );
- $\frac{dy}{dx} y = -x$ .

Las ecuaciones separables pueden resolverse integrando (cuando es posible) a cada lado con respecto a  $x$ . Integrando el lado izquierdo de (6.1) obtenemos

$$\int f(y) \frac{dy}{dx} dx = \int f(y) dy = F(y) + C_1,$$

donde  $F(y)$  es una antiderivada, o primitiva de  $f(y)$  (i.e.,  $F'(y) = f(y)$ ) y  $C_1$  es una constante arbitraria. El símbolo  $\int f(y) dy$  representa la *familia* de todas las antiderivadas de  $f(y)$  y como sabemos todas ellas difieren entre sí en una constante. En este caso,  $F(y)$  es una cualquiera de ellas, y todas se obtienen sumándole una constante.

Si  $G(x)$  denota una antiderivada cualquiera de  $g(x)$ , integrando el lado derecho de (6.1) obtenemos

$$F(y) + C_1 = G(x) + C_2.$$

Llamando  $C$  a  $C_2 - C_1$  obtenemos

$$F(y) = G(x) + C,$$

y si pudiéramos despejar  $y$  de  $F(y)$  obtendríamos una fórmula para  $y(x)$ . En otros casos, la solución  $y$  queda implícita.

Veamos cómo resolver los ejemplos mencionados arriba:

- $\frac{dy}{dx} = 5$ . Integrando obtenemos que

$$\begin{aligned} \int \frac{dy}{dx} dx &= \int 5 dx \\ \int dy &= \int 5 dx \\ y + C_1 &= 5x + C_2. \end{aligned}$$

Luego  $y(x) = 5x + C$  es la *solución general*.

- $\frac{dy}{dx} = -3y$ . Esta ecuación es equivalente a  $\frac{1}{y} \frac{dy}{dx} = -3$ . Integrando obtenemos que

$$\int \frac{1}{y} \frac{dy}{dx} dx = \int -3 dx$$

$$\int \frac{1}{y} dy = \int -3 dx$$

$$\ln |y| + C_1 = -3x + C_2,$$

por lo que  $\ln |y| = -3x + C$  ó  $|y| = e^C e^{-3x}$ . La solución general es entonces

$$y(x) = \tilde{C} e^{-3x}.$$

Notar que en la última expresión hemos denotado con  $\tilde{C}$  a  $\pm e^C$ ;  $e^C$  es siempre positivo, pero  $y$  puede ser positiva, negativa o cero, aunque no cambia de signo. Es decir, la solución de esta ecuación puede ser:

- positiva para todo  $x$ :  $\tilde{C} > 0$ ;
- negativa para todo  $x$ :  $\tilde{C} < 0$ ;
- constantemente cero (para todo  $x$ ):  $\tilde{C} = 0$ .

- $\frac{dy}{dx} = xy$ . Notemos que esta ecuación es equivalente a  $\frac{1}{y} \frac{dy}{dx} = x$ , y luego

$$\int \frac{1}{y} \frac{dy}{dx} dx = \int x dx$$

$$\ln |y| + C_1 = \frac{x^2}{2} + C_2,$$

por lo que  $\ln |y| = \frac{x^2}{2} + C$  ó  $|y| = e^C e^{\frac{x^2}{2}}$ . La solución general es entonces

$$y(x) = \tilde{C} e^{\frac{x^2}{2}}.$$

Notar que nuevamente hemos denotado con  $\tilde{C}$  a  $\pm e^C$ .

- $\frac{dy}{dx} - y^2 = 0$ . Integrando la ecuación equivalente  $\frac{1}{y^2} \frac{dy}{dx} = 1$ , obtenemos

$$\int \frac{1}{y^2} \frac{dy}{dx} dx = \int 1 dx$$

$$\int \frac{1}{y^2} dy = \int 1 dx$$

$$-\frac{1}{y} + C_1 = x + C_2,$$

y luego la solución general es  $y = -\frac{1}{x + C}$ , que tiene dos *ramas*. Solo una de esas ramas será la solución que cumpla la *condición inicial*, pues la otra rama

está *desconectada*. Por ejemplo, si queremos encontrar la solución que cumple  $y(0) = 4$ , entonces la constante debe ser  $C = -\frac{1}{4}$  y por lo tanto la solución es

$$y(x) = -\frac{1}{x - \frac{1}{4}} = \frac{4}{1 - 4x},$$

que solo está definida para  $x \neq \frac{1}{4}$ . Pero la rama de la solución que cumple la condición inicial está definida en  $\left(-\infty, \frac{1}{4}\right)$ .

- $\frac{dy}{dx} y = -x$ . Integrando a ambos lados obtenemos

$$\begin{aligned} \int \frac{dy}{dx} y dx &= \int -x dx \\ \int y dy &= \int -x dx \\ \frac{y^2}{2} + C_1 &= -\frac{x^2}{2} + C_2, \end{aligned}$$

es decir que  $y^2 + x^2 = C$  y la solución está *implícita*. En este caso podemos despejar y obtener que

$$y(x) = \pm\sqrt{C - x^2}$$

que solo existe en el intervalo  $-\sqrt{C} \leq x \leq \sqrt{C}$  y para  $C > 0$ .

### 6.1.2. EDOs lineales de primer orden

**Definición 6.1.** Una EDO de primer orden se dice *lineal* si puede escribirse de la siguiente manera:

$$a(x)y'(x) + b(x)y(x) = c(x), \quad (6.2)$$

donde  $y$  es la función incógnita de la variable independiente  $x$  y  $a(x)$ ,  $b(x)$ ,  $c(x)$  son funciones dadas.

Suponiendo  $a(x) \neq 0$  en el intervalo de interés, podemos dividir por  $a(x)$  y obtenemos la EDO lineal en *forma estándar*

$$y'(x) + p(x)y(x) = q(x). \quad (6.3)$$

Una manera de resolver este tipo de ecuaciones es recurriendo a lo que se conoce como *factor integrante*. La idea consiste en multiplicar ambos lados de (6.3) por una misma función  $m(x)$  obteniendo

$$m(x)y'(x) + m(x)p(x)y(x) = m(x)q(x).$$

Pero  $m(x)$  debe elegirse de manera que el lado izquierdo  $m(x)y'(x) + m(x)p(x)y(x)$  sea la derivada de un solo término, que será el producto de  $y(x)$  por otra función. Ahora bien,

$$(m(x)y(x))' = m(x)y'(x) + m'(x)y(x)$$

y observamos que lograremos el objetivo deseado si se cumple que

$$m'(x) = m(x)p(x), \quad \text{o bien} \quad \frac{1}{m(x)}m'(x) = p(x).$$

Recordemos que  $p(x)$  es una función conocida, y que estamos tratando de hallar  $m(x)$ . Resulta entonces que esta es una ecuación de primer orden *separable* para la incógnita  $m(x)$ . Integrando a ambos lados obtenemos que

$$m(x) = C \exp(P(x)),$$

con  $P(x)$  una primitiva de  $p(x)$ . Como solo nos interesa hallar *una* función  $m(x)$  con las propiedades dadas, tomamos  $C = 1$ , y multiplicamos (6.3) por el factor integrante  $m(x) = \exp(P(x))$ , obteniendo

$$\begin{aligned} m(x)y'(x) + m(x)p(x)y(x) &= m(x)q(x) \\ \underbrace{\exp(P(x))}_{m(x)}y'(x) + \underbrace{\exp(P(x))p(x)}_{m'(x)}y(x) &= \exp(P(x))q(x) \\ (m(x)y(x))' &= m(x)q(x). \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} m(x)y(x) &= \int m(x)q(x) dx + C \\ y(x) &= \frac{1}{m(x)} \left( \int m(x)q(x) dx + C \right). \end{aligned}$$

Lo importante no es recordar la fórmula final, sino el procedimiento:

Para resolver

$$y'(x) + p(x)y(x) = q(x)$$

hay que elegir el *factor integrante*  $m(x)$  de manera que al multiplicar la ecuación por  $m(x)$  resulte que el término de la izquierda sea igual a  $[m(x)y(x)]'$ . Para ello, debe ser

$$m'(x) = m(x)p(x).$$

Veamos unos ejemplos

**Ejemplo 6.2.** Hallar la solución general de  $(1+x^2)y' + 2xy = 3x^2$ . Si prestamos suficiente atención, observamos que  $2x$  (que multiplica a  $y$ ) es justamente la derivada con respecto a  $x$  de  $(1+x^2)$  (que multiplica a  $y'$ ). Por lo tanto, el miembro izquierdo de la ecuación es justamente  $\frac{d}{dx}[(1+x^2)y]$ , y la ecuación resulta entonces

$$[(1+x^2)y]' = 3x^2.$$

Integrando, obtenemos que  $(1+x^2)y = x^3 + C$ , y la solución general resulta

$$y(x) = \frac{x^3 + C}{1 + x^2}.$$

**Ejemplo 6.3.** Consideremos dos recipientes  $A$  y  $B$  que contienen un líquido viscoso y se vacían a una tasa proporcional al volumen  $V$ , digamos  $V'(t) = -kV(t)$ , con  $k > 0$  una constante dada. Supongamos que el volumen inicial de líquido del recipiente  $A$  es  $V_A^0$ , mientras que el recipiente  $B$  está inicialmente vacío. Si el recipiente  $A$  comienza a vaciarse hacia el recipiente  $B$  a tiempo  $t = 0$ , hallar el volumen  $V_B(t)$  de líquido en el recipiente  $B$  a tiempo  $t$ .

Por un lado, el volumen de líquido del recipiente  $A$  obedece la ecuación  $V_A'(t) = -kV_A(t)$  y por lo tanto  $V_A(t) = Ce^{-kt}$ , y como el volumen inicial es  $V_A(0) = V_A^0$  tenemos que

$$V_A(t) = V_A^0 e^{-kt}.$$

Por otro lado, el volumen de líquido  $V_B(t)$  del recipiente  $B$  decrece a tasa  $-kV_B(t)$ , pero a la vez aumenta a tasa  $kV_A(t)$ , es decir

$$V_B'(t) = -kV_B(t) + kV_A(t).$$

Reemplazando lo que se sabe para  $V_A(t)$  obtenemos la siguiente ecuación para  $V_B(t)$ :

$$V_B'(t) + kV_B(t) = kV_A^0 e^{-kt}.$$

Multipliquemos por el factor integrante  $m(t)$  para ver qué debe satisfacer.

$$m(t)V_B'(t) + m(t)kV_B(t) = m(t)kV_A^0 e^{-kt}.$$

Queremos que el miembro izquierdo de la ecuación sea  $[m(t)V_B(t)]'$  y para ello debe ser  $m'(t) = km(t)$ . Una solución no trivial de esta ecuación es  $m(t) = e^{kt}$ . Así que la ecuación original ahora se transforma en

$$[e^{kt}V_B(t)]' = e^{kt}kV_A^0 e^{-kt},$$

que se simplifica en

$$[e^{kt}V_B(t)]' = kV_A^0,$$

es decir  $e^{kt}V_B(t) = kV_A^0 t + C$ , y entonces

$$V_B(t) = kV_A^0 t e^{-kt} + C e^{-kt}.$$

Usando que  $V_B(0) = 0$  obtenemos que  $C = 0$  y finalmente, el volumen del líquido en el recipiente  $B$  a tiempo  $t$  es

$$V_B(t) = kV_A^0 t e^{-kt}.$$

**Ejemplo 6.4.** Consideremos la situación en que se posee un tanque  $A$  con 500 litros de salmuera, con una concentración de 5 gramos de sal por litro. Este tanque  $A$  drena 20 litros de salmuera por minuto hacia el tanque  $B$ . A su vez, el tanque  $B$ , que inicialmente contiene 100 litros de agua pura, drena 15 litros por minuto, se encuentra siempre bien mezclado y no rebalsa. ¿Cuánta sal hay, y cuál es la concentración en el tanque  $B$  después de 10 minutos?

Una manera conveniente de modelar este tipo de situaciones es definir la variable  $S(t)$  como la cantidad de sal en el tanque  $B$  a tiempo  $t$  (en gramos).

La cantidad de sal que *ingresa* al tanque  $B$  por minuto es la misma cantidad de sal que drena desde el tanque  $A$ :

$$20 \frac{\ell}{\text{min}} \times 5 \frac{\text{g}}{\ell} = 100 \frac{\text{g}}{\text{min}}.$$

Por otro lado, la cantidad de sal que *sale* del tanque  $B$  por minuto es igual a la cantidad de salmuera que sale por minuto, por la concentración, es decir

$$15 \frac{\ell}{\text{min}} \times \frac{S(t) \text{ g}}{V(t) \ell} = 15 \frac{S(t)}{V(t)} \frac{\text{g}}{\text{min}},$$

donde  $V(t)$  denota el volumen de salmuera en el tanque  $B$ , que fácilmente vemos es  $V(t) = 100 \ell + (20 - 15) \frac{\ell}{\text{min}} t \text{ min} = 100 + 5t \ell$ .

Luego, el problema a valores iniciales (ecuación diferencial más condición inicial) para  $S(t)$  resulta:

$$\underbrace{S'(t) = 100 - \frac{15}{100 + 5t} S(t)}_{\text{ecuación diferencial}}, \quad \underbrace{S(0) = 0}_{\text{condición inicial}}.$$

La ecuación diferencial es lineal de primer orden, que en forma estándar (y simplificando) se lee

$$S'(t) + \frac{3}{20 + t} S(t) = 100.$$

El factor integrante debe cumplir  $m'(t) = \frac{3}{20 + t} m(t)$ , de manera que

$$\ln |m(t)| = \int \frac{3}{20 + t} dt = 3 \ln(20 + t) = \ln(20 + t)^3,$$

y entonces  $m(t) = (20+t)^3$ . Multiplicando la ecuación diferencial por este factor integrante obtenemos

$$(20 + t)^3 S'(t) + 3(20 + t)^2 S(t) = 100(20 + t)^3$$

que es lo mismo que  $[(20 + t)^3 S(t)]' = 100(20 + t)^3$ . Luego

$$(20 + t)^3 S(t) = 25(20 + t)^4 + C,$$

y la solución general de la ecuación diferencial es  $S(t) = 25(20 + t) + \frac{C}{(20 + t)^3}$ . Ahora

imponemos la condición inicial  $S(0) = 0$  que implica  $500 + \frac{C}{20^3} = 0$  ó  $C = -4 \times 10^6$ , obteniendo como solución del PVI a

$$S(t) = 25(20 + t) - \frac{4 \times 10^6}{(20 + t)^3}.$$

Para saber la cantidad de sal en el recipiente  $B$  después de 10 minutos, recordamos que estamos midiendo el tiempo en minutos y la cantidad de sal en gramos, por lo que la respuesta es

$$S(10) = 25(20 + 10) - \frac{4 \times 10^6}{(20 + 10)^3} = 750 - \frac{4000}{27} \approx 601,85\text{g}.$$

La concentración después de 10 minutos es  $\frac{S(10)}{V(10)} \approx \frac{601,85 \text{ g}}{150 \ell} = 4,0123 \frac{\text{g}}{\ell}$ .

## 6.2. EDOs lineales de 2do orden con coeficientes constantes

Para resolver las EDP de los próximos capítulos, necesitaremos manejar con fluidez la ecuación homogénea de segundo orden con coeficientes constantes:

$$a y''(x) + b y'(x) + c y(x) = 0, \quad (6.4)$$

donde los coeficientes  $a$ ,  $b$ ,  $c$  son constantes reales.

Antes de continuar, recordamos que

**Teorema 6.5.** Si  $y_1(x)$  e  $y_2(x)$  son soluciones linealmente independientes<sup>1</sup> de una EDO lineal homogénea de segundo orden, entonces todas las soluciones de dicha ecuación pueden escribirse como

$$y(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$$

eligiendo apropiadamente las constantes  $C_1$  y  $C_2$ . La fórmula anterior, que engloba a todas las soluciones, se llama solución general de la ecuación.

Además, dado  $x_0 \in \mathbb{R}$  y dos números  $Y_0, Y_1$ , existe una única solución que satisface

$$y(x_0) = Y_0, \quad y'(x_0) = Y_1.$$

Observemos ahora que:

- Si  $a = b = c = 0$  no hay ecuación :-)
- Si  $a = b = 0$  y  $c \neq 0$  la ecuación es *algebraica* con solución  $y \equiv 0$ .
- Si  $a = 0$  y  $b \neq 0$ , la ecuación es de primer orden con solución general  $y(x) = C e^{-\frac{c}{b}x}$ .
- Si  $a \neq 0$  la ecuación es realmente de segundo orden, y procedemos a resolverla a continuación.

De ahora en adelante suponemos  $a \neq 0$ . El método usual para resolver (6.4) consiste en buscar soluciones de la forma  $y(x) = e^{rx}$  con  $r$  constante. Para ello reemplazamos esta fórmula en la ecuación y vemos qué tiene que satisfacer  $r$ . Observemos que  $\frac{d^n}{dx^n} e^{rx} = r^n e^{rx}$ , y por lo tanto  $y(x) = e^{rx}$  será solución de (6.4) si

$$a r^2 e^{rx} + b r e^{rx} + c e^{rx} = (a r^2 + b r + c) e^{rx} = 0 \quad \text{para todo } x.$$

Luego  $r$  debe ser solución de la ecuación cuadrática  $a r^2 + b r + c = 0$ . Esta ecuación (algebraica para la variable  $r$ ) se conoce como ecuación auxiliar para (6.4). Las soluciones son

$$r_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Si definimos  $d = b^2 - 4ac$ , podemos distinguir tres casos.

---

<sup>1</sup>Dos funciones son linealmente independientes cuando no es cierto que una es un múltiplo (constante) de la otra.



**Caso 1:**  $d > 0$ . En este caso hay dos raíces reales distintas:

$$r_1 = \frac{-b + \sqrt{d}}{2a}, \quad r_2 = \frac{-b - \sqrt{d}}{2a}.$$

Hemos encontrado entonces dos soluciones linealmente independientes

$$y_1(x) = e^{r_1 x}, \quad y_2(x) = e^{r_2 x},$$

y la solución general de (6.4) es

$$d = b^2 - 4ac > 0 \implies y(x) = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x}, \text{ con } r_1 = \frac{-b + \sqrt{d}}{2a}, r_2 = \frac{-b - \sqrt{d}}{2a}.$$

**Caso 2:**  $d = 0$ . En este caso, la ecuación cuadrática tiene una sola raíz  $r = \frac{-b}{2a}$  de multiplicidad doble, que nos provee solo una solución  $y_1(x) = e^{rx}$ . Podemos verificar que otra solución linealmente independiente a esta primera es  $y_2(x) = x e^{rx}$ . Luego, la solución general de (6.4) es

$$d = b^2 - 4ac = 0 \implies y(x) = C_1 e^{rx} + C_2 x e^{rx}, \text{ con } r = -\frac{b}{2a}.$$

**Caso 3:**  $d < 0$ . En este caso, las raíces son complejas:

$$r_1 = \frac{-b + i\sqrt{|d|}}{2a}, \quad r_2 = \frac{-b - i\sqrt{|d|}}{2a},$$

donde  $i$  es la unidad imaginaria, que satisface  $i^2 = -1$ . Si llamamos  $\alpha = \frac{-b}{2a}$  y  $\beta = \frac{\sqrt{|d|}}{2a}$ , entonces

$$r_1 = \alpha + i\beta, \quad r_2 = \alpha - i\beta,$$

y la solución general resulta (a valores complejos)

$$y(x) = C_1 e^{(\alpha+i\beta)x} + C_2 e^{(\alpha-i\beta)x} = e^{\alpha x} [C_1 e^{i\beta x} + C_2 e^{-i\beta x}].$$

Recordando que  $e^{\pm i\beta x} = \cos \beta x \pm i \sin \beta x$ , vemos que

$$\begin{aligned} y(x) &= e^{\alpha x} [C_1 (\cos \beta x + i \sin \beta x) + C_2 (\cos \beta x - i \sin \beta x)] \\ &= e^{\alpha x} [\underbrace{(C_1 + C_2)}_{\tilde{C}_1} \cos \beta x + i \underbrace{(C_1 - C_2)}_{\tilde{C}_2} \sin \beta x]. \end{aligned}$$

Luego, la solución general de (6.4) es

$$d = b^2 - 4ac < 0 \implies y(x) = e^{\alpha x} [C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x], \text{ con } \alpha = -\frac{b}{2a}, \beta = \frac{\sqrt{|d|}}{2a}.$$

**Ejemplo 6.6.** Hallar la solución general de  $y'' + y' = 0$ . Proponemos una solución de la forma  $y(x) = e^{rx}$ , que satisface  $y''(x) = r^2 e^{rx}$ , entonces

$$y'' + y' = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (r^2 + r)e^{rx} = 0,$$

La ecuación auxiliar es entonces  $r^2 + r = 0$  que puede factorizarse como  $r(r + 1) = 0$  y se ve fácilmente que tiene dos soluciones diferentes  $r = 0, -1$ . Por lo tanto la solución general es

$$y(x) = C_1 + C_2 e^{-x}.$$

**Ejemplo 6.7.** Hallar la solución general de  $y'' - 4y = 0$ . La ecuación auxiliar es

$$r^2 - 4 = 0, \quad \text{con raíces } r = \pm 2.$$

La solución general es entonces

$$y(x) = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-2x}.$$

**Ejemplo 6.8.** Hallar la solución general de  $y'' + 4y = 0$ . La ecuación auxiliar es

$$r^2 + 4 = 0, \quad \text{con raíces } r = \pm 2i.$$

La solución general es entonces

$$y(x) = C_1 \cos(2x) + C_2 \sin(2x).$$

### 6.3. Sistemas especiales de EDOs

Ocasionalmente nos encontraremos con un sistema de EDOs lineales de esta forma:

$$\begin{aligned} x'(t) &= a x(t) + b y(t) \\ y'(t) &= c x(t) + d y(t), \end{aligned}$$

con  $a, b, c, d$  constantes dadas y  $x(t), y(t)$  las funciones incógnita. Necesitaremos resolver este sistema con valores iniciales dados  $x(0), y(0)$ .

Si  $b = 0$  entonces podemos resolver primero para  $x(t)$  y obtener  $x(t) = x(0)e^{at}$ , luego reemplazar esta expresión en la segunda ecuación y resolverla utilizando un factor integrante adecuado.

Si  $d = 0$  podemos hacer lo mismo, resolviendo primero para  $y(t)$  y luego para  $x(t)$ .

Si  $b \neq 0$  y  $d \neq 0$  entonces se dice que las ecuaciones están *acopladas*. En ese caso, derivamos la primera ecuación y obtenemos

$$\begin{aligned} x''(t) &= a x'(t) + b y'(t) \\ &= a x'(t) + b [c x(t) + d y(t),] \\ &= a x'(t) + b [c x(t) + d \frac{1}{b}(x'(t) - a x(t))] \\ &= (a + d)x'(t) + (bc - ad)x(t). \end{aligned}$$

Luego  $x(t)$  es solución de la siguiente EDO lineal de 2do orden

$$x''(t) - (a + d)x'(t) - (bc - ad)x(t) = 0$$

que ya sabemos resolver. Una vez hallada  $x(t)$  usamos la identidad  $y(t) = \frac{1}{b}(x'(t) - ax(t))$  para tener una expresión de  $y(t)$ .

**Ejemplo 6.9.** Resolver

$$\begin{aligned}x'(t) &= 3x(t) - 4y(t) & x(0) &= 1 \\y'(t) &= x(t) - y(t) & y(0) &= 1.\end{aligned}$$

Derivamos la primera ecuación y obtenemos

$$x''(t) = 3x'(t) - 4y'(t).$$

Usamos la segunda ecuación para reemplazar  $y'(t)$  obteniendo

$$x''(t) = 3x'(t) - 4x(t) + 4y(t).$$

Ahora despejamos  $y(t)$  de la primera ecuación

$$y(t) = -\frac{1}{4}x'(t) + \frac{3}{4}x(t), \tag{6.5}$$

y lo reemplazamos, obteniendo

$$x''(t) = 3x'(t) - 4x(t) - x'(t) + 3x(t),$$

que resulta

$$x''(t) - 2x'(t) + x(t) = 0.$$

Proponiendo  $x(t) = e^{rt}$  deducimos que  $r^2 - 2r + 1 = 0$ , es decir  $r = 1$  es una raíz doble, por lo que la solución general es

$$x(t) = C_1 e^t + C_2 t e^t.$$

Utilizando la condición inicial para  $x$ ,  $x(0) = 1$  obtenemos que  $C_1 = 1$  y por lo tanto

$$x(t) = e^t + C_2 t e^t.$$

De (6.5)

$$\begin{aligned}y(t) &= -\frac{1}{4}(e^t + C_2 e^t + C_2 t e^t) + \frac{3}{4}(e^t + C_2 t e^t) \\&= \left(-\frac{1}{4} - \frac{1}{4}C_2 + \frac{3}{4} - \frac{1}{4}C_2 t + \frac{3}{4}C_2 t\right)e^t \\&= \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}C_2 + \frac{1}{2}C_2 t\right)e^t.\end{aligned}$$

Forzando la condición inicial  $y(0) = 1$  obtenemos que  $C_2 = -2$ . Finalmente la solución resulta

$$x(t) = (1 - 2t)e^t \quad y(t) = (1 - t)e^t.$$

## 6.4. Generalidades sobre Ecuaciones en Derivadas Parciales

Dada una función  $u = u(x, y, z, \dots)$  de varias variables independientes  $x, y, z, \dots$ , utilizaremos la siguiente notación conveniente:

$$u_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad u_y = \frac{\partial u}{\partial y}, \quad u_z = \frac{\partial u}{\partial z}, \quad \dots,$$

$$u_{xx} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad u_{yx} = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}, \quad u_{xy} = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}, \quad \dots$$

El *orden* de una derivada parcial es entonces la cantidad de subíndices: uno en la primera línea de los ejemplos anteriores y dos en la segunda.

Repasemos algunas definiciones

Se dice que una función  $u$  es  $C^0$  cuando es continua. Dado un entero positivo  $k$ , se dice que una función es  $C^k$  si toda derivada parcial de orden menor o igual a  $k$  existe y es continua.

Por ejemplo, si  $u = u(x, y, z)$  es una función de tres variables, entonces  $u \in C^2$  si  $u, u_x, u_y, u_z, u_{xx}, u_{xy}, u_{xz}, u_{yx}, u_{yy}, u_{yz}, u_{zx}, u_{zy}, u_{zz}$  son continuas. Vemos aquí que  $u \in C^2$  implica  $u \in C^1$  pues  $u \in C^1$  cuando  $u, u_x, u_y, u_z$  son continuas.

Vemos entonces que en general,  $u \in C^k$  implica que  $u \in C^{k-1}$ .

Es también sabido que si  $u \in C^2$  entonces  $u_{xy} = u_{yx}, u_{yz} = u_{zy}$ , etc. Decimos en general que si  $u \in C^k$ , las derivadas parciales de orden menor o igual a  $k$  *conmutan*.

**Definición 6.10.** Dado un entero positivo  $k$ , una ecuación en derivadas parciales (EDP) de orden  $k$  es una ecuación que involucra una función incógnita  $u$ , tal que  $k$  es el mayor orden de derivada parcial que aparece en la ecuación.

**Ejemplo 6.11.** Veamos un par de ejemplos:

- La ecuación del calor

$$u_t = ku_{xx} \quad u = u(x, t)$$

es una ecuación de orden dos.

- La ecuación de transporte

$$au_x + bu_y = f \quad u = u(x, y)$$

es una ecuación de orden uno, o de primer orden.

En general, una EDP está definida sobre un dominio  $D$  que es la región de interés donde las variables están definidas. Por ejemplo, la ecuación del calor unidimensional que modela el flujo de calor en una barra de longitud  $L$  se presenta usualmente así:

$$u_t = ku_{xx} \quad 0 < x < L, \quad t > 0.$$

El *dominio* donde está planteada la ecuación es  $D = \{(x, t) : 0 < x < L, t > 0\}$ . Este dominio es un rectángulo “espacio-temporal” semi-infinito.

**Definición 6.12.** Una función  $u$  es una solución de una EDP de orden  $k$  en el dominio  $D$  si es una función  $C^k$  en la región  $D$  y la EDP se satisface en todos los puntos interiores a  $D$ .

**Ejemplo 6.13.** La función  $u(x, t) = \text{sen}(x)e^{-t}$  es solución de la ecuación de difusión

$$u_t = u_{xx} \quad \text{en} \quad D = \{(x, t) : 0 < x < 1, t > 0\}.$$

En efecto,  $u_t = -\text{sen}(x)e^{-t}$ ,  $u_x = \text{cos}(x)e^{-t}$ ,  $u_{xx} = -\text{sen}(x)e^{-t}$ , luego  $u_t = u_{xx}$  para todo  $x$  y para todo  $t$ , en particular para  $(x, t) \in D$ .

### 6.4.1. EDPs lineales y el principio de superposición

Una EDP es lineal cuando puede escribirse de la siguiente manera:

El lado izquierdo es una combinación lineal de la función incógnita y sus derivadas parciales, con coeficientes que pueden depender de las variables independientes, pero no de la función incógnita. El lado derecho es alguna función  $f$  que no depende de la incógnita. Si  $f \equiv 0$  la EDP lineal se dice *homogénea*.

**Ejemplo 6.14.** Las siguientes son ecuaciones lineales en la incógnita  $u$ :

- $u_t = ku_{xx}$ , pues puede escribirse como  $u_t - ku_{xx} = 0$ .
- $3xu_x + (x + y)u_y = e^{-x}$ .
- $\nabla^2 u + (x^2 + y^2 + z^2)u = e^{-x^2}$

La parte de la ecuación que involucra a la función incógnita  $u$  y sus derivadas se denomina *operador diferencial* aplicado a  $u$ , y en este curso lo denotaremos con la letra  $\mathcal{L}$ . Así, en los ejemplos anteriores

El operador es	La ecuación se escribe como
$\mathcal{L}[u] = u_t - ku_{xx}$	$\mathcal{L}[u] = 0$
$\mathcal{L}[u] = 3xu_x + (x + y)u_y$	$\mathcal{L}[u] = e^{-x}$
$\mathcal{L}[u] = \nabla^2 u + (x^2 + y^2 + z^2)u$	$\mathcal{L}[u] = e^{-x^2}$

**Ejemplo 6.15.** Las siguientes ecuaciones no son lineales en la incógnita  $u$

- $u u_x + u_y = 1$
- $u_{xx} + u_y = u^2$

Cuando la ecuación involucrada es lineal, el operador diferencial  $\mathcal{L}$  es lineal, es decir:

$$\mathcal{L}[c_1u_1 + c_2u_2] = c_1\mathcal{L}[u_1] + c_2\mathcal{L}[u_2]$$

cualesquiera sean las constantes  $c_1, c_2$  y las funciones suaves  $u_1, u_2$ .

**Principio de superposición.** Si  $\mathcal{L}$  es un operador diferencial lineal y  $u_1, u_2$  son soluciones de

$$\mathcal{L}[u_1] = f_1 \quad \mathcal{L}[u_2] = f_2$$

entonces, cualesquiera sean las constantes  $c_1, c_2$ ,

$$u = c_1u_1 + c_2u_2$$

es solución de

$$\mathcal{L}[u] = c_1f_1 + c_2f_2.$$

En particular, tomando  $f_1 = f_2 = 0$  obtenemos que si  $u_1, u_2$  son soluciones del problema homogéneo,

$$\mathcal{L}[u_1] = 0 \quad \mathcal{L}[u_2] = 0$$

entonces  $u = c_1u_1 + c_2u_2$  es solución de  $\mathcal{L}[u] = 0$ .

## 6.5. Ejercicios

**6.1.** La ley de Torricelli dice que (bajo ciertas circunstancias ideales) un recipiente cilíndrico perderá fluido por un agujero en la base, a una tasa proporcional a la raíz cuadrada de la altura de la superficie del fluido. Supongamos que un contenedor cilíndrico está inicialmente lleno a una altura de 25cm. Si le lleva un minuto *perder* tres cuartos del total. ¿Cuánto le llevará perder el total del fluido?

**6.2.** Resolver las siguientes ecuaciones lineales de primer orden, sujetas a las condiciones iniciales indicadas

$$(a) \quad y'(x) + 2y(x) = e^x, \quad y(0) = 1, \quad (b) \quad x'(t) + x(t) \cos(t) = 0, \quad x(\pi) = 100.$$

**6.3.** Hallar la solución general  $y(x)$  de las siguientes EDO homogéneas de segundo orden

$$\begin{array}{ll} (a) \quad y'' = 0 & (d) \quad y'' + 5y' + 4y = 0 \\ (b) \quad y'' + 36y = 0 & (e) \quad y'' + 4y' + \frac{25}{4}y = 0 \\ (c) \quad y'' - 36y = 0 & \end{array}$$

**6.4.** Hallar la solución particular que cumple las condiciones dadas:

$$\begin{array}{l} (a) \quad y'' = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0 \\ (b) \quad y'' + 36y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1 \\ (c) \quad y'' - 36y = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 1 \\ (d) \quad y'' + 5y' + 4y = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0 \end{array}$$

(e)  $y'' + 4y' + \frac{25}{4}y = 0$ ,  $y(0) = 0$ ,  $y'(0) = 1$

**6.5.** Hallar la solución particular que cumple las condiciones (homogéneas) dadas:

(a)  $y'' = 0$ ,  $y(0) = 0$ ,  $y'(0) = 0$

(b)  $y'' + 36y = 0$ ,  $y(0) = 0$ ,  $y'(0) = 0$

(c)  $y'' - 36y = 0$ ,  $y(0) = 0$ ,  $y'(0) = 0$

(d)  $y'' + 5y' + 4y = 0$ ,  $y(0) = 0$ ,  $y'(0) = 0$

(e)  $y'' + 4y' + \frac{25}{4}y = 0$ ,  $y(0) = 0$ ,  $y'(0) = 0$

**6.6.** Hallar *todas* las soluciones que cumplen las condiciones dadas:

(a)  $y'' = 0$ ,  $y(0) = 0$ ,  $y(\pi) = 0$

(b)  $y'' + 36y = 0$ ,  $y(0) = 0$ ,  $y(\pi) = 0$

(c)  $y'' - 36y = 0$ ,  $y(0) = 0$ ,  $y(\pi) = 0$

(d)  $y'' + 5y' + 4y = 0$ ,  $y(0) = 0$ ,  $y(\pi) = 0$

(e)  $y'' + 4y' + \frac{25}{4}y = 0$ ,  $y(0) = 0$ ,  $y(\pi) = 0$

**6.7.** Resolver el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias

$$\begin{aligned}x'(t) &= x(t) - 4y(t) & x(0) &= 1 \\y'(t) &= x(t) + y(t) & y(0) &= 1\end{aligned}$$

**6.8.** Para  $x \in \mathbb{R}$  se definen el seno y coseno hiperbólico de la siguiente manera

$$\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \quad \cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

(a) Graficar ambas funciones y determinar el valor de  $\cosh(0)$ ,  $\sinh(0)$ ,  $\cosh'(0)$  y  $\sinh'(0)$ .

(b) Determinar todos los valores de  $x$  para los que  $\cosh(x) = 0$ , y también aquellos para los que  $\sinh(x) = 0$ .

(c) Verificar que  $\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1$  para todo  $x \in \mathbb{R}$ .

(d) Mostrar que  $\frac{d}{dx} \sinh(x) = \cosh(x)$  y que  $\frac{d}{dx} \cosh(x) = \sinh(x)$ .

(e) Mostrar que dado un par de números  $A$ ,  $B$ , existe un par de números  $\tilde{A}$ ,  $\tilde{B}$  tal que

$$A e^x + B e^{-x} = \tilde{A} \cosh(x) + \tilde{B} \sinh(x), \quad \text{para todo } x \in \mathbb{R}.$$

(f) Mostrar que si  $\lambda > 0$  entonces toda solución de  $y'' - \lambda y = 0$  se puede escribir

$$\tilde{A} \cosh(\sqrt{\lambda} x) + \tilde{B} \sinh(\sqrt{\lambda} x)$$

(g) Mostrar que si  $H \in \mathbb{R}$  está dado (fijo), y  $\lambda > 0$  entonces toda solución de  $y'' - \lambda y = 0$  se puede escribir

$$y(x) = \tilde{A} \cosh(\sqrt{\lambda}(x - H)) + \tilde{B} \sinh(\sqrt{\lambda}(x - H))$$

**6.9.** Dado  $\lambda > 0$  fijo, hallar todas las soluciones de  $y'' - \lambda y = 0$  que cumplan

$$(a) \ y(0) = 0 \qquad (b) \ y'(0) = 0 \qquad (c) \ y(3) = 0 \qquad (d) \ y'(3) = 0$$

Ayuda: usar el ejercicio anterior para hallar la fórmula más sencilla posible.

**6.10.** Mostrar que para los siguientes operadores  $\mathcal{L}$  se cumple que

$$\mathcal{L}[c_1 u_1 + c_2 u_2] = c_1 \mathcal{L}[u_1] + c_2 \mathcal{L}[u_2]$$

para todo par de constantes  $c_1, c_2$  y funciones suaves  $u_1, u_2$ .

$$(a) \ \mathcal{L}[u] = u_t - k u_{xx}, \quad u = u(x, t)$$

$$(b) \ \mathcal{L}[u] = u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}, \quad u = u(x, y, z)$$

$$(c) \ \mathcal{L}[u] = (3 + 2x)u_{xx} + u_{yy}, \quad u = u(x, y)$$

$$(d) \ \mathcal{L}[u] = u_{tt} - \left( e^{-x^2} u_x \right)_x, \quad u = u(x, t)$$

## Bibliografía complementaria

[Bleeker-Csordas] Bleeker, D., Csordas, G., *Basic Partial Differential Equations*, International Press, Cambridge, Massachusetts, 1996.

[Edwards-Penney] Edwards, C.H. Jr., David E. Penney, *Ecuaciones diferenciales elementales*.



# Capítulo 7

## EDPs de primer orden

En este capítulo nos dedicaremos a estudiar EDPs de primer orden. Veremos cómo se resuelven las lineales, y haremos algunas consideraciones sobre la existencia y unicidad de soluciones.

### 7.1. EDPs de primer orden con coeficientes constantes

Tal vez la EDP más simple es la lineal de primer orden con coeficientes constantes:

$$a u_x + b u_y + c u = f(x, y), \quad u = u(x, y), \quad (7.1)$$

donde  $a, b, c$  son constantes dadas tales que  $a^2 + b^2 \neq 0$ <sup>1</sup> y  $f(x, y)$  es una función dada. Como es usual, no se escriben las variables independientes de la función incógnita  $u$ . La expresión  $u = u(x, y)$  a la derecha indica que la función  $u$  depende de dos variables  $x$  e  $y$  y no más.

Como la ecuación es de primer orden, buscamos soluciones  $u = u(x, y)$  que sean  $C^1$ , y para que esto sea posible,  $f(x, y)$  debe ser continua.

**Primer caso:** Consideramos el caso sencillo en que  $b = 0$  (por lo tanto  $a \neq 0$ ) y la ecuación es

$$a u_x(x, y) + c u(x, y) = f(x, y), \quad u = u(x, y).$$

Si bien es una ecuación en derivadas parciales, solo aparece una derivada con respecto a  $x$  y ninguna con respecto a  $y$ . Si interpretamos a  $y$  como un *parámetro* esta ecuación en realidad resulta una familia de ecuaciones diferenciales ordinarias: una para cada  $y$  fijo, que se reescribe así:

$$u_x(x, y) + \frac{c}{a} u(x, y) = \frac{1}{a} f(x, y), \quad u = u(x, y).$$

El factor integrante de esta ecuación es  $m(x) = e^{\frac{c}{a}x}$ , que multiplicándolo a la ecuación da

$$\frac{\partial}{\partial x} (e^{\frac{c}{a}x} u(x, y)) = \frac{1}{a} e^{\frac{c}{a}x} f(x, y).$$

---

<sup>1</sup> $a^2 + b^2 \neq 0$  quiere decir que  $a$  y  $b$  no son ambos iguales a cero.

Integrando (con respecto a  $x$ ) obtenemos

$$e^{\frac{c}{a}x}u(x, y) = \int \frac{1}{a}e^{\frac{c}{a}x}f(x, y) dx + C(y),$$

donde es importante notar que la constante puede ser diferente para cada  $y$ , y por eso escribimos  $C(y)$  en lugar de  $C$ . La solución general entonces resulta

$$u(x, y) = e^{-\frac{c}{a}x} \left[ \int \frac{1}{a}e^{\frac{c}{a}x}f(x, y) dx + C(y) \right].$$

Como buscamos soluciones  $C^1$ , pedimos que la función  $C(y)$  sea  $C^1$ .

El desarrollo realizado hasta aquí debe usarse para comprender el procedimiento, pero no es aconsejable recordar la fórmula de la solución.

El caso  $a = 0$  ( $b \neq 0$ ) es similar. Resolvamos directamente un ejemplo:

**Ejemplo 7.1.** Hallar la solución general de

$$3u_y - 2u = x + y, \quad u = u(x, y). \quad (7.2)$$

Dividimos por 3 y obtenemos la ecuación  $u_y - \frac{2}{3}u = \frac{x+y}{3}$ . Multiplicamos por el factor integrante  $m(y) = e^{-\frac{2}{3}y}$  y obtenemos

$$\frac{\partial}{\partial y} \left( e^{-\frac{2}{3}y}u(x, y) \right) = e^{-\frac{2}{3}y} \frac{x+y}{3}.$$

Integrando con respecto a  $y$  obtenemos

$$e^{-\frac{2}{3}y}u(x, y) = -\frac{x}{2}e^{-\frac{2}{3}y} - \left( \frac{y}{2} + \frac{3}{4} \right) e^{-\frac{2}{3}y} + C(x),$$

y multiplicando por  $e^{\frac{2}{3}y}$  obtenemos la solución general

$$u(x, y) = -\frac{x}{2} - \left( \frac{y}{2} + \frac{3}{4} \right) + C(x) e^{\frac{2}{3}y} = -\frac{x+y}{2} - \frac{3}{4} + C(x) e^{\frac{2}{3}y}.$$

Esto quiere decir que reemplazando  $C(x)$  por cualquier función  $C^1$  de la variable  $x$  obtenemos una solución de (7.2). Así, todas las siguientes son soluciones:

$u(x, y)$	$C(x)$
$-\frac{x+y}{2} - \frac{3}{4} + \frac{x^2}{8} e^{\frac{2}{3}y}$	$\frac{x^2}{8}$
$-\frac{x+y}{2} - \frac{3}{4} + \cos(\pi x) e^{\frac{2}{3}y}$	$\cos(\pi x)$
$-\frac{x+y}{2} - \frac{3}{4} - 2e^{\frac{2}{3}(x+y)}$	$-2e^{\frac{2}{3}x}$
$-\frac{x+y}{2} - \frac{3}{4} + e^{\frac{2}{3}y}$	1

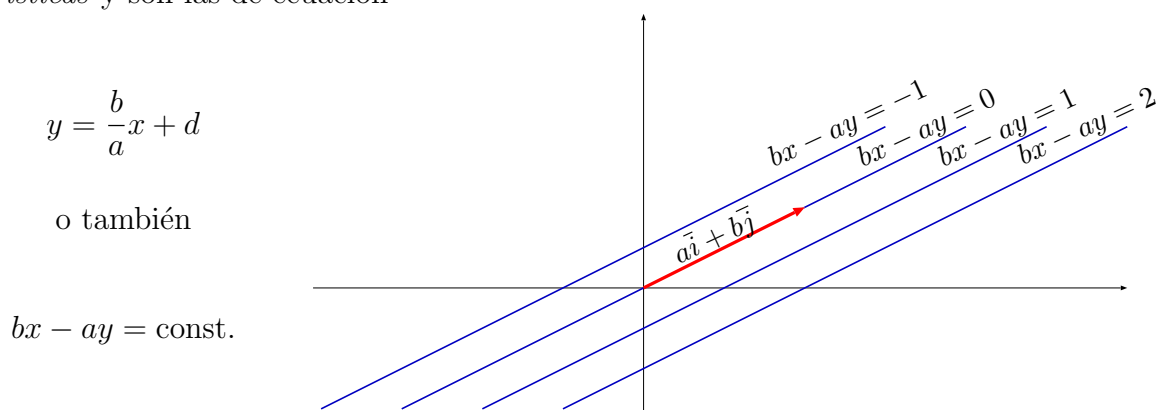
Está claro que estas no son todas las soluciones, pues hay **infinitas**...

Pasemos ahora al caso más general en que  $a \neq 0 \neq b$  (esto quiere decir que  $a \neq 0$  y que  $b \neq 0$ , es decir, ninguna de las dos constantes es nula). La clave para resolver este problema es ver que la parte de la ecuación (7.1) que involucra a las derivadas es:

$$a u_x + b u_y = \nabla u \cdot (a\vec{i} + b\vec{j})$$

es decir, el producto escalar entre el gradiente de  $u$  y el vector  $(a, b)$ . Por lo tanto,  $a u_x + b u_y$  es una derivada *direccional* en la dirección  $a\vec{i} + b\vec{j}$ , y la ecuación es entonces una EDO a lo largo de estas direcciones.

La idea es ahora introducir un cambio de variables de manera que una variable sea constante a lo largo de las rectas paralelas al vector  $a\vec{i} + b\vec{j}$ . Estas rectas se llaman *rectas características* y son las de ecuación



Usaremos  $w, z$  para las nuevas variables. Elegimos  $w$  de manera que las características sean las rectas  $w = \text{constante}$ . Elegimos la otra variable  $z$  de alguna manera sencilla, pero que no sea un múltiplo de  $w$ . Por ejemplo

$$\begin{cases} w = bx - ay \\ z = y \end{cases} \iff \begin{cases} x = \frac{w + az}{b} \\ y = z \end{cases}$$

Definimos entonces una nueva función  $v = v(w, z)$  que coincida con  $u = u(x, y)$  en cada punto. Es decir

$$v(w, z) = u(x, y) = u\left(\frac{w + az}{b}, z\right) \quad \text{o bien} \quad u(x, y) = v(w, z) = v(bx - ay, y)$$

Veamos qué EDP satisface  $v(w, z)$ :

$$\begin{array}{ll} u_x = v_w w_x + v_z z_x & u_y = v_w w_y + v_z z_y \\ u_x = v_w b + v_z 0 & u_y = v_w (-a) + v_z 1 \\ a u_x = a b v_w & b u_y = -a b v_w + b v_z. \end{array}$$

Luego la parte principal de la ecuación (7.1) resulta:

$$a u_x + b u_y = b v_z$$

y reemplazando en (7.1), vemos que  $v(w, z)$  debe ser solución de

$$bv_z + cv = g(w, z)$$

donde  $g(w, z) = f\left(\frac{w+az}{b}, z\right)$ . Esta ecuación es ahora de las sencillas en que aparece una sola derivada parcial.

Nuevamente, no es bueno recordar esta forma final de la nueva ecuación, sino el *procedimiento*, que consiste en hacer el cambio de variables adecuado. Veamos un ejemplo concreto.

**Ejemplo 7.2.** Hallar la solución general de

$$3u_x - 2u_y + u = x, \quad u = u(x, y). \quad (7.3)$$

Las características son las rectas de pendiente  $-\frac{2}{3}$ , es decir las de ecuación  $y = -\frac{2}{3}x + d$ , o también

$$2x + 3y = \text{constante}.$$

Luego hacemos el cambio de variables

$$\begin{cases} w = 2x + 3y \\ z = y \end{cases} \iff \begin{cases} x = \frac{w - 3z}{2} \\ y = z \end{cases}$$

Identificando  $u(x, y) = v(w, z)$ , veamos qué EDP satisface  $v(w, z)$ :

$$\begin{aligned} u_x &= v_w w_x + v_z z_x & u_y &= v_w w_y + v_z z_y \\ u_x &= v_w 2 + v_z 0 & u_y &= v_w 3 + v_z 1 \\ 3u_x &= 6v_w & 2u_y &= 6v_w + 2v_z. \end{aligned}$$

Por lo tanto  $3u_x - 2u_y = -2v_z$ . Así, la ecuación (7.3) se transforma en  $-2v_z + v = \frac{w - 3z}{2}$ , que es equivalente a

$$v_z - \frac{1}{2}v = -\frac{w - 3z}{4}.$$

El factor integrante es  $m(z) = e^{-\frac{z}{2}}$  que multiplicándolo nos da

$$\frac{\partial}{\partial z} (e^{-\frac{z}{2}}v) = -\frac{w - 3z}{4}e^{-\frac{z}{2}}.$$

Integrando obtenemos

$$e^{-\frac{z}{2}}v = \frac{w}{2}e^{-\frac{z}{2}} - \frac{3}{2}(2 + z)e^{-\frac{z}{2}} + C(w),$$

y finalmente, multiplicando por  $e^{\frac{z}{2}}$ , resulta

$$v = \frac{w}{2} - \frac{3}{2}(2 + z) + C(w)e^{\frac{z}{2}}.$$

Reemplazando  $w, z$  por sus equivalentes en términos de  $x, y$  obtenemos

$$u(x, y) = \frac{2x + 3y}{2} - \frac{3}{2}(2 + y) + C(2x + 3y)e^{\frac{y}{2}}$$

y simplificando llegamos a que la solución general es

$$u(x, y) = x - 3 + C(2x + 3y)e^{\frac{y}{2}}. \quad (7.4)$$

Es importante mencionar aquí que  $C(2x+3y)$  indica cualquier función  $C^1$  de una variable, aplicada a la expresión  $(2x + 3y)$  como un bloque indivisible. Por ejemplo

$C(w)$	$u(x, y)$
$w^3$	$x - 3 + (2x + 3y)^3 e^{\frac{y}{2}}$
$2 + \text{sen}(w)$	$x - 3 + (2 + \text{sen}(2x + 3y)) e^{\frac{y}{2}}$
$\frac{1}{1 + w^2}$	$x - 3 + \frac{e^{\frac{y}{2}}}{1 + (2x + 3y)^2}$
$\log(10 + w^4)$	$x - 3 + \log(10 + (2x + 3y)^4) e^{\frac{y}{2}}$

**Observación 7.3.** Vemos que el problema tiene infinitas soluciones. Si tomamos  $C \equiv 0$  tenemos la solución particular  $u_p(x, y) = x - 3$ , que es una solución de  $3u_x - 2u_y + u = x$ . La otra parte de la solución general,  $u_h(x, y) = C(2x + 3y)e^{\frac{y}{2}}$  es la familia de todas las soluciones del problema homogéneo  $3u_x - 2u_y + u = 0$ .

**Ejemplo 7.4.** ¿Qué habría ocurrido en el ejemplo anterior si en lugar de definir  $z = y$  hubiéramos intentado  $z = x$ ? Veamos. Hacemos el cambio de variables

$$\begin{cases} w = 2x + 3y \\ z = x \end{cases} \iff \begin{cases} x = z \\ y = \frac{w - 2z}{3}. \end{cases}$$

Identificando  $u(x, y) = v(w, z)$ , veamos qué EDP satisface  $v(w, z)$ :

$$\begin{aligned} u_x &= v_w w_x + v_z z_x & u_y &= v_w w_y + v_z z_y \\ u_x &= v_w 2 + v_z 1 & u_y &= v_w 3 + v_z 0 \\ 3u_x &= 6v_w + 3v_z & 2u_y &= 6v_w. \end{aligned}$$

Por lo tanto  $3u_x - 2u_y = 3v_z$ . Así, la ecuación (7.3) se transforma en  $3v_z + v = z$ , que es equivalente a

$$v_z + \frac{1}{3}v = \frac{z}{3}.$$

Multiplicamos por el factor integrante  $m(z) = e^{\frac{z}{3}}$  y obtenemos

$$\frac{\partial}{\partial z} (e^{\frac{z}{3}}v) = \frac{z}{3}e^{\frac{z}{3}}.$$

Integrando con respecto a  $z$  nos queda  $e^{\frac{z}{3}}v = (z - 3)e^{\frac{z}{3}} + G(w)$ , o lo que es lo mismo

$$v(z, w) = z - 3 + G(w)e^{-\frac{z}{3}}.$$

Reemplazando  $w, z$  por sus equivalentes en términos de  $x, y$  obtenemos la solución general

$$u(x, y) = x - 3 + G(2x + 3y)e^{-\frac{x}{3}}.$$

Esta solución es aparentemente diferente de la obtenida anteriormente para el mismo problema (ver (7.4)), pero notemos que reemplazando  $C(w) = e^{-\frac{w}{6}}G(w)$ , en (7.2) obtenemos

$$u(x, y) = x - 3 + e^{-\frac{2x+3y}{6}}G(2x + 3y)e^{\frac{y}{2}} = x - 3 + G(2x + 3y)e^{-\frac{x}{3}},$$

que es la fórmula recién obtenida.

### Conclusiones:

- Uno puede tener soluciones generales *aparentemente* diferentes pero que en realidad son la misma familia de soluciones.
- La elección de la variable  $z$  puede hacerse *convenientemente* a fin de simplificar las cuentas. En el ejemplo anterior usar  $z = x$  en lugar de  $z = y$  ayuda un poco.

#### 7.1.1. Condición lateral

En muchas ocasiones, uno está interesado en encontrar soluciones que cumplen alguna *condición lateral*. Para la ecuación (7.1) una condición apropiada puede ser que  $u(x, y)$  tome ciertos valores específicos en los puntos que están sobre una línea recta o curva. Ejemplos de tales condiciones son:

$u(x, 0) = g(x), \quad x \in \mathbb{R}$	se indica el valor de $u$ sobre el eje $x$ .
$u(0, y) = g(y), \quad x \in \mathbb{R}$	se indica el valor de $u$ sobre el eje $y$ .
$u(x, 3) = g(x), \quad x \in \mathbb{R}$	se indica el valor de $u$ sobre la recta $y = 3$ .
$u(x, x) = g(x), \quad x \in \mathbb{R}$	se indica el valor de $u$ sobre la recta $y = x$ .
$u(e^s, s) = g(s), \quad x \in \mathbb{R}$	se indica el valor de $u$ sobre la gráfica de $x = e^y$ .
$u(5x, x + 1) = g(x), \quad x \in \mathbb{R}$	se indica el valor de $u$ sobre la recta $y = \frac{x}{5} + 1$ .

Veamos un ejemplo:

**Ejemplo 7.5.** Hallar la solución de

$$u_x - u_y + 2u = 1, \quad u = u(x, y), \quad u(x, 0) = x^2, \quad x \in \mathbb{R}.$$

El primer paso consiste en hallar la solución general de la ecuación diferencial, ignorando por un momento la condición lateral  $u(x, 0) = x^2$ . Identificamos las características como las rectas de ecuación  $y = -x + d$  o las de ecuación  $x + y = \text{const}$ . Luego hacemos el cambio de variables

$$\begin{cases} w = x + y \\ z = y \end{cases} \iff \begin{cases} x = w - z \\ y = z. \end{cases}$$

Identificando  $u(x, y) = v(w, z)$ , veamos qué EDP satisface  $v(w, z)$ :

$$\begin{array}{l} u_x = v_w w_x + v_z z_x \\ u_x = v_w \cdot 1 + v_z \cdot 0 \\ u_x = v_w \end{array} \quad \text{y} \quad \begin{array}{l} u_y = v_w w_y + v_z z_y \\ u_y = v_w \cdot 1 + v_z \cdot 1 \\ u_y = v_w + v_z. \end{array}$$

Por lo tanto  $u_x - u_y = -v_z$ . Así, la ecuación diferencial se transforma en  $-v_z + 2v = 1$ , que es equivalente a  $v_z - 2v = -1$ . Multiplicamos por el factor integrante  $m(z) = e^{-2z}$  y obtenemos

$$\frac{\partial}{\partial z} (e^{-2z} v) = -e^{-2z}.$$

Integrando con respecto a  $z$  nos queda  $e^{-2z} v = \frac{1}{2} e^{-2z} + C(w)$ , o lo que es lo mismo,  $v = \frac{1}{2} + C(w) e^{2z}$ . Reemplazando  $w$  y  $z$  por sus equivalentes en términos de  $x$  e  $y$  obtenemos la solución general

$$u(x, y) = \frac{1}{2} + C(x + y) e^{2y}.$$

Una vez hallada la solución general imponemos la condición lateral  $u(x, 0) = x^2$  para todo  $x \in \mathbb{R}$ . Esto implica

$$x^2 = u(x, 0) = \frac{1}{2} + C(x), \quad x \in \mathbb{R},$$

es decir  $C(x) = x^2 - \frac{1}{2}$ . Luego, la solución es

$$u(x, y) = \frac{1}{2} + \underbrace{\left( (x + y)^2 - \frac{1}{2} \right)}_{C(x+y)} e^{2y}.$$

Veamos otro ejemplo:

**Ejemplo 7.6.** Hallar la solución de

$$u_x + 2u_y - 4u = e^{x+y}, \quad u = u(x, y), \quad u(x, 4x + 2) = 0, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Nuevamente, el primer paso consiste en hallar la solución general. Las características son las rectas de pendiente 2, es decir las rectas de la forma  $y - 2x = \text{const.}$  Viendo que en el lado derecho de la ecuación aparece  $e^{x+y}$  elegimos las variables auxiliares de la siguiente manera:

$$\begin{cases} w = y - 2x \\ z = x + y \end{cases} \iff \begin{cases} x = \frac{z - w}{3} \\ y = \frac{2z + w}{3} \end{cases}$$

Identificando  $u(x, y) = v(w, z)$ , veamos qué EDP satisface  $v(w, z)$ :

$$\begin{array}{l} u_x = v_w w_x + v_z z_x \\ u_x = v_w (-2) + v_z \cdot 1 \\ u_x = -2v_w + v_z \end{array} \quad \text{y} \quad \begin{array}{l} u_y = v_w w_y + v_z z_y \\ u_y = v_w \cdot 1 + v_z \cdot 1 \\ u_y = v_w + v_z. \end{array}$$

Por lo tanto  $u_x + 2u_y = 3v_z$ . Así, la ecuación diferencial se transforma en  $3v_z - 4v = e^z$ , que es equivalente a  $v_z - \frac{4}{3}v = \frac{e^z}{3}$ . Multiplicamos por el factor integrante  $m(z) = e^{-\frac{4}{3}z}$  y obtenemos

$$\frac{\partial}{\partial z} \left( e^{-\frac{4}{3}z} v \right) = \frac{e^{-\frac{4}{3}z}}{3}.$$

Integrando nos queda  $e^{-\frac{4}{3}z} v = -e^{-\frac{z}{3}} + C(w)$ , o lo que es lo mismo  $v = -e^z + C(w)e^{\frac{4}{3}z}$ . Reemplazando  $w$  y  $z$  por sus equivalentes en términos de  $x$  e  $y$  obtenemos la solución general

$$u(x, y) = -e^{x+y} + C(y - 2x)e^{\frac{4}{3}(x+y)}. \quad (7.5)$$

Una vez hallada la solución general imponemos la condición lateral  $u(x, 4x + 2) = 0$  para todo  $x \in \mathbb{R}$ . Esto implica

$$0 = u(x, 4x + 2) = -e^{x+4x+2} + C(4x + 2 - 2x)e^{\frac{4}{3}(x+4x+2)}, \quad x \in \mathbb{R},$$

es decir  $C(2x + 2) = e^{(5x+2) - \frac{4}{3}(5x+2)} = e^{-\frac{5x+2}{3}}$ ,  $x \in \mathbb{R}$ . Tenemos entonces que definir la función  $C(r)$  (usamos una variable genérica  $r$ ) de manera que

$$C(2x + 2) = e^{-\frac{5x+2}{3}}. \quad (7.6)$$

¿Cómo hacemos esto? Definimos  $r = 2x + 2$  (lo que está como argumento de  $C$ ), y despejamos  $x$ , es decir  $x = \frac{r-2}{2}$ . Luego reemplazamos esta expresión en todos los lugares en que aparece  $x$  en la igualdad (7.6), es decir:

$$C(2x + 2) = C\left(2\frac{r-2}{2} + 2\right) = C(r) = e^{-\frac{5x+2}{3}} = e^{-\frac{5\frac{r-2}{2}+2}{3}} = e^{-\frac{5}{6}r+1}.$$

Es decir,  $C(r) = e^{-\frac{5}{6}r+1}$ . La solución buscada se obtiene entonces utilizando esta definición de  $C(r)$  en (7.5). Es decir

$$\begin{aligned} u(x, y) &= -e^{x+y} + C(y - 2x)e^{\frac{4}{3}(x+y)} = -e^{x+y} + e^{-\frac{5}{6}(y-2x)+1} e^{\frac{4}{3}(x+y)} \\ &= -e^{x+y} + e^{\frac{y}{2}+3x+1}. \end{aligned}$$

Hasta ahora no nos hemos encontrado con grandes dificultades, veamos un par de ejemplos más.

**Ejemplo 7.7.** Hallar la solución de

$$u_x + 2u_y - 4u = e^{x+y}, \quad u = u(x, y) \quad u(x, 2x - 1) = 0, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Vemos que la ecuación diferencial es la misma, así que la solución general es

$$u(x, y) = -e^{x+y} + C(y - 2x)e^{\frac{4}{3}(x+y)}.$$

Cuando intentamos imponer la condición lateral  $u(x, 2x - 1) = 0$ , obtenemos

$$\begin{aligned} 0 &= u(x, 2x - 1) = -e^{x+2x-1} + C(2x - 1 - 2x)e^{\frac{4}{3}(x+2x-1)} \\ &= -e^{3x-1} + C(-1)e^{\frac{4}{3}(3x-1)}, \quad x \in \mathbb{R}, \end{aligned}$$



es decir

$$C(-1) = e^{-\frac{3x-1}{3}}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Aquí vemos que estamos pidiendo a la función  $C(r)$  que en  $r = -1$  tome diferentes valores dependiendo de  $x$ . Esto es **imposible**, por lo que el problema planteado no tiene solución. La dificultad radica en que la condición lateral está dada sobre una característica, la recta  $y = 2x - 1$  que tiene pendiente 2.

Nos preguntamos por qué tenemos dificultades cuando la condición lateral está dada sobre una característica. La explicación es la siguiente. La EDP resulta una EDO a lo largo de las características, y por eso el valor de la solución a lo largo de ellas está determinado por el valor en un solo punto. Como la condición lateral no cumple la EDO sobre la característica, el problema no tiene solución.

Veamos un último ejemplo:

**Ejemplo 7.8.** Hallar la solución de

$$u_x + 2u_y - 4u = e^{x+y}, \quad u = u(x, y) \quad u(x, 2x) = -e^{3x} + e^{4x}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Vemos que la ecuación diferencial es la misma, y como ya no somos tan inocentes también detectamos que la condición lateral está dada sobre una característica, la recta  $y = 2x$ . Recordamos que la solución general es

$$u(x, y) = -e^{x+y} + C(y - 2x)e^{\frac{4}{3}(x+y)},$$

e intentamos imponer la condición lateral  $u(x, 2x) = -e^{3x} + e^{4x}$ :

$$\begin{aligned} -e^{3x} + e^{4x} &= u(x, 2x) = -e^{x+2x} + C(2x - 2x)e^{\frac{4}{3}(x+2x)} \\ &= -e^{3x} + C(0)e^{4x}, \end{aligned} \quad x \in \mathbb{R},$$

es decir

$$C(0) = 1, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Aquí vemos que estamos pidiendo a la función  $C(r)$  que en  $r = 0$  tome el valor 1. Esto **sí es posible**, por lo que el problema planteado tiene solución. Lo extraño aquí es que existen infinitas funciones  $C(r)$  que valen 1 en  $r = 0$ . Por este motivo, este problema tiene **infinitas soluciones**. He aquí algunos ejemplos:

$C(r)$	$u(x, y)$
$(r + 1)^3$	$-e^{x+y} + (y - 2x + 1)^3 e^{\frac{4}{3}(x+y)}$
$\cos(r)$	$-e^{x+y} + \cos(y - 2x) e^{\frac{4}{3}(x+y)}$
$e^{-\frac{4}{3}r}$	$-e^{x+y} + e^{-\frac{4}{3}(y-2x)} e^{\frac{4}{3}(x+y)} = -e^{x+y} + e^{4x}$
$\ln(e + r^4)$	$-e^{x+y} + \ln(e + (y - 2x)^4) e^{\frac{4}{3}(x+y)}$

Lo que ocurre en el ejemplo 7.8 es que la condición lateral está dada sobre una característica, pero la misma es compatible con la EDO que se cumple sobre esa recta. Por lo tanto el problema tiene solución. Ahora uno se pregunta por qué tiene infinitas. La existencia de infinitas soluciones se debe a que la condición lateral no impone ninguna exigencia sobre ningún punto de las demás características.

En base a los ejemplos analizados precedentemente concluimos algo que se puede demostrar rigurosamente en general, pero cuya demostración queda fuera del alcance de este curso:

Al resolver EDP lineales de primer orden con coeficientes constantes como (7.1):

- Si la condición lateral está dada sobre una recta no-característica, el problema tiene una única solución.
- Si la condición lateral está dada sobre una característica, ocurre una de las siguientes posibilidades:
  - El problema no tiene solución.
  - El problema tiene infinitas soluciones.

Como mencionamos al principio de esta Sección una condición lateral podría estar dada sobre una curva, y no necesariamente sobre una línea recta.

**Definición 7.9.** Si para la solución  $u = u(x, y)$  de (7.1) se requiere que tome valores específicos sobre una curva, tal curva se llama *curva lateral*.

Se dice que una curva es *regular* si tiene vector tangente unitario que varía de manera *continua* con respecto a la longitud de arco. Visualmente es una curva que no tiene *esquinas*. Una forma de saber si una curva es regular consiste en hallar una parametrización  $t \rightarrow x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j}$  con  $x'(t)$ ,  $y'(t)$  continuas y tales que  $(x'(t))^2 + (y'(t))^2 > 0$  para todo  $t$ .

**Definición 7.10.** Se dice que una curva regular interseca a una línea recta *transversalmente* si en cada punto intersección la recta no es tangente a la curva.

**Teorema 7.11.** Consideremos la EDP  $au_x + bu_y + cu = f(x, y)$ ,  $u = u(x, y)$ , y suponemos que la condición lateral se impone sobre una curva lateral regular que corta cada recta característica exactamente una vez y lo hace transversalmente. Entonces, si los valores impuestos sobre la curva varían de manera suave ( $C^1$ ) el problema tiene solución única.

Este teorema nos dice que para *garantizar* que el problema tenga solución única, la condición lateral debe ser impuesta sobre una curva que satisfaga lo siguiente:

- Que corte a todas las características.
- Que corte a cada característica una sola vez.
- Que en cada punto de la curva la recta tangente no sea característica.

En la Figura 7.1 se muestran curvas laterales *buenas* para la imposición de valores a la solución (izquierda), y también se muestran curvas laterales que no garantizan la existencia de solución única (derecha).

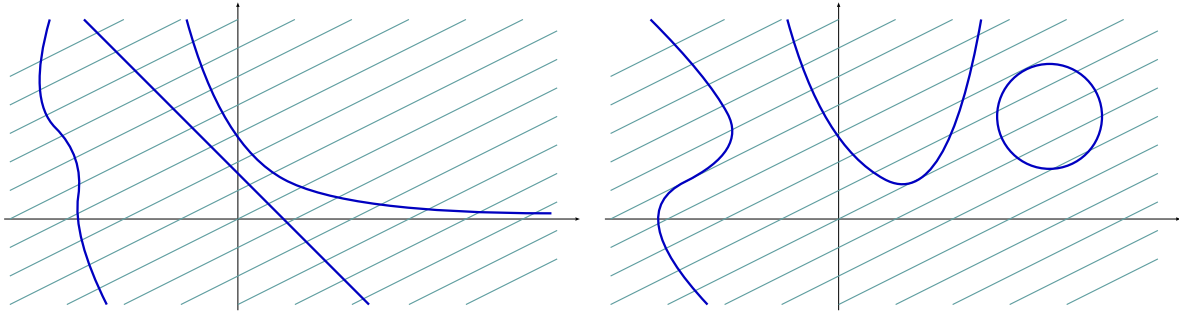


Figura 7.1: Curvas laterales adecuadas e inadecuadas. Las curvas de la izquierda son adecuadas porque cortan todas las rectas características, cortan a cada característica una sola vez y lo hacen de manera transversal. Las curvas de la derecha no cumplen estas tres condiciones a la vez.

### 7.1.2. Un modelo para análisis de poblaciones o inventarios

Bajo ciertas hipótesis naturales, derivamos a continuación una EDP de primer orden que gobierna la manera en que se distribuye una población de individuos con respecto a la edad, a medida que transcurre el tiempo. Los individuos pueden ser tanto organismos biológicos como objetos manufacturados, por ejemplo lámparas, transistores, productos alimenticios o medicamentos. Nos referiremos entonces a alguna colección de objetos similares que se vuelven defectuosos con la edad, o se *vencen*, acorde a un patrón establecido estadísticamente. Utilizaremos el verbo *expirar* para decir que un individuo deja de existir, o de funcionar, o se vence. Y utilizaremos el verbo *existir* para decir que un individuo está vivo, o funciona correctamente, o no está vencido.

Supongamos entonces que la variable  $P(x, t)$  denota una densidad de población a tiempo  $t$  de individuos de edad  $x$ . Es decir,

$$\int_a^b P(x, t) dx = \text{cantidad de individuos de edad entre } a \text{ y } b \text{ que existen a tiempo } t.$$

También ocurre que

$$P(x, t)\Delta x \cong \text{número de individuos de edad entre } x \text{ y } x + \Delta x \text{ que existen a tiempo } t.$$

Esto es cierto porque para  $\Delta x$  pequeño,  $P(x, t)\Delta x \cong \int_x^{x+\Delta x} P(y, t) dy$ .

Supongamos ahora que  $D(x, t)$  es la tasa de expiración. Más precisamente,

$$\int_a^b D(x, t)P(x, t) dx = \begin{array}{l} \text{número de individuos de edad entre } a \text{ y } b \\ \text{que expiran, por unidad de tiempo.} \end{array}$$

Lo que implica que

$$D(x, t)P(x, t)\Delta x\Delta t \cong \begin{array}{l} \text{número de individuos de edad entre } x \text{ y } x + \Delta x \\ \text{que expiran en el intervalo de tiempo } [t, t + \Delta t] \end{array}$$

Si los individuos no expiraran ( $D \equiv 0$ ), tendríamos que  $P(x, t + \Delta t) = P(x - \Delta t, t)$ . Es decir, la densidad de individuos de edad  $x$  a tiempo  $t + \Delta t$  es la misma que la densidad de individuos de edad  $x - \Delta t$  a tiempo  $t$ .

Pero si expiran a tasa  $D(x, t)$  tenemos que

$$P(x, t + \Delta t) \cong P(x - \Delta t, t) - D(x, t)P(x, t)\Delta t.$$

Restando  $P(x, t)$  a ambos miembros y dividiendo por  $\Delta t$  obtenemos

$$\frac{P(x, t + \Delta t) - P(x, t)}{\Delta t} \cong \frac{P(x - \Delta t, t) - P(x, t)}{\Delta t} - D(x, t)P(x, t).$$

Tomando límite cuando  $\Delta t \rightarrow 0$ , y teniendo en cuenta que la aproximación implícita en  $\cong$  tiende a una igualdad cuando  $\Delta t \rightarrow 0$ , obtenemos

$$P_t(x, t) = -P_x(x, t) - D(x, t)P(x, t) \quad \text{ó} \quad P_t(x, t) + P_x(x, t) + D(x, t)P(x, t) = 0.$$

**Observación 7.12.** Si no le convence la deducción de la ecuación usando  $\cong$ , he aquí una deducción alternativa. Si los individuos expiran a tasa  $D(x, t)$  tenemos que

$$P(x, t + \Delta t) = P(x - \Delta t, t) - \int_0^{\Delta t} D(x - \Delta t + s, t + s)P(y - \Delta t + s, t + s) ds,$$

y escribiendo  $r$  en lugar de  $\Delta t$  tenemos

$$P(x, t + r) = P(x - r, t) - \int_0^r D(x - r + s, t + s)P(y - r + s, t + s) ds.$$

Derivando esta última expresión con respecto a  $r$  tenemos

$$\begin{aligned} P_t(x, t + r) &= -P_x(x - r, t) - D(x - r + r, t + r)P(x - r + r, t + r) \\ &\quad + \int_0^r D_x(x - r + s, t + s)P(y - r + s, t + s) ds \\ &\quad + \int_0^r D(x - r + s, t + s)P_x(y - r + s, t + s) ds. \end{aligned}$$

Tomando límite cuando  $r \rightarrow 0$  obtenemos

$$P_t(x, t) = -P_x(x, t) - D(x, t)P(x, t) \quad \text{ó} \quad P_t(x, t) + P_x(x, t) + D(x, t)P(x, t) = 0.$$

(Fin de la deducción alternativa).

Analicemos un poco esta ecuación, que es (casi) una de las que hemos aprendido a resolver en esta sección. Los coeficientes frente a  $P_x$  y a  $P_t$  son constantes (iguales a 1), pero el coeficiente frente a  $P$  es  $D(x, t)$  que es variable. Sin embargo, toda la teoría desarrollada en esta sección se puede utilizar. Veamos: las características son las rectas de pendiente 1, es decir las de ecuación  $x - t = \text{const.}$  Hacemos entonces el cambio de variables

$$\begin{cases} w = x - t \\ z = x \end{cases} \iff \begin{cases} x = z \\ t = z - w. \end{cases}$$

Identificando  $P(x, t) = Q(w, z)$ , veamos qué EDP satisface  $Q(w, z)$ :

$$\begin{array}{ll} P_x = Q_w w_x + Q_z z_x & P_t = Q_w w_t + Q_z z_t \\ P_x = Q_w 1 + Q_z 1 & \text{y} \quad P_t = Q_w (-1) + Q_z 0 \\ P_x = Q_w + Q_z & P_t = -Q_w. \end{array}$$

Por lo tanto  $P_t + P_x = Q_z$ . Así, la ecuación diferencial se transforma en

$$Q_z + D(z, z - w)Q = 0,$$

donde hemos reemplazado  $x$  por  $z$ , y  $t$  por  $z - w$ . El factor integrante es ahora  $m(z) = e^{\int D(z, z-w) dz}$ . Multiplicamos y obtenemos

$$\frac{\partial}{\partial z} \left( e^{\int D(z, z-w) dz} Q \right) = 0.$$

Integrando con respecto a  $z$  nos queda  $e^{\int D(z, z-w) dz} Q = C(w)$ . Eligiendo una primitiva en particular obtenemos

$$Q(w, z) = C(w) \exp \left( - \int_w^z D(\zeta, \zeta - w) d\zeta \right).$$

Reemplazando  $w$  y  $z$  por sus equivalentes en términos de  $x$  e  $y$  obtenemos la solución general

$$P(x, t) = C(x - t) \exp \left( - \int_{x-t}^x D(\zeta, \zeta - x + t) d\zeta \right).$$

Haciendo el cambio de variables  $\tau = \zeta - x + t$  en la integral dentro de la exponencial la fórmula de la solución general resulta

$$P(x, t) = C(x - t) \exp \left( - \int_0^t D(x - t + \tau, \tau) d\tau \right).$$

Tomando  $t = 0$  obtenemos  $P(x, 0) = C(x)$ , por lo que  $C(x)$  indica la densidad inicial de población con respecto a la edad, al menos para  $x \geq 0$ . Es decir

$$P(x, t) = P(x - t, 0) \exp \left( - \int_0^t D(x - t + \tau, \tau) d\tau \right).$$

Como  $P(x, 0)$  no está definido para  $x < 0$ , resulta que  $P(x, t)$  no está definido para  $x < t$  (ver Figura 7.2). Es entonces conveniente definir, para  $x < 0$ ,  $P(x, 0)$  como el número de nacimientos por unidad de tiempo que se producirán a tiempo  $|x|$ , definiendo a la vez  $D(x, t) = 0$  para  $x < 0$ .

Consideremos el caso de producción constante  $C$ , es decir  $P(x, 0) = C$  para todo  $x < 0$  y tasa de expiración independiente del tiempo, o sea  $D(x, t) = D(x)$  (recordando que  $D(x) = 0$  si  $x < 0$ ). Analicemos qué ocurre a medida que pasa mucho tiempo. Más precisamente, calculemos la densidad de población en estado estacionario:

$$P_\infty(x) = \lim_{t \rightarrow +\infty} P(x, t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} P(x - t, 0) \exp \left( - \int_0^t D(x - t + \tau) d\tau \right).$$

Ahora bien, para  $t > x$ ,  $x - t < 0$  y entonces  $P(x - t, 0) = C$  por lo que

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} P(x - t, 0) = C;$$

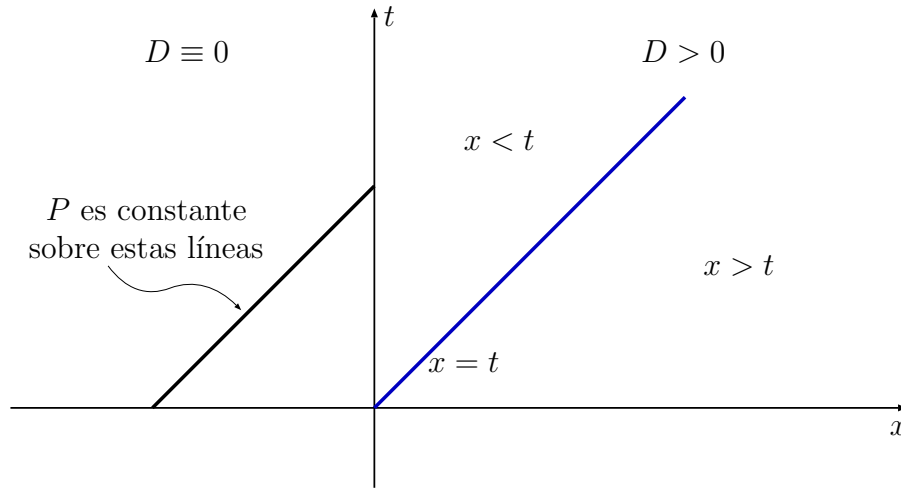


Figura 7.2: Diferentes regiones para el problema del inventario

además

$$\int_0^t D(x-t+\tau) d\tau = \int_{x-t}^x D(s) ds = \underbrace{\int_{x-t}^0 D(s) ds}_{=0} + \int_0^x D(s) ds = \int_0^x D(s) ds.$$

Por lo que finalmente

$$P_\infty(x) = \lim_{t \rightarrow +\infty} P(x, t) = C \exp\left(-\int_0^x D(s) ds\right).$$

Más aún, la densidad estacionaria  $P_\infty(x)$  coincide con la densidad  $P(x, t)$  cuando  $t > x$ . Más precisamente

$$P_\infty(x) = P(x, t), \quad \text{si } x > t.$$

Esto es cierto solo cuando hay *producción constante*.

## 7.2. EDPs de primer orden con coeficientes variables

En muchas aplicaciones aparecen ecuaciones de la forma

$$a(x, y) u_x + b(x, y) u_y + c(x, y) u = f(x, y), \quad u = u(x, y). \quad (7.7)$$

Es decir, los coeficientes  $a, b, c$  pueden depender del punto  $(x, y)$ . Esta EDP sigue siendo lineal, pues el operador  $\mathcal{L}[u] = a(x, y) u_x + b(x, y) u_y + c(x, y) u$  es lineal. La ecuación dejaría de ser lineal si los coeficientes dependieran de  $u$  o alguna de sus derivadas.

Para resolverla, observemos primero que el término  $a(x, y) u_x + b(x, y) u_y$  es la derivada direccional de  $u$  en la dirección del vector  $a(x, y)\vec{i} + b(x, y)\vec{j} =: \vec{g}(x, y)$ . Como  $a$  y  $b$  dependen del punto  $(x, y)$  tenemos que en cada punto estaremos mirando una derivada direccional, pero no siempre en la misma dirección. En la figura 7.3 podemos ver el campo de direcciones  $a\vec{i} + b\vec{j}$  en un caso en que  $a$  y  $b$  son constantes y en otro donde son variables.

Vemos entonces que las características no serán siempre rectas, y establecemos la siguiente definición.

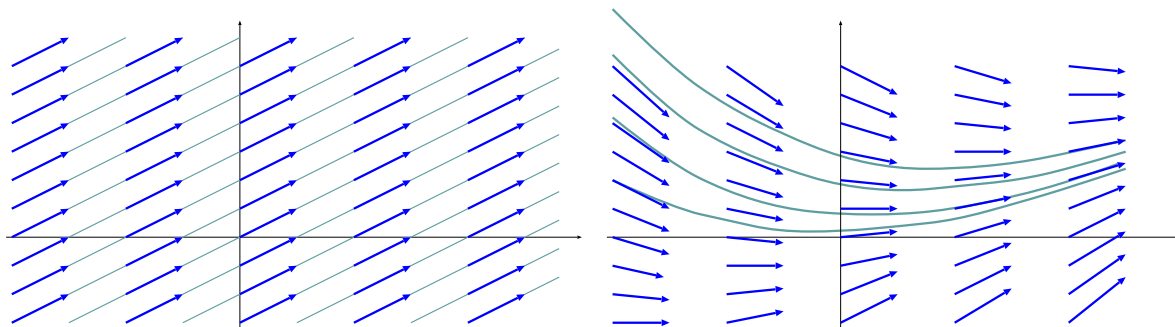


Figura 7.3: Campos de direcciones constante (izquierda) y variable (derecha) y algunas curvas características

**Definición 7.13.** Una curva en el plano  $xy$  se llama *curva característica* para la EDP (7.7) si en cada punto  $(x_0, y_0)$  de la curva el vector  $\bar{g}(x_0, y_0) = a(x_0, y_0)\bar{i} + b(x_0, y_0)\bar{j}$  es tangente a la curva.

Si la curva característica es el gráfico de una función  $y(x)$ , entonces la definición nos dice que

$$\underbrace{\frac{dy}{dx}}_{\text{pendiente de la recta tangente}} = \underbrace{\frac{b(x, y)}{a(x, y)}}_{\text{pendiente del vector } \bar{g}(x, y)}.$$

La ecuación

$$\frac{dy}{dx} = \frac{b(x, y)}{a(x, y)} \quad (7.8)$$

se llama *ecuación característica* de (7.7) y los gráficos de las soluciones son las *curvas características* de (7.7).

La EDP (7.7) resulta una EDO sobre las curvas características.

En el caso  $a, b$  constante, las características son las rectas  $y = \frac{b}{a}x + d$  o también  $bx - ay = \text{const.}$  En ese caso definiríamos la variable  $w$  como una variable auxiliar que nos ayudaría a resolver el problema. Ahora haremos algo parecido.

Supongamos que ya pudimos resolver (7.8) y que las curvas características son de la forma

$$h(x, y) = \text{const.}$$

Por ejemplo  $h(x, y) = y - x^2$  o  $h(x, y) = x^2 + y^2$  (ver figura 7.4)

Entonces hacemos el cambio de variables y la identificación

$$\begin{cases} w = h(x, y) \\ z = y \end{cases} \quad v(w, z) = u(x, y)$$

La idea es que  $w$  será constante en cada característica y entonces la EDP se transformará en una EDO de la variable  $z$ . Veamos si esto ocurre

$$\begin{aligned} u_x &= v_w w_x + v_z z_x & u_y &= v_w w_y + v_z z_y \\ u_x &= v_w h_x + v_z 0 & u_y &= v_w h_y + v_z 1 \\ a u_x &= a h_x v_w & b u_y &= b h_y v_w + b v_z. \end{aligned} \quad \text{y}$$

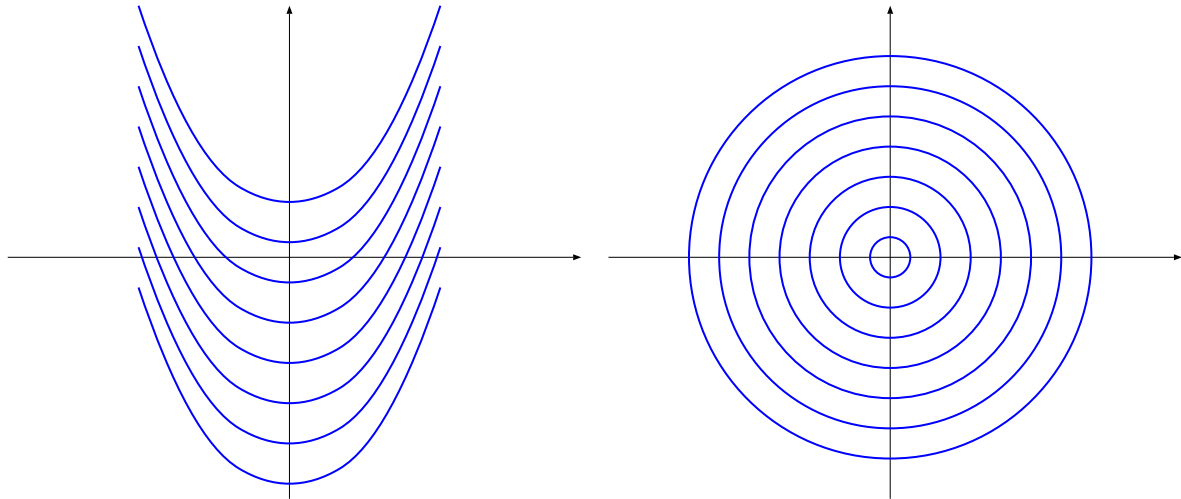


Figura 7.4: Curvas características de la forma  $h(x, y) = y - x^2 = \text{const.}$  (izquierda) y  $h(x, y) = x^2 + y^2 = \text{const.}$  (derecha)

Por lo tanto

$$a u_x + b u_y = (a h_x + b h_y) v_w + b v_z.$$

Observemos ahora que  $a h_x + b h_y = (a\bar{i} + b\bar{j}) \cdot \bar{\nabla}h$ , y  $a\bar{i} + b\bar{j}$  es tangente a las curvas de nivel de  $h$ , por lo tanto  $a\bar{i} + b\bar{j}$  es perpendicular a  $\bar{\nabla}h$ . Es decir

$$a h_x + b h_y = (a\bar{i} + b\bar{j}) \cdot \bar{\nabla}h = 0,$$

y resulta que la parte principal de la ecuación es  $a u_x + b u_y = b v_z$ , por lo que la ecuación en  $v$  resulta

$$b v_z + c v = f,$$

que es una EDO en la variable  $z$ .

Veamos un ejemplo.

**Ejemplo 7.14.** Hallar la solución general de

$$-y u_x + x u_y = 0, \quad u = u(x, y).$$

El primer paso consiste, como antes, en encontrar las curvas características. Las mismas deben satisfacer

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y},$$

que es una EDO de primer orden separable. Multiplicamos por  $y$  e integramos a ambos lados, obteniendo

$$\begin{aligned} y \frac{dy}{dx} &= -x \\ \int y dy &= - \int x dx \\ \frac{y^2}{2} &= -\frac{x^2}{2} + C \\ x^2 + y^2 &= \text{const.} \end{aligned}$$



Realizamos entonces el cambio de variables

$$\begin{cases} w = x^2 + y^2 \\ z = y \end{cases} \iff \begin{cases} x = \pm\sqrt{w - z^2} \\ y = z \end{cases}$$

Identificando  $u(x, y) = v(w, z)$ , veamos qué EDP satisface  $v(w, z)$ :

$$\begin{aligned} u_x &= v_w w_x + v_z z_x & u_y &= v_w w_y + v_z z_y \\ u_x &= v_w 2x + v_z 0 & u_y &= v_w 2y + v_z 1 \\ -yu_x &= -2xy v_w & x u_y &= 2xy v_w + xv_z. \end{aligned}$$

Por lo tanto  $-yu_x + xu_y = xv_z$ , y la ecuación resulta  $xv_z = 0$ . Por lo tanto  $v_z$  debe ser cero en todos los puntos donde  $x \neq 0$ , pero como buscamos soluciones  $C^1$ ,  $v_z$  debe ser continua y por lo tanto  $v_z \equiv 0$ . Es decir

$$v(w, z) = C(w),$$

y la solución general resulta

$$u(x, y) = C(x^2 + y^2).$$

En otras palabras, las soluciones son todas las funciones *radiales*, o sea, las que son constantes a lo largo de las circunferencias centradas en el origen. Por ejemplo

$C(w)$	$u(x, y)$
$w^3$	$(x^2 + y^2)^3$
$e^{-w}$	$e^{-(x^2 + y^2)}$
$\frac{1}{1 + w}$	$\frac{1}{1 + x^2 + y^2}$

### 7.2.1. Parametrización preferida

Otra forma de resolver EDPs lineales de primer orden con coeficientes variables se obtiene parametrizando las curvas características con un parámetro  $t$ , como cuando calculábamos integrales sobre curvas.

Sea  $x(t)\bar{i} + y(t)\bar{j}$  la parametrización de una curva característica. Entonces

$$x'(t)\bar{i} + y'(t)\bar{j} \text{ debe ser paralelo a } a(x(t), y(t))\bar{i} + b(x(t), y(t))\bar{j}.$$

La forma más fácil de lograr esto es eligiendo la parametrización de manera que

$$\begin{aligned} x'(t) &= a(x(t), y(t)), \\ y'(t) &= b(x(t), y(t)). \end{aligned} \tag{7.9}$$

El sistema (7.9) se llama *sistema característico* de (7.7).

Si  $x(t), y(t)$  son soluciones del sistema característico (7.9) entonces la parametrización  $x(t)\bar{i} + y(t)\bar{j}$  se llama *parametrización preferida* de la característica.

Si tenemos una parametrización preferida de una característica, definimos

$$U(t) = u(x(t), y(t)),$$

es decir,  $U(t)$  denota los valores de la solución  $u(x, y)$  a lo largo de la característica. Al derivar  $U(t)$  con respecto a  $t$ , usando la regla de la cadena, obtenemos:

$$\begin{aligned} U'(t) &= u_x(x(t), y(t))x'(t) + u_y(x(t), y(t))y'(t) \\ &= u_x(x(t), y(t))a(x(t), y(t)) + u_y(x(t), y(t))b(x(t), y(t)) \end{aligned}$$

que es la parte principal de la ecuación diferencial. Si ahora definimos  $C(t) = c(x(t), y(t))$  y  $F(t) = f(x(t), y(t))$ ,  $U(t)$  debe satisfacer

$$U'(t) + C(t)U(t) = F(t),$$

que es una EDO lineal de primer orden. En otras palabras, los valores de  $u(x, y)$  sobre la característica satisfacen una EDO lineal de primer orden a lo largo de la característica. Venimos diciendo esto desde que comenzamos este capítulo, pero aquí queda más claro que nunca.

Resolvamos nuevamente el ejemplo anterior utilizando la parametrización preferida:

**Ejemplo 7.15.** Utilizando las parametrizaciones preferidas hallar la solución general de

$$-y u_x + x u_y = 0, \quad u = u(x, y).$$

Hallamos ahora las parametrizaciones preferidas de las características. Para ello planteamos el sistema característico correspondiente:

$$x'(t) = -y(t), \quad y'(t) = x(t),$$

que es como los estudiados en la Sección 6.3. Para resolverlo derivamos la primera ecuación y reemplazamos  $y'(t)$  por  $x(t)$  obteniendo

$$x''(t) = -x(t),$$

con solución general

$$x(t) = C_1 \cos t + C_2 \sin t, \quad y(t) = -x'(t) = C_1 \sin t - C_2 \cos t.$$

Observamos que  $x(t)^2 + y(t)^2 = C_1^2 + C_2^2$ , así que las características son círculos centrados en el origen, y la misma familia de curvas se obtiene tomando  $C_2 = 0$  y  $C_1$  constante arbitraria; pero con una fórmula más simple. Ahora, si  $u(x, y)$  es solución de la ecuación planteada,  $U(t) = u(x(t), y(t))$  debe satisfacer

$$U'(t) = u_x x' + u_y y' = u_x (-y) + u_y x = 0,$$

por lo que  $U(t)$  debe ser constante, o lo que es lo mismo,  $u(x, y)$  es constante sobre círculos centrados en el origen. En consecuencia, la solución general es:

$$u(x, y) = f(x^2 + y^2), \quad f \in C^1.$$

**Observación 7.16.** Es interesante notar que el problema anterior no tiene solución cuando imponemos la condición lateral  $u(x, 0) = 3x$ ,  $x \in \mathbb{R}$ . Esto ocurre porque el eje  $x$  corta cada característica dos veces. Si impusiéramos  $u(x, 0) = 3x$ ,  $x > 0$  entonces el problema sí tendría solución, y única:  $u(x, y) = 3\sqrt{x^2 + y^2}$ .

## 7.2.2. Soluciones en forma paramétrica

Es conveniente en algunas situaciones parametrizar las curvas características en la forma  $X(s, t)\bar{i} + Y(s, t)\bar{j}$  de manera que para  $s$  fijo y  $t$  variable tengamos una parametrización preferida de una característica, y para  $t = 0$  (y  $s$  variable) estemos en la curva lateral.

**Ejemplo 7.17.** Consideremos el ejemplo de la sección anterior, con condición lateral sobre el eje  $x$  positivo:

$$-y u_x + x u_y = 0, \quad u = u(x, y), \quad u(s, 0) = s^3, \quad s > 0.$$

En este caso, tomaremos las parametrizaciones:

$$\begin{aligned} X(s, t) &= s \cos t \\ Y(s, t) &= s \sin t \end{aligned} \quad s > 0, \quad 0 \leq t < 2\pi.$$

De manera que para cada  $s_0 > 0$  fijo la curva  $X(s_0, t)\bar{i} + Y(s_0, t)\bar{j} = s_0 \cos t \bar{i} + s_0 \sin t \bar{j}$ ,  $0 \leq t < 2\pi$  describe la circunferencia de radio  $s_0$  centrada en el origen. Y para  $t = 0$ ,  $X(s, 0)\bar{i} + Y(s, 0)\bar{j} = s \cos 0 \bar{i} + s \sin 0 \bar{j} = s \bar{i}$  describe la curva lateral, que en este caso es el eje  $x > 0$ .

Consideremos entonces, en general, la EDP

$$a(x, y)u_x + b(x, y)u_y + c(x, y)u = f(x, y), \quad u = u(x, y),$$

con condición lateral

$$u(\gamma_1(s), \gamma_2(s)) = g(s), \quad s \in I,$$

para algún intervalo  $I$ . Es decir, la condición lateral está dada sobre la curva  $\gamma_1(s)\bar{i} + \gamma_2(s)\bar{j}$ ,  $s \in I$ . En el ejemplo anterior,  $\gamma_1(s) = s$ ,  $\gamma_2(s) = 0$  e  $I = (0, +\infty)$ .

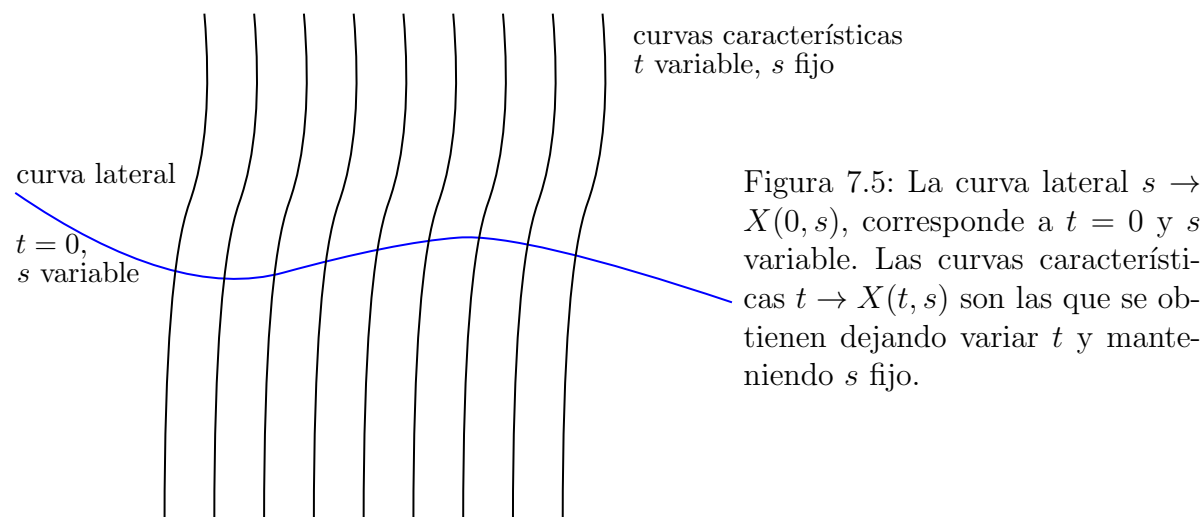


Figura 7.5: La curva lateral  $s \rightarrow X(0, s)$ , corresponde a  $t = 0$  y  $s$  variable. Las curvas características  $t \rightarrow X(t, s)$  son las que se obtienen dejando variar  $t$  y manteniendo  $s$  fijo.

Buscamos entonces una familia de parametrizaciones preferidas  $X(s, t)\bar{i} + Y(s, t)\bar{j}$  de las curvas características, de manera que para  $t = 0$  estemos sobre la curva lateral (ver

Figura 7.5). Luego, se debe cumplir que

$$\begin{aligned}\frac{\partial X}{\partial t}(s, t) &= a(X(t, s), Y(t, s)), & X(s, 0) &= \gamma_1(s), \\ \frac{\partial Y}{\partial t}(s, t) &= b(X(t, s), Y(t, s)), & Y(s, 0) &= \gamma_2(s).\end{aligned}$$

Definimos

$$U(s, t) = u(X(s, t), Y(s, t))$$

y vemos que

$$\frac{\partial}{\partial t}U(s, t) = u_x(X(s, t), Y(s, t))\frac{\partial X}{\partial t}(s, t) + u_y(X(s, t), Y(s, t))\frac{\partial Y}{\partial t}(s, t)$$

o más brevemente

$$U_t = u_x X_t + u_y Y_t.$$

Utilizando que las parametrizaciones son preferidas, tenemos que  $U_t$  es la parte principal de la EDP. Más precisamente, si  $u(x, y)$  es solución de la EDP,  $U(s, t)$  debe satisfacer

$$U_t + c(X(s, t), Y(s, t))U = f(X(s, t), Y(s, t)).$$

Si definimos  $C(s, t) = c(X(s, t), Y(s, t))$  y  $F(s, t) = f(X(s, t), Y(s, t))$ ,  $U(s, t)$  debe cumplir

$$U_t(s, t) + C(s, t)U(s, t) = F(s, t), \quad U(s, 0) = g(s), \quad s \in I.$$

Esta última ecuación es entonces una familia de ecuaciones diferenciales ordinarias lineales de primer orden, una para cada  $s \in I$ , que sabemos resolver. Veamos un ejemplo concreto:

**Ejemplo 7.18.** Hallar la solución en forma paramétrica de

$$(y + x)u_x + (y - x)u_y - u = 0, \quad u = u(x, y), \quad u(\cos(s), \sin(s)) = 1, \quad 0 \leq s < 2\pi.$$

Planteamos la ecuación de las parametrizaciones preferidas:

$$\begin{aligned}X_t(s, t) &= X(t, s) + Y(t, s), & X(s, 0) &= \cos(s), \\ Y_t(s, t) &= Y(t, s) - X(t, s), & Y(s, 0) &= \sin(s).\end{aligned}$$

Resolvemos como en la Sección 6.3:

$$X_{tt} = X_t + \underbrace{Y_t}_{Y-X} = X_t + \underbrace{Y}_{X_t-X} - X = X_t + X_t - X - X = 2X_t - 2X,$$

por lo que

$$X_{tt} - 2X_t + 2X = 0.$$

Proponiendo  $X = e^{rt}$  obtenemos  $r^2 - 2r + 2 = 0$  que tiene soluciones complejas  $r = 1 \pm i$ . La solución es entonces  $X(s, t) = C_1(s)e^t \cos t + C_2(s)e^t \sin t$ ; notar que las constantes pueden depender de la variable  $s$ . Las curvas características están entonces dadas por:

$$\begin{aligned}X(s, t) &= e^t(C_1(s) \cos t + C_2(s) \sin t) \\ Y(s, t) &= e^t(-C_1(s) \sin t + C_2(s) \cos t)\end{aligned}$$

Imponiendo las condiciones iniciales  $X(s, 0) = \cos s$ ,  $Y(s, 0) = \sin s$  tenemos que  $C_1(s) = \cos s$  y  $C_2(s) = \sin(s)$ , por lo que

$$\begin{aligned} X(s, t) &= e^t (\cos s \cos t + \sin s \sin t) = e^t \cos(s - t) \\ Y(s, t) &= e^t (-\cos s \sin t + \sin s \cos t) = e^t \sin(s - t) \end{aligned}$$

Definiendo  $U(s, t) = u(X(s, t), Y(s, t))$ , con  $u(x, y)$  la solución buscada,

$$U_t = u_x X_t + u_y Y_t = u_x(X + Y) + u_y(Y - X) = u = U,$$

es decir,  $U_t - U = 0$ . Resolviendo y usando la condición lateral

$$U(s, t) = C(s)e^t, \quad U(s, 0) = 1 \quad \implies U(s, t) = e^t.$$

La solución paramétrica está entonces dada por

$$\begin{aligned} X(s, t) &= e^t \cos(s - t), \\ Y(s, t) &= e^t \sin(s - t), \quad t \in \mathbb{R}, \quad 0 \leq s < 2\pi. \\ U(s, t) &= e^t, \end{aligned} \tag{7.10}$$

Así es como queda expresada la solución paramétrica.

A veces, muy pocas veces, puede deducirse la fórmula de  $u(x, y)$  en base a la formulación paramétrica. En el ejemplo anterior por ejemplo, es fácil ver que

$$e^t = U(s, t) = \sqrt{X(s, t)^2 + Y(s, t)^2}$$

y entonces  $u(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ .

Pero en general no es tan fácil hallar la fórmula de  $u(x, y)$  aunque la forma paramétrica (7.10) es igualmente útil. Veamos otro ejemplo con la misma ecuación, pero diferente condición lateral, dada sobre la misma curva lateral.

**Ejemplo 7.19.** Hallar la solución de

$$(y+x)u_x + (y-x)u_y - u = 0, \quad u = u(x, y), \quad u(\cos(s), \sin(s)) = \cos(2s), \quad 0 \leq s < 2\pi.$$

Las parametrizaciones preferidas son las mismas, y  $U(t, s) = C(s)e^t$ , pero ahora la condición lateral nos dice que  $U(0, s) = \cos(2s)$ , así que  $C(s) = \cos(2s)$  y la solución en forma paramétrica es:

$$\begin{aligned} X(s, t) &= e^t \cos(s - t), \\ Y(s, t) &= e^t \sin(s - t), \quad t \in \mathbb{R}, \quad 0 \leq s < 2\pi. \\ U(s, t) &= \cos(2s)e^t, \end{aligned} \tag{7.11}$$

Ya no es tan fácil despejar  $u$  en términos de  $x$  e  $y$ , pero sí es fácil por ejemplo, graficar la solución usando un software como MATLAB u OCTAVE; ver Figura 7.6.

```
% lineas para graficar la solucion
% en forma parametrica
```

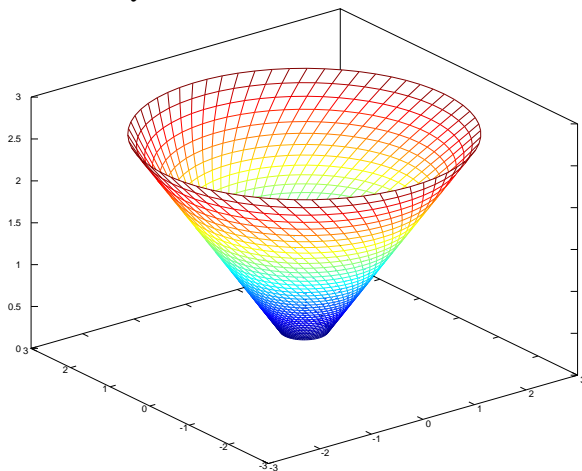
```
% correspondiente al Ejemplo 7.18
```

```
% x = e^t cos(s-t)
% y = e^t sen(s-t)
% u = e^t
```

```
s = [0:0.1:2*pi];
t = [-1:0.05:1];
[s, t] = meshgrid(s, t);
```

```
x = exp(t) .* cos(s-t);
y = exp(t) .* sin(s-t);
u = exp(t);
```

```
mesh(x,y,u)
```



```
% lineas para graficar la solucion
% en forma parametrica
```

```
% correspondiente al Ejemplo 7.19
```

```
% x = e^t cos(s-t)
% y = e^t sen(s-t)
% u = sen(2s) e^t
```

```
s = [0:0.1:2*pi];
t = [-1:0.05:1];
[s, t] = meshgrid(s, t);
```

```
x = exp(t) .* cos(s-t);
y = exp(t) .* sin(s-t);
u = cos(2*s) .* exp(t);
```

```
mesh(x,y,u)
```

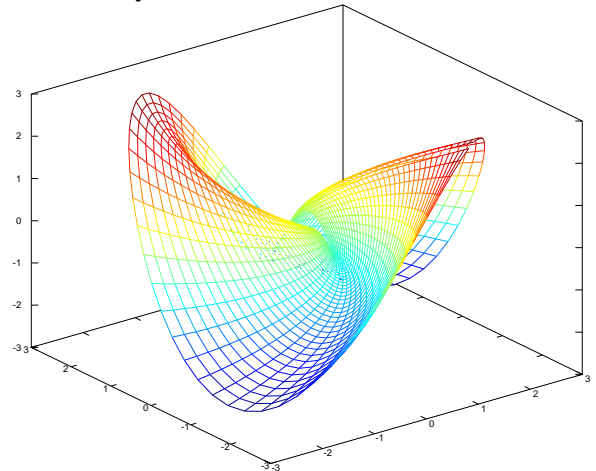


Figura 7.6: Cómo graficar en MATLAB/OCTAVE soluciones dadas en forma paramétrica.

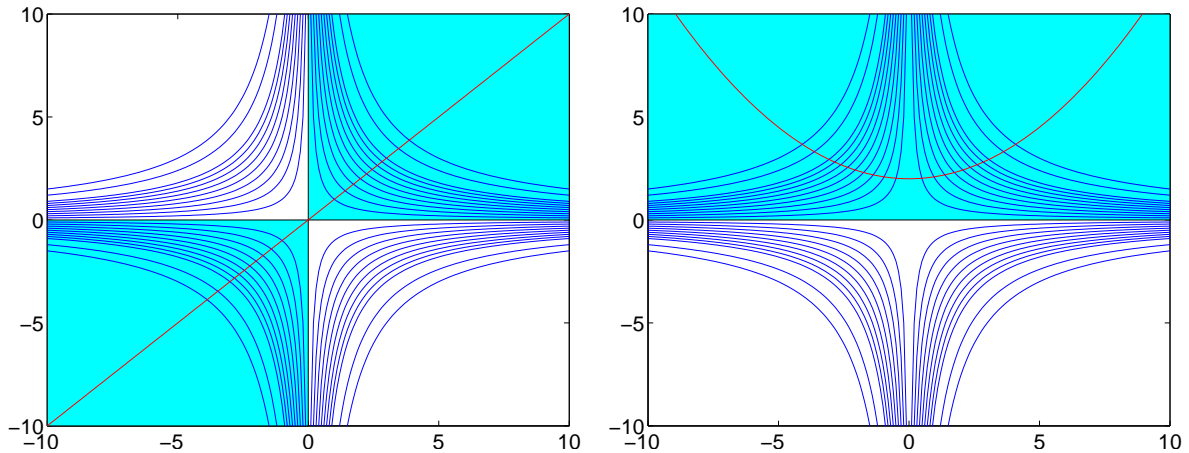


Figura 7.7: Curvas características y curvas laterales de los problemas (7.12) y (7.13). En el problema 7.12 la curva lateral determina la solución en el primer y el tercer cuadrante (izquierda), mientras que en el problema 7.13 la curva lateral determina la solución en el primer y el segundo cuadrante (derecha).

### 7.2.3. Consideraciones globales

Cuando los valores de  $u$  se prescriben sobre una curva regular que intersecta cada característica una sola vez de manera transversal, entonces tenemos una manera de encontrar la solución  $u$  en todo el plano. Sin embargo, como veremos en el siguiente ejemplo, puede ocurrir que no existe una curva que corte a todas las características. En tales casos, no será posible hallar la solución en todo el plano, sino en algunas regiones, a menos que impongamos condiciones laterales sobre más de una curva. Esto no es en general un problema, dado que en muchas ocasiones la región de interés será la cubierta por las características que cortan a la curva lateral indicada. Veamos un ejemplo.

Consideremos el problema

$$xu_x - yu_y + yu = 0, \quad u = u(x, y), \quad u(x, x) = 1. \quad (7.12)$$

y el problema

$$xu_x - yu_y + yu = 0, \quad u = u(x, y), \quad u(x, 2 + x^2/10) = e^x. \quad (7.13)$$

Para ambos problemas, las características son las curvas que cumplen  $\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x}$  ó  $\frac{1}{y} \frac{dy}{dx} = -\frac{1}{x}$ . Integrando obtenemos  $\ln |y| = -\ln |x| + C$ , o  $\ln |y| + \ln |x| = C$ , que es equivalente a

$$xy = \text{const.}$$

Las curvas características son entonces las hipérbolas que se ven en la Figura 7.7. Al intentar resolver cada uno de los problemas planteados vemos que la condición lateral no podrá determinar la solución en todo el plano  $xy$  sino solamente en un par de cuadrantes; ver Figura 7.7.

**Observación 7.20.** Es importante notar que esta particularidad de que ocurra que una curva no pueda cortar a todas las características, solo puede suceder cuando los

coeficientes  $a(x, y)$  y  $b(x, y)$  son variables. Cuando los coeficientes son constantes las características son todas *rectas* paralelas entre sí.

### 7.3. EDPs de primer orden en más variables

El método de las características también se aplica al caso de EDP lineales de primer orden en más dimensiones. Por ejemplo, en dimensión 3, la EDP lineal de primer orden es

$$a(x, y, z)u_x + b(x, y, z)u_y + c(x, y, z)u_z + d(x, y, z)u = f(x, y, z), \quad u = u(x, y, z),$$

para funciones dadas  $a, b, c, d$  y  $f$ . Las curvas características  $x(t)\bar{i} + y(t)\bar{j} + z(t)\bar{k}$  parametrizadas de la manera *preferida* son las soluciones del sistema

$$\frac{dx}{dt} = a(x(t), y(t), z(t)), \quad \frac{dy}{dt} = b(x(t), y(t), z(t)), \quad \frac{dz}{dt} = c(x(t), y(t), z(t)).$$

En la práctica es usualmente más conveniente tratar a  $x$  como un parámetro en lugar de  $t$ , en cuyo caso el sistema anterior se transforma en un sistema de dos ecuaciones (si suponemos que  $a(x, y, z) \neq 0$ )

$$\frac{dy}{dx} = \frac{b(x, y(x), z(x))}{a(x, y(x), z(x))}, \quad \frac{dz}{dx} = \frac{c(x, y(x), z(x))}{a(x, y(x), z(x))},$$

para las incógnitas  $y = y(x)$  y  $z = z(x)$ .

Veamos un ejemplo con coeficientes constantes.

**Ejemplo 7.21.** Hallar la solución general de

$$2u_x + 3u_y + 5u_z - u = 0, \quad u = u(x, y, z). \quad (7.14)$$

Las curvas características se encuentran resolviendo el sistema

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3}{2}, \quad \frac{dz}{dx} = \frac{5}{2}.$$

Obtenemos  $y = \frac{3}{2}x + \alpha$ ,  $z = \frac{5}{2}x + \beta$  con  $\alpha, \beta$  constantes arbitrarias. Las características son entonces las líneas dadas por la intersección de dos planos de la forma  $2y - 3x = \text{const}_1$  y  $2z - 5x = \text{const}_2$ . Hacemos entonces el siguiente cambio de variables:

$$\begin{cases} \bar{x} = 2y - 3x \\ \bar{y} = 2z - 5x \\ \bar{z} = z \end{cases} \iff \begin{cases} x = \frac{-\bar{y} + 2\bar{z}}{5} \\ y = \frac{5\bar{x} - 3\bar{y} + 6\bar{z}}{10} \\ z = \bar{z}. \end{cases}$$

Identificando  $u(x, y, z) = \bar{u}(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ , veamos qué EDP satisface  $\bar{u}(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ :

$$\begin{aligned} u_x &= \bar{u}_{\bar{x}} \bar{x}_x + \bar{u}_{\bar{y}} \bar{y}_x + \bar{u}_{\bar{z}} \bar{z}_x & u_y &= \bar{u}_{\bar{x}} \bar{x}_y + \bar{u}_{\bar{y}} \bar{y}_y + \bar{u}_{\bar{z}} \bar{z}_y \\ u_x &= \bar{u}_{\bar{x}} (-3) + \bar{u}_{\bar{y}} (-5) + \bar{u}_{\bar{z}} 0 & u_y &= \bar{u}_{\bar{x}} 2 + \bar{u}_{\bar{y}} 0 + \bar{u}_{\bar{z}} 0 \\ 2u_x &= -6\bar{u}_{\bar{x}} - 10\bar{u}_{\bar{y}} & 3u_y &= 6\bar{u}_{\bar{x}}. \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
& u_z = \bar{u}_{\bar{x}} \bar{x}_z + \bar{u}_{\bar{y}} \bar{y}_z + \bar{u}_{\bar{z}} \bar{z}_z \\
\text{y} \quad & u_z = \bar{u}_{\bar{x}} 0 + \bar{u}_{\bar{y}} 2 + \bar{u}_{\bar{z}} 1 \\
& 5u_z = 10 \bar{u}_{\bar{y}} + 5 \bar{u}_{\bar{z}}.
\end{aligned}$$

Por lo tanto  $2u_x + 3u_y + 5u_z = 5\bar{u}_{\bar{z}}$ . Así, la ecuación (7.14) se transforma en  $5\bar{u}_{\bar{z}} - \bar{u} = 0$ , que tiene solución

$$\bar{u}(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) = C(\bar{x}, \bar{y}) e^{\bar{z}/5}.$$

Reemplazando  $\bar{x}$ ,  $\bar{y}$  y  $\bar{z}$  por sus equivalentes en términos de  $x$ ,  $y$  y  $z$  obtenemos la solución general

$$u(x, y, z) = C(2y - 3x, 2z - 5x) e^{z/5}.$$

La función de dos variables  $C(\bar{x}, \bar{y})$  se determina imponiendo una condición lateral sobre una *superficie* que debe cortar a cada recta característica de manera transversal una sola vez.

**Ejemplo 7.22.** Hallar la solución de

$$2u_x + 3u_y + 5u_z - u = 0, \quad u = u(x, y, z), \quad u(x, y, 0) = x^2 \operatorname{sen} y, \quad x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}.$$

Ya sabemos que la solución general es  $u(x, y, z) = C(2y - 3x, 2z - 5x) e^{z/5}$ . Debemos imponer la condición lateral  $u(x, y, 0) = x^2 \operatorname{sen} y$  para determinar la función  $C$ . La condición lateral implica

$$C(2y - 3x, -5x) = x^2 \operatorname{sen} y.$$

Tomemos  $r = 2y - 3x$  y  $s = -5x$ , entonces  $x = -\frac{s}{5}$ ,  $y = \frac{1}{2}(r - \frac{3}{5}s)$ , y entonces

$$C(r, s) = \left(\frac{s}{5}\right)^2 \operatorname{sen} \left(\frac{1}{2}\left(r - \frac{3}{5}s\right)\right) = \left(\frac{s}{5}\right)^2 \operatorname{sen} \left(\frac{r}{2} - \frac{3}{10}s\right).$$

La solución deseada es entonces

$$\begin{aligned}
u(x, y, z) &= \left(\frac{2z - 5x}{5}\right)^2 \operatorname{sen} \left(\frac{2y - 3x}{2} - \frac{3}{10}(2z - 5x)\right) e^{\frac{z}{5}} \\
&= \left(\frac{2}{5}z - x\right)^2 \operatorname{sen} \left(y - \frac{3}{5}z\right) e^{\frac{z}{5}}.
\end{aligned}$$

## 7.4. Ejercicios

**7.1.** Encontrar la solución general de cada una de las siguientes ecuaciones lineales de primer orden con coeficientes constantes:

$$(a) \quad 2u_x - 3u_y = x \qquad (b) \quad u_x + u_y - u = 0.$$

**7.2.** Consideremos la ecuación diferencial siguiente:  $5u_x - u_y + u = 0$ ,  $u = u(x, y)$ .

(a) Hallar la solución general, y decir cuáles son las curvas características.

En cada uno de los siguientes casos hallar (si es posible) una solución de la ecuación resuelta en **(a)** que cumpla la condición lateral indicada. Si no hay, indicar por qué. Si hay más de una, indicar tres soluciones diferentes.

$$(b) u(-5x, x) = 3e^x, \quad (c) u(x, \frac{-x+5}{5}) = x(1-x), \quad (d) u(x, x) = x^2.$$

**7.3.** ¿Qué forma debe tener la función  $g(x)$  para que el siguiente problema tenga solución?

$$\begin{cases} u_x + 3u_y - u = 1 & (x, y) \in \mathbb{R}^2 \\ u(x, 3x) = g(x) & x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Si  $g$  cumple tal condición. ¿Tiene el problema solución única?

\* **7.4.** Dar un ejemplo de ecuación lineal de primer orden con coeficientes constantes (en  $\mathbb{R}^2$ ), y condición lateral dada sobre una curva lateral que corte todas las características, pero que no tenga solución. Explicar por qué no tiene solución.

**7.5.** Encontrar la solución general, en los dominios indicados, de cada una de las siguientes ecuaciones lineales de primer orden con coeficientes variables:

(a)  $x u_x + 2y u_y = 0, x > 0, y > 0.$

(b)  $y u_x - 4x u_y = 2xy, (x, y) \in \mathbb{R}^2.$

**7.6.** Encontrar la forma paramétrica de la solución de cada uno de los siguientes problemas:

$$(a) \begin{cases} x u_x + 2y u_y = 0, & x > 0, y > 0 \\ u(s, e^{-s}) = \sin s, & s > 0. \end{cases} \quad (b) \begin{cases} y u_x - 4x u_y = 2xy, & (x, y) \in \mathbb{R}^2 \\ u(s, s^3) = 1, & s \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Graficar (usando MATLAB) en una parte del dominio para ver cómo lucen las soluciones.

**7.7.** Resolver el problema

$$u_x + u_y + u_z = u, \quad u = u(x, y, z), \quad u(x, y, 0) = x^2 + y^2.$$

**7.8.** Hallar la solución general de la EDP  $u_x - u_y + u = z, u = u(x, y, z).$

(a) Hallar la solución que cumple con la condición lateral  $u(0, y, z) = y^2 e^z.$

(b) Mostrar que no hay ninguna solución que satisfaga  $u(x, y, x + y) = 0.$

(c) Hallar tres soluciones que satisfagan  $u(x, y, x + y) = x + y + e^y.$

(d) Explicar lo ocurrido en **(b)** y **(c)** relacionando las rectas características de la EDP con el plano  $z = x + y$  donde se dan las condiciones laterales.

(e) ¿Qué relación existe entre el plano  $x = 0$  donde se da la condición lateral del item **(a)** y las rectas características?

## Bibliografía complementaria

[Bleecker-Csordas 1996] Bleecker, D., Csordas, G., *Basic Partial Differential Equations*, International Press, Cambridge, Massachusetts, 1996.

# Capítulo 8

## La ecuación de difusión unidimensional

Vimos en la Sección 5.3 que la ecuación de difusión unidimensional cuando los coeficientes son constantes resulta

$$u_t - ku_{xx} = f, \quad u = u(x, t), \quad (8.1)$$

donde  $f(x, t)$  denota un término *fuentes*.

En este capítulo estudiaremos, en primer lugar, propiedades cualitativas de las soluciones, y luego buscaremos soluciones de esta ecuación con diferentes condiciones iniciales, y diferentes condiciones de borde. Primero hallaremos soluciones para el caso de  $f \equiv 0$  y en la última sección veremos cómo tratar el término fuente  $f \neq 0$  a través del principio de Duhamel.

### 8.1. Solución fundamental de la ecuación de difusión

Comenzamos estudiando la ecuación de difusión cuando el dominio de la variable  $x$  es toda la recta real. Una solución muy importante de la ecuación de difusión *homogénea* está dada por la fórmula

$$\Phi(x, t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi kt}} e^{-\frac{x^2}{4kt}}, \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0. \quad (8.2)$$

En efecto, es fácil verificar que  $\Phi_t = k\Phi_{xx}$  para todo  $x \in \mathbb{R}$ ,  $t > 0$ . Luego  $\Phi(x, t)$  es solución de (8.1) cuando  $f \equiv 0$ .

Analicemos brevemente las propiedades de esta solución.

- Para cada  $t_0 > 0$  fijo, la función  $\Phi(x, t_0)$  es una Gaussiana en la variable  $x$ . Su gráfica es más aplanada cuando  $t_0$  es más grande, y está más concentrada en el origen cuando  $t_0$  está más cerca de cero; ver Figura 8.1 (izquierda).
- $\Phi(x, t)$  no está definida para  $t = 0$ , pero vemos que  $\Phi(x, t)$  se aproxima a *la Delta de Dirac* cuando  $t \rightarrow 0^+$ .
- $\int_{-\infty}^{\infty} \Phi(x, t) dx = 1$ , para cualquier  $t > 0$ .

- Definimos ahora, para una función  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  dada, la función

$$u(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} g(y)\Phi(x - y, t) dy, \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0. \quad (8.3)$$

Si  $g$  es continua y acotada, entonces se puede ver que las derivadas con respecto a  $x$  y a  $t$  se pueden meter dentro de la integral y

$$\begin{aligned} u_x(x, t) &= \int_{-\infty}^{\infty} g(y)\Phi_x(x - y, t) dy, \\ u_{xx}(x, t) &= \int_{-\infty}^{\infty} g(y)\Phi_{xx}(x - y, t) dy, \\ u_t(x, t) &= \int_{-\infty}^{\infty} g(y)\underbrace{\Phi_t(x - y, t)}_{=k\Phi_{xx}(x, t)} dy. \end{aligned}$$

Entonces  $u_t = ku_{xx}$ , y  $u$  también es solución de la ecuación de difusión homogénea. Ya vemos que  $u(x, t)$  no está definida para  $t = 0$ , y entonces nos preguntamos qué ocurre con  $\lim_{t \rightarrow 0^+} u(x, t)$ . Veamos:

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \int_{-\infty}^{\infty} g(y)\Phi(x - y, t) dy = \int_{-\infty}^{\infty} g(x - y)\Phi(y, t) dy \\ &= \frac{1}{\sqrt{4\pi kt}} \int_{-\infty}^{\infty} g(x - y)e^{-\frac{y^2}{4kt}} dy \end{aligned}$$

Pero el límite de esta última fórmula es  $g(x)$  cuando  $t \rightarrow 0^+$  por lo visto en la Sección 1.6 (ver también ejercicio 1.4).

Por lo tanto, si extendemos la definición de  $u(x, t)$  a  $x \in \mathbb{R}$ ,  $0 \leq t < \infty$  de la siguiente manera:

$$u(x, t) = \begin{cases} \int_{-\infty}^{\infty} g(y)\Phi(x - y, t) dy, & \text{si } t > 0, \\ g(x), & \text{si } t = 0, \end{cases}$$

obtenemos una solución del problema

$$\begin{aligned} u_t &= ku_{xx}, & x \in \mathbb{R}, \quad t > 0 \\ u(x, 0) &= g(x), & x \in \mathbb{R} \quad (t = 0). \end{aligned}$$

La solución dada por esta fórmula para el dato inicial

$$g(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } -1 \leq x \leq 1 \\ 0, & \text{en c.o.c.} \end{cases} \quad (8.4)$$

puede visualizarse en la Figura 8.1 (derecha).

Como las soluciones del problema de difusión homogéneo se pueden obtener haciendo convolución del dato inicial con  $\Phi(x, t)$  de la fórmula (8.2), esta función  $\Phi(x, t)$  se denomina *solución fundamental* de la ecuación de difusión en 1d.

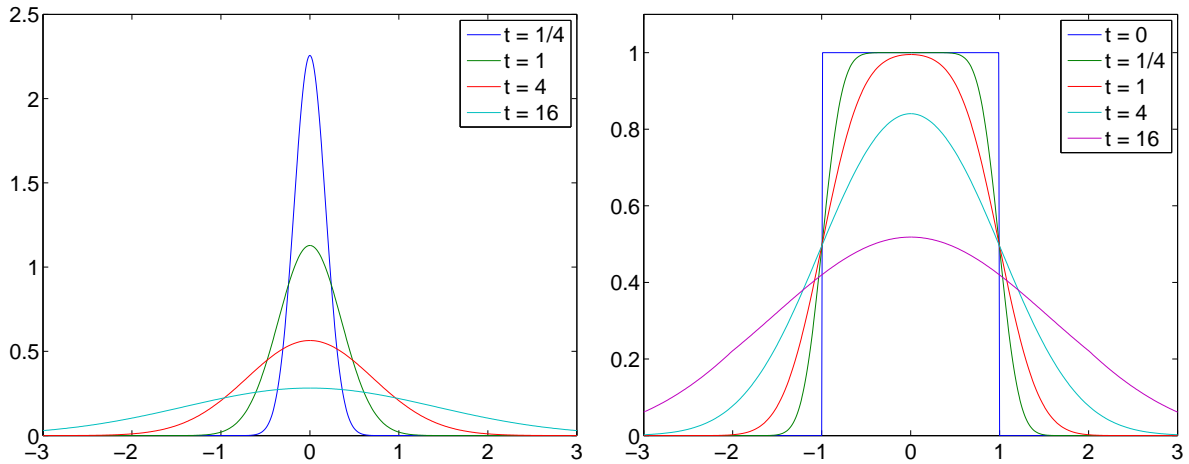


Figura 8.1: Gráfico de la solución fundamental de la ecuación de difusión  $u_t = ku_{xx}$ ,  $x \in \mathbb{R}$ ,  $t > 0$  para  $k = 1/16$  y distintos valores de  $t$  (izquierda). Solución dada por la convolución con la solución fundamental del problema con dato inicial  $u = g$ ,  $x \in \mathbb{R}$ ,  $t = 0$ , con  $g$  de (8.4)

## 8.2. Unicidad, estabilidad, y el principio del máximo

Si escribimos, en base a un *problema de palabras*, que

$$\begin{cases} x + y + z = 3, \\ x + y = 3, \end{cases}$$

podríamos decir que  $x = 1$ ,  $y = 2$ ,  $z = 0$ . Pero podemos observar también que hay más soluciones. Esto indica que el problema *está mal planteado*, o faltan condiciones que determinen una única solución.

En EDP no es tan obvio darse cuenta si hay infinitas soluciones, o única. La unicidad de soluciones, además de decirnos que el problema está bien planteado, nos permite afirmar que si hemos hallado una fórmula para una solución (por ejemplo por el método de separación de variables), entonces esa fórmula representa **la** solución.

En esta sección veremos la unicidad de soluciones del problema de difusión en un intervalo con condiciones de Dirichlet de dos maneras diferentes:

- Utilizando el método de *energía*.
- A través del principio del máximo.

### 8.2.1. Método de energía

El siguiente teorema dice que la ecuación de difusión con CB de tipo Dirichlet en un intervalo acotado  $[0, L]$  tiene única solución. Su demostración se hará utilizando el llamado método de energía.

**Teorema 8.1.** Consideremos el problema de difusión en un intervalo acotado con condiciones de borde Dirichlet siguiente:

$$\begin{cases} u_t - ku_{xx} = g(x, t), & 0 < x < L, \quad 0 < t < T \\ u(0, t) = a(t), \quad u(L, t) = b(t) & 0 < t < T \\ u(x, 0) = f(x), & 0 < x < L, \end{cases} \quad (8.5)$$

donde  $g(x, t)$ ,  $f(x)$ ,  $a(t)$ ,  $b(t)$  son funciones dadas en  $[0, L]$  y en  $[0, T]$ , respectivamente. Si  $u_1(x, t)$  y  $u_2(x, t)$  son soluciones de (8.5), entonces  $u_1(x, t) = u_2(x, t)$  para todo  $0 \leq x \leq L$ ,  $t \geq 0$ .

*Demostración.* Sea  $v(x, t) = u_1(x, t) - u_2(x, t)$ . La demostración consiste en mostrar que  $v(x, t) \equiv 0$ , lo que implicará que  $u_1(x, t) \equiv u_2(x, t)$ . ¿Qué podemos deducir que cumple  $v(x, t)$ ? Claramente

$$\begin{cases} v_t = kv_{xx}, & 0 < x < L, \quad t > 0 \\ v(0, t) = 0, \quad v(L, t) = 0 & t > 0 \\ v(x, 0) = 0, & 0 < x < L. \end{cases} \quad (8.6)$$

Aquí hay que tener cuidado con la lógica. Es claro que si tomamos  $v \equiv 0$  obtenemos una solución de (8.6). Lo que queremos demostrar es que existe una única solución de (8.6), y es la  $v \equiv 0$ .

Sea entonces  $v(x, t)$  una solución de (8.6) y definamos

$$F(t) = \int_0^L [v(x, t)]^2 dx, \quad t \geq 0.$$

Esta función  $F(t)$  que depende solo de  $t$  se llama *energía* de la solución  $v(x, t)$  a tiempo  $t$ . Veamos qué propiedades cumple  $F(t)$ .

- $F(0) = \int_0^L [v(x, 0)]^2 dx = \int_0^L 0 dx = 0.$
- $F(t) \geq 0$  para todo  $t \geq 0.$

- Observemos  $F'(t)$

$$\begin{aligned}
F'(t) &= \frac{d}{dt} \int_0^L [v(x, t)]^2 dx \\
&= \int_0^L \frac{\partial}{\partial t} [v(x, t)]^2 dx \\
&= \int_0^L 2v(x, t) v_t(x, t) dx = 2 \int_0^L v(x, t) k v_{xx}(x, t) dx && \text{por (8.6)} \\
&= 2k \int_0^L 2v(x, t) v_{xx}(x, t) dx \\
&= 2k \left[ v(x, t) v_x(x, t) \Big|_{x=0}^{x=L} - \int_0^L v_x(x, t) v_x(x, t) dx \right] && \text{int. por partes} \\
&= 2k \underbrace{\left\{ v(L, t) v_x(L, t) - v(0, t) v_x(0, t) \right\}}_{=0 \text{ por CB}} - 2k \underbrace{\int_0^L [v_x(x, t)]^2 dx}_{\geq 0} \\
& && \leq 0
\end{aligned}$$

Por lo tanto  $F'(t) \leq 0$  y  $F(t)$  es *decreciente*.

Poniendo todo junto

$$0 \leq F(t) \leq F(0) = 0 \quad \implies \quad F(t) \equiv 0, \quad t \geq 0.$$

Luego  $\int_0^L [v(x, t)]^2 dx = 0, t \geq 0$  lo que implica que  $v(x, t) \equiv 0, 0 \leq x \leq L, t \geq 0$ .  $\square$

**Observación 8.2.** El método del Teorema 8.1 puede usarse para todas las condiciones de borde que hemos visto hasta ahora. Basta ver que siempre da menor o igual a cero el término

$$\left\{ v(L, t) v_x(L, t) - v(0, t) v_x(0, t) \right\}$$

cuando  $v = u_1 - u_2$  es la resta entre dos soluciones con las mismas condiciones de borde. Ver ejercicio 8.4

**Observación 8.3.** El método del Teorema 8.1 puede usarse para comparar dos soluciones con diferentes condiciones iniciales. Si  $u_1, u_2$  son soluciones de (8.5) con condición inicial  $f_1, f_2$ , respectivamente, entonces definimos  $v := u_1 - u_2$  y  $F(t) = \int_0^L [v(x, t)]^2 dx$  como antes. Luego  $F'(t) \leq 0$  y  $F(t) \leq F(0)$ , es decir

$$\begin{aligned}
\int_0^L [u_1(x, t) - u_2(x, t)]^2 dx &= F(t) \\
&\leq F(0) = \int_0^L [u_1(x, 0) - u_2(x, 0)]^2 dx \\
&= \int_0^L [f_1(x) - f_2(x)]^2 dx.
\end{aligned}$$

En palabras, el error cuadrático medio entre  $u_1(\cdot, t)$  y  $u_2(\cdot, t)$  es decreciente y nunca excede el error cuadrático medio inicial. Es importante observar que esto no nos dice que el *máximo* error no crezca, sino que *en promedio* no crece. Un resultado más preciso se presenta en la próxima sección.

### 8.2.2. El principio del máximo y sus consecuencias

**Teorema 8.4** (Principio del máximo). *Sea  $u(x, t)$  una solución del problema*

$$\begin{cases} u_t - ku_{xx} = 0, & 0 < x < L, \quad 0 < t < T \\ u(0, t) = a(t), \quad u(L, t) = b(t) & 0 < t < T \\ u(x, 0) = f(x), & 0 < x < L, \end{cases} \quad (8.7)$$

con  $a(t)$ ,  $b(t)$  y  $f(x)$  funciones continuas dadas en  $[0, T]$  y  $[0, L]$ , respectivamente, para un tiempo final  $T > 0$  dado. Definimos

$$\begin{aligned} \bar{f} &= \max_{0 \leq x \leq L} f(x) = \text{máximo valor de } u \text{ en } t = 0 \\ \bar{a} &= \max_{0 \leq t \leq T} a(t) = \text{máximo valor de } u \text{ en } x = 0 \\ \bar{b} &= \max_{0 \leq t \leq T} b(t) = \text{máximo valor de } u \text{ en } x = L \end{aligned}$$

y

$$M = \max\{\bar{f}, \bar{a}, \bar{b}\} = \text{máximo valor de } u \text{ en } \Gamma.$$

Aquí  $\Gamma = \{0 \leq x \leq L, t = 0\} \cup \{x = 0, 0 \leq t \leq T\} \cup \{x = L, 0 \leq t \leq T\}$  es lo que se denomina frontera parabólica del problema (8.7) (ver Figura 8.2). Entonces

$$u(x, t) \leq M, \quad 0 < x < L, \quad 0 < t \leq T.$$

O lo que es lo mismo

$$\max_{\substack{0 \leq x \leq L \\ 0 \leq t \leq T}} u(x, t) = \max_{(x,t) \in \Gamma} u(x, t), \quad \text{ó} \quad \max_{\bar{\Omega} \times [0, T]} u = \max_{\Gamma} u.$$

**Observación 8.5.** Desde el punto de vista físico, si  $u$  denota temperatura, el principio del máximo nos dice que, en ausencia de fuentes volumétricas de calor, la temperatura en un punto  $x$  a tiempo  $t$  es siempre menor o igual a la máxima temperatura alcanzada entre el tiempo inicial y el borde en el intervalo de tiempo considerado.

Postponemos la demostración del Teorema 8.4 hasta la próxima sección y nos dedicamos ahora a ver algunas consecuencias que se desprenden del principio del máximo.

**Corolario 8.6** (Principio del mínimo). *Sea  $u$  una solución de (8.7) y definamos*

$$\begin{aligned} \underline{f} &= \min_{0 \leq x \leq L} f(x) = \text{mínimo valor de } u \text{ en } t = 0 \\ \underline{a} &= \min_{0 \leq t \leq T} a(t) = \text{mínimo valor de } u \text{ en } x = 0 \\ \underline{b} &= \min_{0 \leq t \leq T} b(t) = \text{mínimo valor de } u \text{ en } x = L \end{aligned}$$



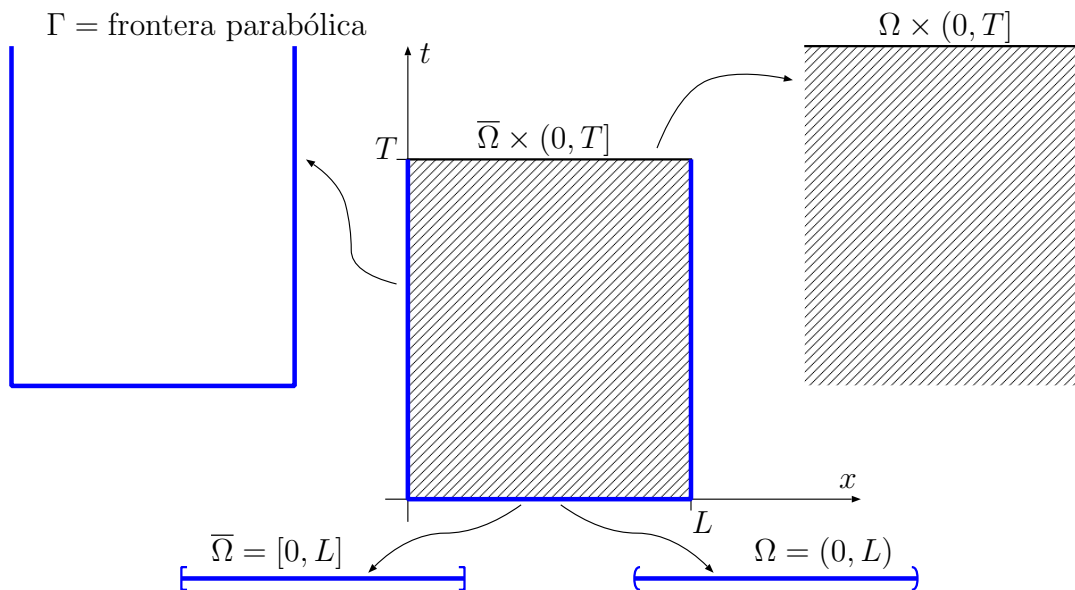


Figura 8.2: Gráfico de  $\Gamma$ ,  $\bar{\Omega} \times [0, T]$ ,  $\Omega \times (0, T]$ ,  $\bar{\Omega}$  y  $\Omega$ .

y

$$m = \min\{f, a, b\} = \text{mínimo valor de } u \text{ en } \Gamma.$$

Entonces

$$u(x, t) \geq m, \quad 0 < x < L, \quad 0 < t \leq T.$$

O lo que es lo mismo

$$\min_{\substack{0 \leq x \leq L \\ 0 \leq t \leq T}} u(x, t) = \min_{(x, t) \in \Gamma} u(x, t), \quad \text{ó} \quad \min_{\bar{\Omega} \times [0, T]} u = \min_{\Gamma} u.$$

Este corolario se demuestra aplicando el principio del máximo a  $-u$ , observando que  $\max(-u) = -\min u$ ,  $\max(-a) = -\min a$ , etc.

**Ejemplo 8.7.** Los principios del máximo y del mínimo se pueden utilizar para deducir *cotas ajustadas* de la solución aún cuando la misma no pueda calcularse exactamente. Por ejemplo, si  $u(x, t)$  es la solución de

$$\begin{cases} u_t = 9u_{xx}, & 0 < x < 3, \quad t > 0 \\ u(0, t) = 0, \quad u(3, t) = 0 & t > 0 \\ u(x, 0) = \frac{x^4(x-3)^4}{100}, & 0 < x < 3, \end{cases}$$

entonces  $u(x, t)$  es siempre un número entre 0 y el máximo del dato inicial. Observemos que el dato inicial  $\frac{x^4(x-3)^4}{100}$  es simétrico en el intervalo  $[0, 3]$  y positivo, y que su máximo se alcanza en el punto medio del intervalo. Reemplazando  $x = 1,5$  en la fórmula obtenemos que el máximo del dato inicial es  $\frac{1,5^8}{100} \approx 0,25629$ . Por lo tanto, deducimos que

$$0 \leq u(x, t) \leq 0,25629, \quad 0 < x < 3, \quad t > 0.$$

Una consecuencia importante de los principios del máximo y del mínimo es el siguiente teorema.

**Teorema 8.8** (Dependencia continua de las CI y las CB). Sean  $u^1$  y  $u^2$  soluciones de los problemas

$$\begin{cases} u_t^i - ku_{xx}^i = 0, & 0 < x < L, \quad 0 < t < T \\ u^i(0, t) = a^i(t), \quad u^i(L, t) = b^i(t) & 0 < t < T \\ u^i(x, 0) = f^i(x), & 0 < x < L, \end{cases}, \quad i = 1, 2.$$

Si para algún error  $\epsilon > 0$  se cumple que

$$\begin{aligned} |f_1(x) - f_2(x)| &\leq \epsilon, & 0 < x < L \\ |a_1(t) - a_2(t)| &\leq \epsilon, & 0 < t < T \\ |b_1(t) - b_2(t)| &\leq \epsilon, & 0 < t < T \end{aligned}$$

entonces

$$|u_1(x, t) - u_2(x, t)| \leq \epsilon, \quad 0 < x < L, \quad 0 < t < T.$$

*Demostración.* La demostración consiste en aplicar los principios del máximo y mínimo a  $v(x, t) = u^1(x, t) - u^2(x, t)$ . La función  $v(x, t)$  así definida es solución de

$$\begin{aligned} v_t - kv_{xx} &= 0, & 0 < x < L, \quad 0 < t < T \\ v(0, t) &= a^1(t) - a^2(t), \quad v(L, t) = b^1(t) - b^2(t) & 0 < t < T \\ v(x, 0) &= f^1(x) - f^2(x), & 0 < x < L. \end{aligned}$$

Por otro lado, las hipótesis sobre  $f^i$ ,  $a^i$ ,  $b^i$  implican que

$$\begin{aligned} -\epsilon &\leq \min_{0 \leq x \leq L} f^1(x) - f^2(x) \leq \max f^1(x) - f^2(x) \leq \epsilon, \\ -\epsilon &\leq \min_{0 \leq t \leq T} a^1(t) - a^2(t) \leq \max a^1(t) - a^2(t) \leq \epsilon, \\ -\epsilon &\leq \min_{0 \leq t \leq T} b^1(t) - b^2(t) \leq \max b^1(t) - b^2(t) \leq \epsilon. \end{aligned}$$

Por lo tanto, aplicando los principios del máximo y del mínimo a  $v(x, t)$  obtenemos

$$-\epsilon \leq v(x, t) = u^1(x, t) - u^2(x, t) \leq \epsilon, \quad 0 < x < T, \quad 0 < t < T.$$

□

**Observación 8.9.** El último teorema es muy importante, pues nos dice que si disponemos de datos iniciales y de borde aproximados (como los obtenidos por medición), entonces la solución del problema está igualmente aproximada a la solución con los datos exactos.

### 8.2.3. Demostración del principio del máximo

En esta sección procedemos a demostrar el Teorema 8.4, conocido como *Principio del Máximo*. Si bien el resultado es obvio si uno piensa en temperaturas y desde el punto de vista físico, es interesante ver qué propiedades de la física observables u *obvias* pueden deducirse del modelo matemático.

Demostremos primero la siguiente proposición, que nos da el principio del máximo en un caso particular en el que hay una fuente constantemente negativa.

**Proposición 8.10.** *Sea  $v(x, t)$  una solución del problema*

$$v_t - kv_{xx} = -c, \quad 0 < x < L, \quad 0 < t < T \quad (8.8)$$

con  $c$  una constante positiva y un tiempo final  $T > 0$  dado. Entonces

$$\max_{(x,t) \in \bar{\Omega} \times [0, T]} v(x, t) = \max_{(x,t) \in \Gamma} v(x, t),$$

donde  $\Gamma$  es la frontera parabólica (ver Figura 8.2).

*Demostración.* Sea  $M = \max_{(x,t) \in \Gamma} v(x, t)$  y sea  $M_0 = \max_{(x,t) \in \bar{\Omega} \times [0, T]} v(x, t)$ . Es obvio que  $M \leq M_0$  porque  $\Gamma \subset \bar{\Omega} \times [0, T]$ . Para probar el teorema debemos concluir que  $M_0 \leq M$ . Supongamos entonces que  $M_0 > M$  y veamos que esto no es posible.

Sea  $(x_0, t_0)$  el punto del dominio espacio temporal  $\bar{\Omega} \times [0, T]$  donde se alcanza el máximo  $M_0$ . Como este máximo es mayor estricto que el máximo  $M$  que se alcanza sobre  $\Gamma$  resulta que  $(x_0, t_0) \notin \Gamma$ , es decir,

$$0 < x_0 < L, \quad \text{y} \quad 0 < t_0 \leq T.$$

Observamos ahora que  $M_0$  es también el máximo de  $v$  a lo largo de los segmentos (coordinados)  $H = \{(x, t_0) : 0 < x < L\}$  y  $V = \{(x_0, t) : 0 < t \leq T\}$ ; ver Figura 8.3.

Como el máximo sobre el segmento  $H$  se da en un punto interior (que no es extremo) resulta que  $v_x(x_0, t_0) = 0$  y  $v_{xx}(x_0, t_0) \leq 0$ . Por otro lado, como el máximo sobre el segmento  $V$  se da en un  $t_0$  que podría ser igual a  $T$ , solo podemos decir que  $v_t(x_0, t_0) \geq 0$ , pero entonces

$$v_t(x_0, t_0) - kv_{xx}(x_0, t_0) \geq 0,$$

lo cual contradice la hipótesis de que  $v$  es solución de (8.8). Esta contradicción nos dice que no es posible que  $M_0 > M$ , y luego  $M_0 \leq M$ . Como ya sabíamos que  $M \leq M_0$  concluimos que  $M = M_0$ .  $\square$

*Demostración del Teorema 8.4.* Supongamos ahora que  $u(x, t)$  satisface las hipótesis del Teorema 8.4. Para  $c > 0$  (arbitrario) definimos  $v(x, t) = u(x, t) - ct$ . Entonces  $v_t = k v_{xx} - c$  o, lo que es lo mismo

$$v_t(x, t) - kv_{xx}(x, t) = -c.$$

Por la Proposición 8.10, para cada  $(x, t) \in \Omega \times (0, T]$

$$u(x, t) - ct = v(x, t) \leq \max_{\Gamma} v \leq \max_{\Gamma} u,$$

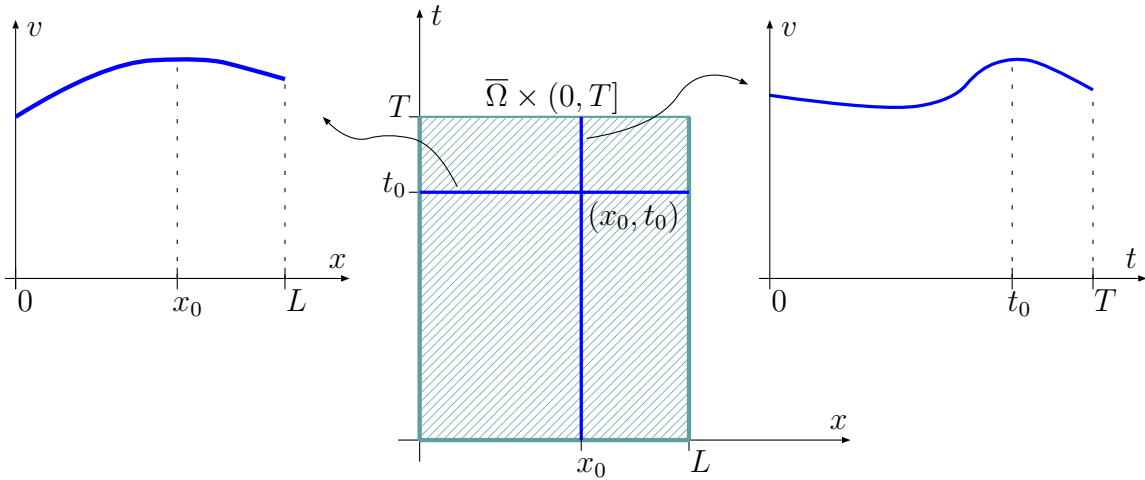


Figura 8.3: Si el máximo de  $v$  está en  $(x_0, t_0)$  entonces  $v$  tiene un máximo en  $x_0$  sobre el segmento horizontal  $t = t_0$  y un máximo en  $t_0$  sobre el segmento vertical  $x = x_0$ . Luego  $v_x(x_0, t_0) = 0$ ,  $v_{xx}(x_0, t_0) \leq 0$  y  $v_t(x_0, t_0) \geq 0$ .

porque  $v(x, t) = u(x, t) - ct \leq u(x, t)$ . Tomando límite cuando  $c \rightarrow 0^+$  a la izquierda de la última expresión obtenemos que para cada  $(x, t) \in \Omega \times (0, T]$

$$u(x, t) \leq \max_{\Gamma} u.$$

□

El Teorema 8.4 se conoce también como *Principio del máximo débil*. Existe un principio del máximo **fuerte** que enunciamos a continuación, cuya demostración queda fuera del alcance de este curso (puede encontrarse en [Bleecker-Csordas 1996, Chapter 3]).

**Teorema 8.11** (Principio del máximo fuerte). *Bajo las hipótesis del Teorema 8.4, no existe ningún  $(x_0, t_0) \in \Omega \times (0, T]$  tal que  $u(x_0, t_0) = M := \max_{\Gamma} u$ , a menos que  $u$  sea constante en  $[0, L] \times [0, t_0]$ , y en ese caso  $f \equiv a \equiv b \equiv u \equiv M$  para  $0 \leq x \leq L$  y  $0 \leq t \leq t_0$ .*

### 8.3. Solución con CB Dirichlet homogéneas

Consideramos el siguiente problema

$$\begin{aligned} \text{EDP:} \quad & \frac{\partial u}{\partial t} = k \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 < x < L, \quad t > 0, \\ \text{CB:} \quad & \begin{cases} u(0, t) = 0, \\ u(L, t) = 0, \end{cases} \quad t > 0, \\ \text{CI:} \quad & u(x, 0) = f(x), \quad 0 < x < L. \end{aligned} \tag{8.9}$$

Estamos interesados en poder predecir cómo cambia la propiedad intensiva  $u(x, t)$  (temperatura o densidad de masa de un compuesto), representada en el dato inicial  $f(x)$ , a medida que transcurre el tiempo.

El **método de separación de variables**, consiste esencialmente en buscar soluciones del problema que tengan forma de producto

$$u(x, t) = \phi(x)G(t), \quad (8.10)$$

donde  $\phi(x)$  es función solo de la variable  $x$  y  $G(t)$  es función solo de la variable  $t$ . La función  $u(x, t)$ , que es la candidata a solución, dada en (8.10) debe satisfacer la ecuación en derivadas parciales lineal homogénea EDP y las condiciones de borde CB de (8.9). Por el momento ignoraremos la condición inicial, pues veremos que en general la **solución producto** (8.10) no satisface la condición inicial. Más adelante veremos qué se debe hacer para encontrar una solución que la satisfaga. En principio:

Buscamos todas las soluciones posibles que sean producto de una función de  $x$  y una de  $t$  y que satisfagan la ecuación diferencial y las condiciones de borde homogéneas.

Es claro que la función  $u \equiv 0$  es solución de la ecuación diferencial y satisface las condiciones de borde. Esta solución se conoce como *solución trivial*, y está siempre presente. Tengamos pues en mente que estamos buscando soluciones producto no-triviales.

Seamos francos desde el comienzo, no existe ninguna razón clara por la que elegimos la forma (8.10). Daniel Bernoulli inventó esta técnica en los 1700s, y *funciona*, como ya veremos.

Supongamos entonces que  $u(x, t) = \phi(x)G(t)$  ya es una solución de la ecuación diferencial que también satisface las condiciones de borde. Veamos qué deben satisfacer  $\phi$  y  $G$  para que esto sea posible. Observemos que usando la forma (8.10) se tiene que

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, t) = \phi(x) \frac{dG(t)}{dt}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) = \frac{d^2 \phi(x)}{dx^2} G(t).$$

En consecuencia la ecuación de difusión (8.9) implica que

$$\phi(x) \frac{dG(t)}{dt} = k \frac{d^2 \phi(x)}{dx^2} G(t). \quad (8.11)$$

Ahora nos damos cuenta de que podemos “*separar variables*” dividiendo ambos miembros de (8.11) por el producto  $\phi(x)G(t)$ :

$$\frac{1}{G(t)} \frac{dG(t)}{dt} = k \frac{1}{\phi(x)} \frac{d^2 \phi(x)}{dx^2}.$$

Se ve que las variables han sido “*separadas*” en el sentido que el lado izquierdo es solo función de la variable  $t$  y el lado derecho es solo función de la variable  $x$ . Podemos continuar trabajando con esta expresión, pero es *conveniente* dividir también por  $k$ , y luego

$$\underbrace{\frac{1}{kG} \frac{dG}{dt}}_{\text{función de } t} = \underbrace{\frac{1}{\phi} \frac{d^2 \phi}{dx^2}}_{\text{función de } x}. \quad (8.12)$$

¿Cómo es posible que una función solamente dependiente de  $t$  sea igual a una función que depende solamente de  $x$ ? La única posibilidad es que ambas expresiones sean constantes

e independientes tanto de  $x$  como de  $t$ . Y por la igualdad deben ser iguales a la misma constante:

$$\frac{1}{kG} \frac{dG}{dt} = \frac{1}{\phi} \frac{d^2\phi}{dx^2} = -\lambda, \quad (8.13)$$

donde  $\lambda$  es una constante arbitraria conocida como **constante de separación**. En un momento explicaremos la aparición del misterioso signo menos, que fue introducido solo por conveniencia.

La ecuación (8.13) equivale a dos ecuaciones diferenciales ordinarias, una para  $G(t)$  y otra para  $\phi(x)$ :

$$\frac{d^2\phi}{dx^2} = -\lambda\phi \quad (8.14)$$

$$\frac{dG}{dt} = -\lambda kG. \quad (8.15)$$

Tenemos ahora **tres** incógnitas:  $\phi$ ,  $G$ , y  $\lambda$ . Para hallar las soluciones producto (8.10) debemos resolver las dos ecuaciones diferenciales ordinarias que acabamos de deducir, y ver para qué constantes  $\lambda$  estas soluciones **no dan la solución trivial**.

Repetimos que  $\lambda$  es constante, y es la misma en ambas ecuaciones (8.14) y (8.15). Las soluciones producto también deben satisfacer las dos condiciones de borde. Por ejemplo,  $u(0, t) = 0$  implica que  $\phi(0)G(t) = 0$ . Hay aquí dos posibilidades. O bien  $G(t) \equiv 0$ , o  $\phi(0) = 0$ . Si  $G(t) \equiv 0$ , entonces  $u \equiv 0$  y obtuvimos la solución trivial. Como estamos buscando soluciones no-triviales, descartamos este caso y suponemos  $G(t) \not\equiv 0$ . Si  $G(t) \not\equiv 0$ , es necesario que

$$\phi(0) = 0. \quad (8.16)$$

Del mismo modo, observando la condición de borde  $u(L, t) = 0$ , obtenemos que

$$\phi(L) = 0. \quad (8.17)$$

Los factores  $\phi$  y  $G$  intervinientes en las soluciones producto, además de satisfacer dos ecuaciones diferenciales ordinarias (8.14) y (8.15), deben satisfacer las condiciones de borde (8.16) y (8.17).

**Conclusión:** para encontrar las soluciones de variables separables  $u(x, t) = \phi(x)G(t)$ , debemos encontrar las ternas  $(\phi, G, \lambda)$  para las cuales se satisfagan las siguientes ecuaciones simultáneamente:

$$\begin{aligned} \frac{d^2\phi}{dx^2} &= -\lambda\phi, & \phi(0) &= 0, & \phi(L) &= 0, \\ \frac{dG}{dt} &= -\lambda kG. \end{aligned}$$

### 8.3.1. Ecuación dependiente del tiempo

La ventaja del método de separación de variables es que transforma una ecuación en derivadas parciales, que no sabemos resolver, en dos ecuaciones diferenciales ordinarias.

Las condiciones de borde imponen dos condiciones en la ecuación diferencial ordinaria que depende de  $x$ . La ecuación que depende del tiempo (8.15) no tiene (aún) ninguna condición. Solo  $\frac{dG}{dt} = -\lambda kG$ . Resolvámosla antes de resolver la otra. Esta ecuación es una ecuación de primer orden con *coeficientes constantes*, cuya solución general es

$$G(t) = c e^{-\lambda kt}. \quad (8.18)$$

Recordemos que  $\lambda$  es la constante de separación, que por el momento pareciera que puede tomar cualquier valor. Veremos a continuación que  $\lambda$  solo puede tomar ciertos valores.

### 8.3.2. Problema a valores en el borde

La parte dependiente de la variable espacial  $x$  de la solución producto,  $\phi(x)$ , satisface una ecuación diferencial ordinaria (EDO) con dos condiciones de borde homogéneas:

$$\begin{aligned} \frac{d^2\phi}{dx^2} &= -\lambda\phi \\ \phi(0) &= 0 \\ \phi(L) &= 0. \end{aligned} \quad (8.19)$$

Llamamos a (8.19) **problema a valores en el borde** para ecuaciones diferenciales ordinarias. En los cursos donde se enseña ecuaciones diferenciales ordinarias, solo se estudian problemas a valores **iniciales**. Por ejemplo (pensando en la segunda ley de Newton), resolvemos ecuaciones diferenciales ordinarias de segundo orden ( $m \frac{d^2y}{dt^2} = F$ ) sujetas a dos condiciones iniciales ( $y(0)$  y  $\frac{dy}{dt}(0)$  dadas) *ambas en el mismo instante de tiempo* ( $t = 0$ ). Pero (8.19) es muy diferente. Es un problema a valores en el borde, pues las condiciones no se dan en el mismo lugar, sino en dos lugares diferentes,  $x = 0$  y  $x = L$ . No hay ninguna teoría simple que garantice que la solución existe o es única para este tipo de problemas. En particular, notamos que  $\phi(x) \equiv 0$  satisface la EDO y ambas condiciones de borde homogéneas, sin importar el valor de  $\lambda$ , aún para  $\lambda < 0$ . Esta solución se conoce con el nombre de **solución trivial** del problema a valores de borde. Como  $u(x, t) = \phi(x)G(t)$ , corresponde a  $u(x, t) \equiv 0$ , si las soluciones de (8.19) fueran únicas,  $\phi(x) \equiv 0$  sería la única solución; y no podríamos obtener soluciones no-triviales de una EDP lineal homogénea por el método de separación de variables. Afortunadamente sí existen otras soluciones de (8.19), aunque no para *cualquier* valor de  $\lambda$  sino *solo para algunos*. Veremos a continuación que hay ciertos valores de  $\lambda$ , llamados **autovalores** de (8.19), para los cuales existen soluciones no-triviales  $\phi(x)$ . Una  $\phi(x)$  no-trivial, correspondiente a algún valor de  $\lambda$  se llama **autofunción** correspondiente al autovalor  $\lambda$ .

Un número  $\lambda$  se llama **autovalor** de la ecuación

$$\frac{d^2\phi}{dx^2} = -\lambda\phi, \quad \phi(0) = 0, \quad \phi(L) = 0, \quad (8.20)$$

si y solo si existe una función  $\phi \not\equiv 0$  que satisface (8.20). Dicha función  $\phi$  se llama **autofunción** correspondiente a  $\lambda$ .

Tratemos de determinar los autovalores  $\lambda$  y sus correspondientes autofunciones. En otras palabras, ¿para qué valores de  $\lambda$  existe solución no-trivial de (8.19)? Resolvamos (8.19) directamente. La ecuación es de segundo orden y homogénea con coeficientes constantes: usualmente se obtienen dos soluciones independientes en forma de exponenciales  $\phi(x) = e^{rx}$ . Sustituyendo esta exponencial en la ecuación diferencial obtenemos el polinomio característico  $r^2 = -\lambda$ . Las soluciones correspondientes a las dos raíces tienen diferentes propiedades dependiendo del valor de  $\lambda$ . Existen tres casos:

1.  $\lambda > 0$ : las dos raíces son puramente imaginarias y son los números complejos  $r = \pm i\sqrt{\lambda}$ .
2.  $\lambda = 0$ : las dos raíces son nulas  $r = 0$ .
3.  $\lambda < 0$ : las dos raíces son reales y opuestas  $r = \pm\sqrt{-\lambda}$ .

**Autovalores y autofunciones para  $\lambda > 0$ .** Consideremos primero el caso  $\lambda > 0$ . El problema a valores de frontera tiene entonces las soluciones exponenciales con exponentes imaginarios  $e^{\pm i\sqrt{\lambda}x}$ . En este caso las soluciones son oscilantes, y si queremos soluciones *reales* linealmente independientes, éstas son  $\cos\sqrt{\lambda}x$  y  $\sin\sqrt{\lambda}x$ . Entonces, la solución general de (8.19) en el caso  $\lambda > 0$  es

$$\phi(x) = c_1 \cos\sqrt{\lambda}x + c_2 \sin\sqrt{\lambda}x. \quad (8.21)$$

Si exigimos a la solución general, que cumpla las condiciones de borde, obtenemos

$$0 = \phi(0) = c_1 \cos\sqrt{\lambda}0 + c_2 \sin\sqrt{\lambda}0 = c_1.$$

Luego  $c_1 = 0$  y  $\phi(x) = c_2 \sin\sqrt{\lambda}x$ . Para satisfacer la condición de frontera en  $x = L$ , es necesario que

$$0 = c_2 \sin\sqrt{\lambda}L.$$

Si  $c_2 = 0$ , obtenemos la solución trivial  $\phi(x) \equiv 0$  que no nos interesa. Si  $c_2 \neq 0$  entonces tenemos que buscar todos los valores de  $\lambda$  para los que

$$\sin\sqrt{\lambda}L = 0.$$

En otras palabras,  $\sqrt{\lambda}L$  debe ser un cero de la función seno, es decir un múltiplo entero de  $\pi$ :  $\sqrt{\lambda}L = n\pi$ . Como hemos supuesto  $\lambda > 0$ ,  $n$  toma los valores  $1, 2, \dots$ . Los **autovalores**  $\lambda$  son entonces

$$\lambda = \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (8.22)$$

La autofunción correspondiente al autovalor  $\lambda = \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2$  es

$$\phi(x) = c_2 \sin\sqrt{\lambda}x = c_2 \sin\frac{n\pi x}{L} \quad (8.23)$$

donde  $c_2$  es una constante arbitraria. A menudo elegimos *una* autofunción seleccionando un valor no-nulo para  $c_2$ , por ejemplo  $c_2 = 1$ . Debemos observar que cualquier autofunción puede ser multiplicada por una constante arbitraria y seguir siendo **autofunción del mismo autovalor** pues la ecuación es lineal y homogénea.



**Autovalores y autofunciones para  $\lambda = 0$ .** Ahora determinaremos si  $\lambda = 0$  es un autovalor de (8.19). El caso  $\lambda = 0$  es especial, la solución general en este caso es

$$\phi(x) = c_1 + c_2x.$$

Para determinar si  $\lambda = 0$  es un autovalor, debemos aplicar las condiciones de borde a la solución general  $\phi$ . La condición  $\phi(0) = 0$  implica  $c_1 = 0$  y luego  $\phi(x) = c_2x$ . La condición  $\phi(L) = 0$  implica  $c_2L = 0$ . Como la longitud  $L$  es positiva,  $c_2 = 0$  y por lo tanto  $\phi(x) \equiv 0$ , la solución trivial. En este caso, decimos que  $\lambda = 0$  **no** es un autovalor. Debemos estar atentos pues  $\lambda = 0$  no es un autovalor en este caso, pero sí puede serlo en otros casos, por ejemplo cuando consideremos CB de tipo Neumann (ver ejercicio 8.15).

**Autovalores y autofunciones para  $\lambda < 0$ .** ¿Existen autovalores negativos? Si  $\lambda < 0$ , la solución de

$$\frac{d^2\phi}{dx^2} = -\lambda\phi$$

no es difícil, pero debemos ser cuidadosos. Las raíces del polinomio característico son  $r = \pm\sqrt{-\lambda}$ , y por lo tanto las soluciones son  $e^{\sqrt{-\lambda}x}$  y  $e^{-\sqrt{-\lambda}x}$ . La solución general es

$$\phi(x) = c_1e^{\sqrt{-\lambda}x} + c_2e^{-\sqrt{-\lambda}x}. \quad (8.24)$$

A menudo, se utilizan también las funciones hiperbólicas en lugar de estas exponenciales. Como repaso, las definiciones de las funciones hiperbólicas son

$$\cosh z = \frac{e^z + e^{-z}}{2} \quad \sinh z = \frac{e^z - e^{-z}}{2},$$

simplemente combinaciones lineales de exponenciales. Notemos que  $\sinh 0 = 0$  y  $\cosh 0 = 1$  (análogo a lo que ocurre con las funciones trigonométricas). También notemos que

$$\frac{d}{dz} \cosh z = \sinh z \quad \frac{d}{dz} \sinh z = \cosh z,$$

similarmente a lo que ocurre con las trigonométricas, pero más fáciles de recordar porque no cambia el signo al derivar. Otras propiedades importantes son las siguientes:

- $\cosh z \neq 0$  para todo  $z$ ;
- $\sinh z = 0$  solo si  $z = 0$ .

Como ambas funciones hiperbólicas son sumas de exponenciales y son independientes, la solución general también se puede expresar como

$$\phi(x) = c_1 \cosh \sqrt{-\lambda}x + c_2 \sinh \sqrt{-\lambda}x, \quad (8.25)$$

una forma equivalente a (8.24). Aplicamos ahora las condiciones de borde a la solución general (8.25). La condición  $\phi(0) = 0$  implica  $c_1 = 0$  y luego  $\phi(x) = c_2 \sinh \sqrt{-\lambda}x$ . La condición  $\phi(L) = 0$  implica  $c_2 \sinh \sqrt{-\lambda}L = 0$ . Pero  $\sinh z = 0$  solo para  $z = 0$  y entonces, como  $\lambda \neq 0$  y  $L > 0$ , obtenemos  $c_2 = 0$  quedándonos nuevamente la solución trivial. Por lo tanto **no hay autovalores negativos para este problema.**

**Autofunciones - Resumen.** Resumimos ahora lo que hemos concluido acerca de los autovalores y autofunciones del problema

$$\begin{aligned}\frac{d^2\phi}{dx^2} &= -\lambda\phi \\ \phi(0) &= 0 \\ \phi(L) &= 0.\end{aligned}$$

Los autovalores  $\lambda$  son todos positivos y dados por

$$\lambda_n = \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

y las correspondientes autofunciones son

$$\phi_n(x) = \text{sen} \frac{n\pi x}{L}.$$

### 8.3.3. Soluciones producto y el principio de superposición

Juntando lo que hemos obtenido en las dos últimas secciones, vemos que:

Si  $u(x, t) = \phi(x)G(t)$  satisface

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad u(0, t) = 0, \quad u(L, t) = 0,$$

entonces

$$\phi(x) = c_2 \text{sen} \sqrt{\lambda}x, \quad G(t) = ce^{-\lambda kt}, \quad y \quad \lambda = \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Escrito de otra forma,

$$\phi(x) = c_2 \text{sen} \frac{n\pi x}{L}, \quad G(t) = ce^{-\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 kt}, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Por lo tanto, todas las soluciones producto de la ecuación de difusión (8.9) que cumplen las CB son

$$u(x, t) = b \text{sen} \frac{n\pi x}{L} e^{-\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 kt}, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

donde  $b$  es una constante arbitraria. Es decir, para cada número real  $b$  y cada entero positivo  $n$ , la expresión anterior es una solución de la ecuación de difusión con condiciones de borde de tipo Dirichlet homogéneas.

**Ejemplo 8.12.** Las siguientes funciones son soluciones de la ecuación de difusión con condiciones de borde de  $u$  prescrita igual a cero:

$$\begin{aligned}u_1(x, t) &= \text{sen} \frac{3\pi x}{L} e^{-\frac{9\pi^2}{L^2} kt} \\ u_2(x, t) &= 4,5 \text{sen} \frac{\pi x}{L} e^{-\frac{\pi^2}{L^2} kt}.\end{aligned}$$

Y como la ecuación y las condiciones de borde que estamos considerando son lineales y homogéneas, también

$$u_3(x, t) = \operatorname{sen} \frac{3\pi x}{L} e^{-\frac{9\pi^2}{L^2} kt} + 4,5 \operatorname{sen} \frac{\pi x}{L} e^{-\frac{\pi^2}{L^2} kt}$$

es una solución.

¿Qué condición inicial satisfacen estas tres soluciones? Basta reemplazar  $t$  por cero para ver que

$$\begin{aligned} u_1(x, 0) &= \operatorname{sen} \frac{3\pi x}{L} \\ u_2(x, 0) &= 4,5 \operatorname{sen} \frac{\pi x}{L} \\ u_3(x, 0) &= \operatorname{sen} \frac{3\pi x}{L} + 4,5 \operatorname{sen} \frac{\pi x}{L}. \end{aligned}$$

No parece haber mucha libertad para elegir condiciones iniciales generales. Nos ocuparemos de este tema a continuación.

**Problema a valores iniciales.** Supongamos como ejemplo que queremos resolver el siguiente problema a valores iniciales:

$$\begin{aligned} \text{EDP:} \quad & \frac{\partial u}{\partial t} = k \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ \text{CB:} \quad & u(0, t) = 0 \\ & u(L, t) = 0 \\ \text{CI:} \quad & u(x, 0) = 4 \operatorname{sen} \frac{3\pi x}{L}. \end{aligned}$$

La solución producto  $u(x, t) = b \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} e^{-(\frac{n\pi}{L})^2 kt}$  satisface la condición inicial  $u(x, 0) = b \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L}$ . Por lo tanto, eligiendo  $n = 3$  y  $b = 4$ , se satisface la condición inicial, y luego la solución es

$$u(x, t) = 4 \operatorname{sen} \frac{3\pi x}{L} e^{-(\frac{3\pi}{L})^2 kt}.$$

Se puede demostrar que este problema físico tiene una única solución, por lo que no importa el método utilizado para resolverlo. Siempre obtendríamos la misma.

**Principio de superposición.** Las soluciones producto son soluciones muy particulares, pues solo sirven cuando la condición inicial tiene la forma apropiada  $u(x, 0) = b \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L}$ . Sin embargo, este tipo de soluciones es muy útil también en muchas otras situaciones. Consideremos la misma EDP con las mismas condiciones de borde pero con la condición inicial

$$u(x, 0) = 4 \operatorname{sen} \frac{3\pi x}{L} + 1,7 \operatorname{sen} \frac{8\pi x}{L}.$$

La solución de este problema puede obtenerse sumando dos soluciones producto:

$$u(x, t) = 4 \operatorname{sen} \frac{3\pi x}{L} e^{-(\frac{3\pi}{L})^2 kt} + 1,7 \operatorname{sen} \frac{8\pi x}{L} e^{-(\frac{8\pi}{L})^2 kt}.$$

Inmediatamente vemos que esta función resuelve la EDP, las CB y también la CI.

**Superposición (extendida).** El principio de superposición puede extenderse para mostrar que si  $u_1, u_2, \dots, u_M$  son soluciones de un problema lineal homogéneo, entonces cualquier combinación lineal de ellas:

$$c_1 u_1 + c_2 u_2 + \dots + c_M u_M = \sum_{n=1}^M c_n u_n$$

es también una solución. Como sabemos del método de separación de variables que la función  $\text{sen} \frac{n\pi x}{L} e^{-\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 kt}$  es solución de la ecuación de difusión para todo entero  $n$  positivo, entonces cualquier combinación lineal de estas soluciones es también solución de la misma ecuación de difusión con las mismas condiciones de borde homogéneas. Por lo tanto

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^M b_n \text{sen} \frac{n\pi x}{L} e^{-\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 kt} \quad (8.26)$$

es solución de la ecuación de difusión (con condiciones de borde de tipo Dirichlet nulas) para cualquier  $M$  y cualesquiera valores de  $b_n$ . Entonces hemos ahora extendido la familia de soluciones. De *soluciones producto*, hemos pasado a **combinaciones lineales de soluciones producto**. Si en (8.26) tomamos  $t = 0$  vemos que

$$u(x, 0) = \sum_{n=1}^M b_n \text{sen} \frac{n\pi x}{L}.$$

Por lo que podemos resolver la ecuación de difusión para cualquier condición inicial de la forma

$$u(x, 0) = f(x) = \sum_{n=1}^M b_n \text{sen} \frac{n\pi x}{L}.$$

¿Qué hacemos si tenemos que resolver la ecuación de difusión con un dato inicial  $f(x)$  que no es de esta forma? La teoría de las *series de Fourier* (Capítulo 9) dice que:

1. Cualquier función  $f(x)$  (con algunas restricciones razonables) puede ser aproximada (en algún sentido) por combinaciones lineales de  $\text{sen} \frac{n\pi x}{L}$ .
2. La aproximación tal vez no será buena para  $M$  pequeño, pero mejora a medida que  $M$  crece.
3. Más aún, si consideramos el límite cuando  $M \rightarrow \infty$ , entonces la serie infinita converge a  $f(x)$ .

Afirmamos entonces que *cualquier* dato inicial  $f(x)$  se puede escribir como una *combinación lineal infinita* de  $\text{sen} \frac{n\pi x}{L}$ , conocida como **serie de Fourier**:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \text{sen} \frac{n\pi x}{L}. \quad (8.27)$$

Lo que es más importante es que la serie infinita correspondiente

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \text{sen} \frac{n\pi x}{L} e^{-\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 kt} \quad (8.28)$$

es solución de nuestra ecuación de difusión.

Por lo tanto, si queremos resolver la ecuación de difusión (8.9) para una función  $f$  dada, hace falta calcular los coeficientes  $b_n$  que hacen posible la igualdad (8.27). Dichos coeficientes  $b_n$  se denominan *coeficientes de Fourier* de  $f$ .

El cálculo de los coeficientes de Fourier en la serie de senos de  $f$  se basa en la siguiente observación:

$$\text{Para } n, m \text{ enteros positivos} \quad \int_0^L \sin \frac{n\pi x}{L} \sin \frac{m\pi x}{L} dx = \begin{cases} 0 & \text{si } n \neq m, \\ \frac{L}{2} & \text{si } n = m. \end{cases}$$

Observemos ahora que

$$\begin{aligned} \int_0^L f(x) \sin \frac{m\pi x}{L} dx &= \int_0^L \left( \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi x}{L} \right) \sin \frac{m\pi x}{L} dx \\ &= \int_0^L \sum_{n=1}^{\infty} \left( b_n \sin \frac{n\pi x}{L} \sin \frac{m\pi x}{L} \right) dx \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} b_n \int_0^L \sin \frac{n\pi x}{L} \sin \frac{m\pi x}{L} dx. \end{aligned}$$

Haciendo uso de la observación anterior vemos que todos los términos de esta serie son nulos excepto uno, aquel para el que  $n = m$ . Por lo tanto

$$\int_0^L f(x) \sin \frac{m\pi x}{L} dx = b_m \int_0^L \sin \frac{m\pi x}{L} \sin \frac{m\pi x}{L} dx = b_m \frac{L}{2}.$$

De esta manera, hemos podido *despejar*  $b_m$  de la fórmula (8.27) obteniendo que

$$b_m = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin \frac{m\pi x}{L} dx, \quad m = 1, 2, 3, \dots \quad (8.29)$$

**Ejemplo 8.13.** Hallar la solución de

$$\begin{cases} u_t = ku_{xx}, & 0 < x < L, & t > 0, \\ u(0, t) = 0, & u(L, t) = 0, & t > 0, \\ u(x, 0) = 1, & 0 < x < L, & \end{cases} \quad (8.30)$$

La solución de este problema está dada por

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n e^{-\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 kt} \sin \frac{n\pi x}{L},$$

siempre que los coeficientes  $b_n$  se elijan de modo que

$$1 = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi x}{L}, \quad 0 \leq x \leq L,$$

pues (8.30) es la ecuación de difusión (8.9) con  $f(x) \equiv 1$ .

Veamos entonces cuánto valen los coeficientes de Fourier de la función constante  $f(x) \equiv 1$ . Según la fórmula (8.29)

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{2}{L} \int_0^L \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} dx = \frac{2}{L} \left. \frac{-\cos \frac{n\pi x}{L}}{\frac{n\pi}{L}} \right|_0^L = -\frac{2}{L} \frac{L}{n\pi} \left[ \cos \frac{n\pi L}{L} - \cos 0 \right] \\ &= -\frac{2}{n\pi} [\cos n\pi - 1] = -\frac{2}{n\pi} \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ es par} \\ -2 & \text{si } n \text{ es impar} \end{cases} = \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ es par,} \\ \frac{4}{n\pi} & \text{si } n \text{ es impar.} \end{cases} \end{aligned}$$

Por lo tanto, la solución de (8.30) es

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n e^{-\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 kt} \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L}, \quad \text{con } b_n = \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ es par,} \\ \frac{4}{n\pi} & \text{si } n \text{ es impar.} \end{cases}$$

Utilizando un programa como el MATLAB u OCTAVE, o cualquier otro podemos graficar algunas curvas para entender un poco mejor.

Para graficar y ver un poco qué ocurre consideramos  $k = 1$  y  $L = 1$ .

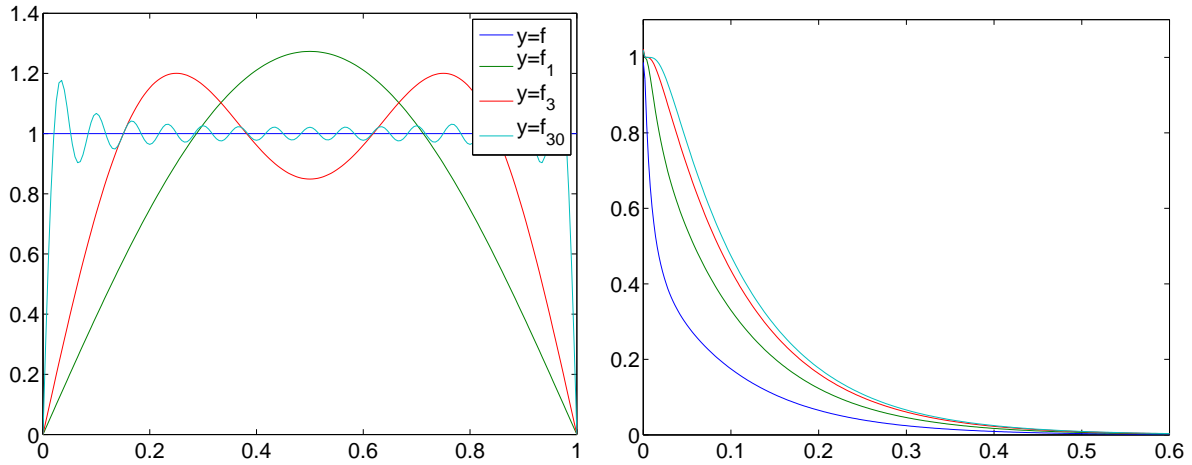


Figura 8.4: Gráfico de  $f \equiv 1$  y su aproximación por la suma de 1, 3 y 30 términos de su serie de Fourier de senos (izquierda). Gráfico de la solución aproximada  $u_{30}(x, t)$  en  $x = 0,125, x = 0,25, 0,375$  y  $x = 0,5$  para  $0 < t < 0,6$ .

En la Figura 8.4 (izquierda) vemos la función  $f$  (constantemente 1) y la aproximación de  $f$  que se obtiene sumando 1, 3 y 30 términos de la serie de Fourier de  $f$ . Es decir, graficamos

$$\begin{aligned} f(x) &= 1, & f_1(x) &= \sum_{n=1}^1 b_n \operatorname{sen} n\pi x = b_1 \operatorname{sen} \pi x, \\ f_3(x) &= \sum_{n=1}^3 b_n \operatorname{sen} n\pi x, & f_{30}(x) &= \sum_{n=1}^{30} b_n \operatorname{sen} n\pi x. \end{aligned}$$

La aproximación es bastante mala porque las condiciones de borde implican que

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} u(0, t) = 0 \neq \lim_{x \rightarrow 0^+} u(x, 0) = 1 \quad \text{y} \quad \lim_{t \rightarrow 0^+} u(L, t) = 0 \neq \lim_{x \rightarrow L^-} u(x, 0) = 1.$$

Cuando esto ocurre suele decirse que las CI y las CB son *incompatibles*. Sin embargo, si graficamos la solución para diferentes valores de  $t$ , a partir de  $f_{30}$ , vemos que se observa lo que se espera de la solución con condición inicial constantemente igual a 1.

En la Figura 8.5 (izquierda) vemos el gráfico de

$$u_{30}(x, t) = \sum_{n=1}^{30} b_n e^{-(n\pi)^2 t} \operatorname{sen} n\pi x,$$

como función de  $x$  para  $t = 0,01, 0,03, 0,05, 0,07, 0,09$  (también se grafica  $f(x) \equiv 1$  para referencia, y no se grafica  $u_{30}(x, 0)$ ). Se ve que la evolución es muy rápida en el intervalo de tiempo  $[0, 0,01]$  así que graficamos  $u(x, t)$  para  $t = 0,002, 0,004, 0,006, 0,008, 0,01$  en el gráfico de la derecha.

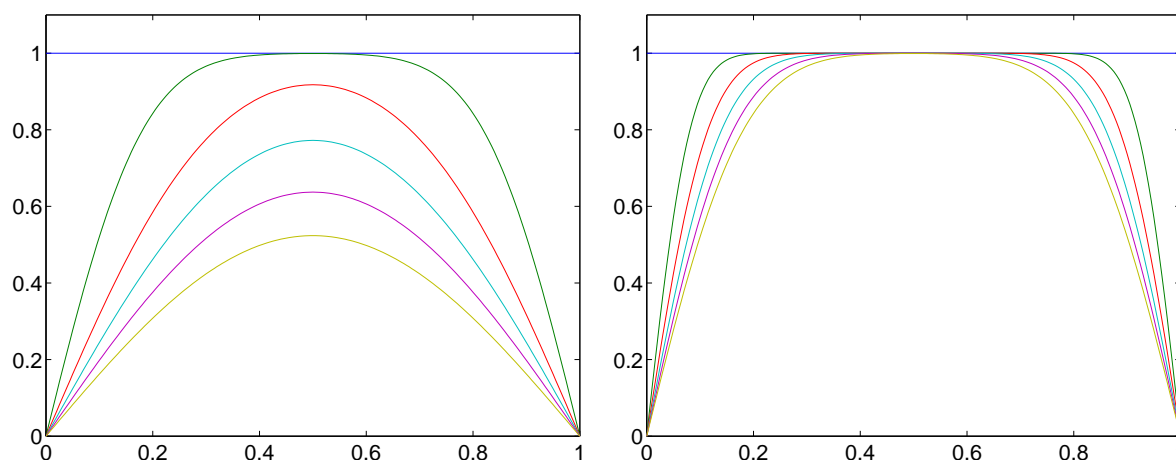


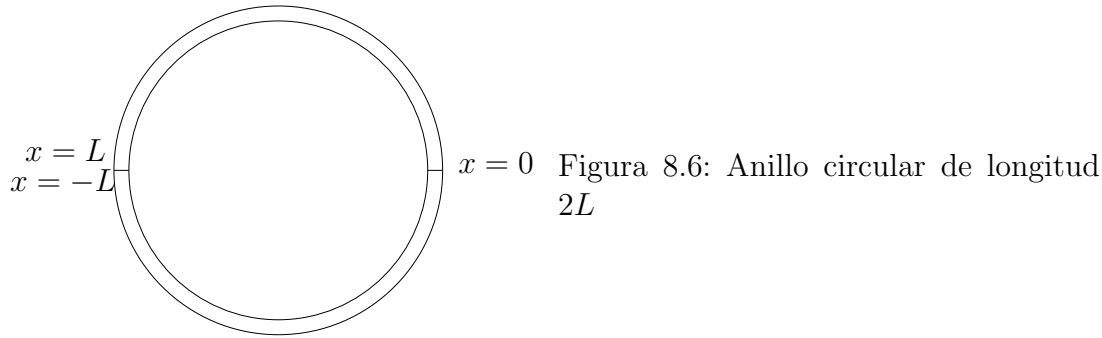
Figura 8.5: Gráfico de  $u(x, t)$  para  $0 < x < 1$  y  $t = 0,01, 0,03, 0,05, 0,07, 0,09$  (izquierda). Gráfico de  $u(x, t)$  para  $0 < x < 1$  y  $t = 0,002, 0,004, 0,006, 0,008, 0,01$  (derecha).

En los problemas se pide que usted haga lo mismo para diferentes funciones  $f$  y problemas con otras condiciones de borde.

## 8.4. Solución del problema de conducción del calor en un anillo circular

Hemos investigado un problema de difusión cuyas autofunciones son senos y en los problemas se verán ejemplos cuyas autofunciones son cosenos. En esta sección ilustraremos un problema de difusión cuyas autofunciones son senos y cosenos.

Supongamos que un alambre delgado se curva para formar una circunferencia, como en la Figura 8.6. Por cuestiones de conveniencia supongamos que el alambre tiene longitud  $2L$ , es decir,  $L$  es la *mitad* de la longitud del alambre. Como la circunferencia tiene una longitud de  $2\pi r$ , el radio es  $r = \frac{2L}{2\pi} = \frac{L}{\pi}$ . Si el alambre es suficientemente delgado y está térmicamente aislado, es razonable suponer que la temperatura es constante en cada sección transversal del alambre curvo. En esta situación la temperatura del alambre debe



satisfacer una ecuación del calor unidimensional, donde  $x$  representa la longitud de arco a lo largo del alambre:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}. \quad (8.31)$$

Nuevamente suponemos que el alambre tiene propiedades térmicas constantes y no hay fuentes de calor. Es conveniente para simplificar algunos cálculos, suponer que la longitud de arco  $x$  varía de  $-L$  a  $L$  (en lugar de variar de 0 a  $2L$ ).

Supongamos que el alambre está perfectamente conectado a sí mismo en los extremos ( $x = -L$  a  $x = L$ ). Allí deberían cumplirse las condiciones de contacto térmico perfecto: La temperatura  $u(x, t)$  debería ser continua

$$u(-L, t) = u(L, t). \quad (8.32)$$

También el flujo de calor debería ser continuo, y como la conductividad térmica es constante, esto implica que la derivada con respecto a  $x$  de la temperatura es continua:

$$\frac{\partial u}{\partial x}(-L, t) = \frac{\partial u}{\partial x}(L, t). \quad (8.33)$$

Las dos condiciones de borde para la ecuación en derivadas parciales son entonces (8.32) y (8.33). La condición inicial es una función dada

$$u(x, 0) = f(x). \quad (8.34)$$

El problema matemático consiste luego en la EDP lineal homogénea (8.31), con condiciones de borde lineales y homogéneas (8.32) y (8.33). Es por lo tanto plausible la utilización del método de separación de variables.

Proponemos una solución producto  $u(x, t) = \phi(x)G(t)$ . Luego obtenemos para  $\phi$  y  $G$  las ecuaciones diferenciales ordinarias

$$\frac{dG}{dt} = -\lambda k G \quad \frac{d^2 \phi}{dx^2} = -\lambda \phi.$$

Las condiciones de borde que nos interesan ahora implican que la función  $\phi$  debe satisfacer  $\phi(-L) = \phi(L)$  y  $\frac{d\phi}{dx}(-L) = \frac{d\phi}{dx}(L)$ . La constante de separación  $\lambda$  se determina entonces encontrando todos los  $\lambda$  para los que el problema a valores en el borde:

$$\frac{d^2 \phi}{dx^2} = -\lambda \phi, \quad \phi(-L) = \phi(L) \quad \frac{d\phi}{dx}(-L) = \frac{d\phi}{dx}(L),$$



tiene solución no-trivial. Las condiciones de borde con que nos encontramos se denominan comúnmente **condiciones de borde periódicas** porque aunque el problema se piensa definido en  $-L < x < L$ , se puede pensar que está definido periódicamente para todo  $x \in \mathbb{R}$ ; la temperatura será periódica ( $x = x_0$  es el mismo punto físico que  $x = x_0 + 2L$ , y por lo tanto tendrá la misma temperatura). Si  $\lambda > 0$ , la solución general del problema para  $\phi$  es

$$\phi(x) = c_1 \cos \sqrt{\lambda}x + c_2 \sen \sqrt{\lambda}x.$$

La condición de borde  $\phi(-L) = \phi(L)$  implica que

$$c_1 \cos \sqrt{\lambda}(-L) + c_2 \sen \sqrt{\lambda}(-L) = c_1 \cos \sqrt{\lambda}L + c_2 \sen \sqrt{\lambda}L$$

Como el coseno es una función par,  $\cos \sqrt{\lambda}(-L) = \cos \sqrt{\lambda}L$ , y como el seno es impar  $\sen \sqrt{\lambda}(-L) = -\sen \sqrt{\lambda}L$ . Se sigue entonces que  $\phi(-L) = \phi(L)$  se satisface cuando

$$c_1 \cos \sqrt{\lambda}L - c_2 \sen \sqrt{\lambda}L = c_1 \cos \sqrt{\lambda}L + c_2 \sen \sqrt{\lambda}L$$

y ésta igualdad es válida si y solo si

$$c_2 \sen \sqrt{\lambda}L = 0. \tag{8.35}$$

Antes de resolver esta ecuación, analicemos la segunda condición de borde, que involucra a la derivada,

$$\frac{d\phi}{dx}(x) = \sqrt{\lambda} \left( -c_1 \sen \sqrt{\lambda}x + c_2 \cos \sqrt{\lambda}x \right).$$

Luego  $\frac{d\phi}{dx}(-L) = \frac{d\phi}{dx}(L)$  se cumple si

$$\sqrt{\lambda} \left( -c_1 \sen \sqrt{\lambda}(-L) + c_2 \cos \sqrt{\lambda}(-L) \right) = \sqrt{\lambda} \left( -c_1 \sen \sqrt{\lambda}L + c_2 \cos \sqrt{\lambda}L \right)$$

Usando nuevamente las propiedades de las funciones trigonométricas (que el coseno es par y el seno impar) obtenemos que  $\frac{d\phi}{dx}(-L) = \frac{d\phi}{dx}(L)$  si y solo si

$$c_1 \sqrt{\lambda} \sen \sqrt{\lambda}L = 0. \tag{8.36}$$

Ahora veamos qué implican las ecuaciones (8.35) y (8.36). Si  $\sen \sqrt{\lambda}L \neq 0$  entonces por (8.35)  $c_2 = 0$  y por (8.36)  $c_1 = 0$ , obteniendo la solución trivial. Luego, para obtener soluciones no-triviales debe cumplirse que

$$\sen \sqrt{\lambda}L = 0,$$

lo que determina los autovalores  $\lambda$ . Nuevamente obtenemos que

$$\lambda = \left( \frac{n\pi}{L} \right)^2, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Los autovalores obtenidos son los mismos que los de los casos anteriores (para eso hemos tomado el alambre de longitud  $2L$ ). Sin embargo, en este caso no hay restricciones adicionales sobre  $c_1$  ni  $c_2$ . Ambas constantes pueden tomar cualquier valor. Decimos en

este caso que ambas funciones  $\sin \frac{n\pi x}{L}$  y  $\cos \frac{n\pi x}{L}$  son autofunciones correspondientes al autovalor  $\lambda = (n\pi/L)^2$ ,

$$\phi(x) = \cos \frac{n\pi x}{L}, \quad \text{sen} \frac{n\pi x}{L}, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

En realidad, cualquier combinación lineal de estas funciones (para el mismo  $n$ ) es una autofunción del autovalor  $\lambda = (n\pi/L)^2$ . Pero debe entenderse siempre que las dos son autofunciones independientes. En conclusión, tenemos dos familias infinitas de soluciones producto de la ecuación diferencial:

$$u(x, t) = \cos \frac{n\pi x}{L} e^{-(\frac{n\pi}{L})^2 kt} \quad \text{y} \quad u(x, t) = \text{sen} \frac{n\pi x}{L} e^{-(\frac{n\pi}{L})^2 kt}, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Todas estas soluciones producto corresponden a  $\lambda > 0$ .

Analícemos el caso  $\lambda = 0$ : La solución general es  $\phi(x) = c_1 + c_2 x$ . La condición  $\phi(-L) = \phi(L)$  implica que

$$c_1 - c_2 L = c_1 + c_2 L,$$

lo que a su vez implica que  $c_2 = 0$ . Luego  $\phi(x) = c_1$  y  $\frac{d\phi}{dx}(x) \equiv 0$ , de modo que la segunda condición de borde  $\frac{d\phi}{dx}(0) = \frac{d\phi}{dx}(L)$  se cumple automáticamente. Vemos entonces que

$$\phi(x) = c_1,$$

cualquier constante, es una autofunción correspondiente al autovalor  $\lambda = 0$ . Las soluciones producto también son constantes en este caso pues  $e^0 = 1$ . Notemos que para  $\lambda = 0$  hay **solo una** autofunción linealmente independiente (todas las otras se obtienen multiplicándola por una constante). En cambio para cada autovalor positivo  $\lambda = (n\pi/L)^2$  hay dos autofunciones linealmente independientes,  $\sin \frac{n\pi x}{L}$  y  $\cos \frac{n\pi x}{L}$ . Nuevamente, no hay ningún autovalor  $\lambda < 0$  (¿por qué?).

**Conclusión:** Las soluciones producto para la conducción del calor en un alambre circular de longitud  $2L$  son:

$$\begin{aligned} u_n^a(x, t) &= a_n \cos \frac{n\pi x}{L} e^{-(\frac{n\pi}{L})^2 kt} & n = 1, 2, \dots, \\ u_n^b(x, t) &= b_n \text{sen} \frac{n\pi x}{L} e^{-(\frac{n\pi}{L})^2 kt} & n = 1, 2, \dots, \\ u_0(x, t) &= a_0, \end{aligned}$$

donde  $a_0, a_1, \dots, b_1, b_2, \dots$  son constantes arbitrarias.

Para lograr que se cumpla la condición inicial es necesario aplicar el principio de superposición. La solución más general que se obtiene por el método de separación de variables consiste de una combinación lineal arbitraria de las soluciones producto:

$$u(x, t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi x}{L} e^{-(\frac{n\pi}{L})^2 kt} + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \text{sen} \frac{n\pi x}{L} e^{-(\frac{n\pi}{L})^2 kt}. \quad (8.37)$$

La constante  $a_0$  es la solución producto correspondiente a  $\lambda = 0$ , mientras que **dos familias** de coeficientes arbitrarios  $a_n$  y  $b_n$  son necesarios para las soluciones producto correspondientes a  $\lambda > 0$ . La condición inicial  $u(x, 0) = f(x)$  se satisface si

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi x}{L} + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi x}{L} + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L}. \quad (8.38)$$

Aquí la función  $f(x)$  es una combinación lineal de senos y de cosenos. Otra diferencia crucial es que (8.38) es válida para  $-L < x < L$ , mientras que para las series de senos del ejemplo de la Sección 8.3 la igualdad era válida para  $0 \leq x \leq L$ .

Ahora queremos determinar los coeficientes  $a_0$ ,  $a_n$ ,  $b_n$  ( $n \geq 1$ ) a partir de (8.38). Nuevamente, las autofunciones satisfacen las siguientes propiedades integrales (notar que ahora son diferentes pues estamos considerando el intervalo  $[-L, L]$  que es simétrico respecto al origen):

$$\begin{aligned} \int_{-L}^L \cos \frac{n\pi x}{L} \cos \frac{m\pi x}{L} dx &= \begin{cases} 0 & \text{si } n \neq m \\ L & \text{si } n = m \neq 0 \\ 2L & \text{si } n = m = 0 \end{cases} \\ \int_{-L}^L \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} \operatorname{sen} \frac{m\pi x}{L} dx &= \begin{cases} 0 & \text{si } n \neq m \\ L & \text{si } n = m \neq 0 \end{cases} \\ \int_{-L}^L \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} \cos \frac{m\pi x}{L} dx &= 0 \quad (\text{siempre}), \end{aligned} \quad (8.39)$$

donde  $n$  y  $m$  son enteros no negativos arbitrarios. La autofunción constante corresponde a  $n = 0$  ó  $m = 0$ . La última de estas integrales es particularmente simple de derivar, pues el seno es una función impar y el coseno es par, entonces el producto es una función impar y la integral en un intervalo simétrico con respecto al origen es cero.

Los coeficientes se obtienen de forma similar a como se hizo antes. Si multiplicamos (8.38) por  $\cos \frac{m\pi x}{L}$  y/o por  $\operatorname{sen} \frac{m\pi x}{L}$  (hacemos las dos cuentas a la vez) y luego integramos de  $x = -L$  a  $x = L$ , obtenemos

$$\begin{aligned} \int_{-L}^L f(x) \begin{Bmatrix} \cos \frac{m\pi x}{L} \\ \operatorname{sen} \frac{m\pi x}{L} \end{Bmatrix} dx &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n \int_{-L}^L \cos \frac{n\pi x}{L} \begin{Bmatrix} \cos \frac{m\pi x}{L} \\ \operatorname{sen} \frac{m\pi x}{L} \end{Bmatrix} dx \\ &+ \sum_{n=1}^{\infty} b_n \int_{-L}^L \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} \begin{Bmatrix} \cos \frac{m\pi x}{L} \\ \operatorname{sen} \frac{m\pi x}{L} \end{Bmatrix} dx. \end{aligned}$$

Ahora utilizamos las propiedades integrales (8.39) y obtenemos

$$\begin{aligned} \int_{-L}^L f(x) \cos \frac{m\pi x}{L} dx &= a_m \int_{-L}^L \left( \cos \frac{m\pi x}{L} \right)^2 dx \\ \int_{-L}^L f(x) \operatorname{sen} \frac{m\pi x}{L} dx &= b_m \int_{-L}^L \left( \operatorname{sen} \frac{m\pi x}{L} \right)^2 dx \end{aligned}$$

Despejando obtenemos

$$\begin{aligned}
 a_0 &= \frac{1}{2L} \int_{-L}^L f(x) dx \\
 a_m &= \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \cos \frac{m\pi x}{L} dx \\
 b_m &= \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \operatorname{sen} \frac{m\pi x}{L} dx
 \end{aligned}$$

donde las dos últimas fórmulas valen para  $m = 1, 2, 3, \dots$

## 8.5. CB independientes del tiempo

Hasta ahora hemos resuelto problemas con condiciones de borde homogéneas, por ejemplo  $u(0, t) = 0$ ,  $u(-L, t) - u(L, t) = 0$ ,  $u_x(L, t) + u(L, t) = 0$ , etc.; ver Secciones 8.3, 8.4 y ejercicios 8.13–8.19. En esta sección nos ocuparemos de condiciones de borde no homogéneas pero **constantes en el tiempo**.

La idea es hallar primero una solución particular que cumpla la Ecuación Diferencial (ED) y las Condiciones de Borde (CB), ignorando la Condición Inicial (CI). Luego hallar una que cumpla la ED y las CB homogéneas correspondientes de manera que sumada a la anterior cumpla todo: la ED, las CB y la CI.

Veamos directamente un ejemplo:

**Ejemplo 8.14.** Hallar la solución de

$$\begin{aligned}
 u_t - ku_{xx} &= 0, & 0 < x < L, \quad t > 0 \\
 u(0, t) &= a, \quad u(L, t) = b, & t > 0, \\
 u(x, 0) &= g(x), & 0 < x < L,
 \end{aligned} \tag{8.40}$$

con  $a$  y  $b$  dos constantes y  $g(x)$  una función dada. Descomponemos este problema de la siguiente manera. Primero resolveremos el problema:

$$\begin{aligned}
 u_{p,t} - ku_{p,xx} &= 0, & 0 < x < L, \quad t > 0, \\
 u_p(0, t) &= a, \quad u_p(L, t) = b, & t > 0, \\
 u_p(x, 0) &= \text{lo que sea}, & 0 < x < L.
 \end{aligned}$$

Una vez resuelto, resolvemos este:

$$\begin{aligned}
 v_t - kv_{xx} &= 0, & 0 < x < L, \quad t > 0, \\
 v(0, t) &= 0, \quad v(L, t) = 0, & t > 0, \\
 v(x, 0) &= g(x) - u_p(x, 0), & 0 < x < L.
 \end{aligned}$$

De esta manera, la función  $u(x, t) = u_p(x, t) + v(x, t)$  será solución de (8.40). En efecto:

$$\begin{aligned}
 u_t - ku_{xx} &= (u_p + v)_t - k(u_p + v)_{xx} \\
 &= u_{p,t} + v_t - ku_{p,xx} - kv_{xx} & 0 < x < L, \quad t > 0, \\
 &= u_{p,t} - ku_{p,xx} + v_t - kv_{xx} = 0, \\
 u(0, t) &= u_p(0, t) + v(0, t) = a + 0 = a, & t > 0, \\
 u(L, t) &= u_p(L, t) + v(L, t) = b + 0 = b, & t > 0, \\
 u(x, 0) &= u_p(x, 0) + v(x, 0) \\
 &= u_p(x, 0) + (g(x) - u_p(x, 0)) = g(x), & 0 < x < L.
 \end{aligned}$$

Ahora nos resta resolver los dos (sub)problemas. Para hallar  $u_p$  conviene intentar primero buscar una solución estacionaria, es decir una que satisfaga  $u_{p,t} = 0$ . Reemplazando  $u_{p,t}$  por 0 en la ED nos da  $u_{p,xx} = 0$ , o sea que  $u_p$  es lineal en  $x$ . Imponiendo las CB obtenemos

$$u_p(x, t) = \frac{b-a}{L}x + a,$$

que satisface la ED y las CB. Ahora debemos resolver

$$\begin{aligned}
 v_t - kv_{xx} &= 0, & 0 < x < L, \quad t > 0, \\
 v(0, t) &= 0, \quad v(L, t) = 0, & t > 0, \\
 v(x, 0) &= g(x) - \left( \frac{b-a}{L}x + a \right), & 0 < x < L,
 \end{aligned}$$

cuya solución hemos encontrado en la Sección 8.3, y está dada por

$$v(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} e^{-(\frac{n\pi}{L})^2 kt},$$

con

$$b_n = \frac{2}{L} \int_0^L \left[ g(x) - \left( \frac{b-a}{L}x + a \right) \right] \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} dx, \quad n = 1, 2, \dots$$

La solución  $u(x, t)$  de (8.40) es entonces

$$u(x, t) = \frac{b-a}{L}x + a + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} e^{-(\frac{n\pi}{L})^2 kt},$$

con  $b_n = \frac{2}{L} \int_0^L [g(x) - (\frac{b-a}{L}x + a)] \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} dx$ ,  $n = 1, 2, \dots$ . Es importante notar que los coeficientes  $b_n$  no se calculan con respecto a la  $g(x)$  original, sino con respecto a la condición inicial que satisface  $v(x, t)$ , que es el dato inicial original  $g(x)$  menos lo que vale  $u_p$  en  $t = 0$ .

Resolvamos un ejemplo más concreto

**Ejemplo 8.15.** Hallar la solución de

$$\begin{aligned}
 u_t - 2u_{xx} &= 0, & 0 < x < 3, \quad t > 0, \\
 u(0, t) &= 2, \quad u(3, t) = -1, & t > 0, \\
 u(x, 0) &= 2 + \frac{1}{10} \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{3}x\right) - x, & 0 < x < 3,
 \end{aligned} \tag{8.41}$$

Buscamos una solución estacionaria  $u_p = u_p(x)$  que cumpla las CB:  $u_p = C_1x + C_2$ , con  $u_p(0) = 2$  y  $u_p(3) = -1$ , es decir

$$u_p(x) = 2 - x.$$

Ahora buscamos una solución  $v(x, t)$  del problema con CB homogéneas y dato inicial

$$\begin{aligned} 2 + \frac{1}{10} \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{3}x\right) - x - (2 - x) &= \frac{1}{10} \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{3}x\right), \\ v_t - 2v_{xx} &= 0, & 0 < x < 3, \quad t > 0, \\ v(0, t) &= 0, \quad v(3, t) = 0, & t > 0, \\ v(x, 0) &= \frac{1}{10} \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{3}x\right), & 0 < x < 3. \end{aligned}$$

Por lo visto en la Sección 8.3 la solución de este problema es

$$v(x, t) = \frac{1}{10} \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{3}x\right) e^{-\left(\frac{\pi}{3}\right)^2 2t},$$

y finalmente

$$u(x, t) = u_p(x, t) + v(x, t) = 2 - x + \frac{1}{10} \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{3}x\right) e^{-\frac{2\pi^2}{9}t}.$$

Observamos que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} u(x, t) = 2 - x = u_p(x, t).$$

Veamos otro ejemplo, con condiciones de borde de diferente tipo en cada extremo:

**Ejemplo 8.16.** Hallar la solución de

$$\begin{aligned} u_t - 3u_{xx} &= 0, & 0 < x < 1, \quad t > 0, \\ u_x(0, t) &= 1, \quad u(1, t) = -1, & t > 0, \\ u(x, 0) &= x + \cos^2\left(\frac{3\pi}{4}x\right) - \frac{5}{2}, & 0 < x < 1. \end{aligned} \tag{8.42}$$

Buscamos, como antes, una solución particular *estacionaria*  $u_p = u_p(x)$ , que debe ser por lo tanto lineal:  $u_p(x) = C_1x + C_2$ . Para que satisfaga las CB debe ser  $C_1 = 0$  y  $C_2 = -1$ , es decir,

$$u_p(x) = x - 2.$$

Ahora buscamos una solución  $v(x, t)$  del problema con CB homogéneas y dato inicial

$$x + \cos^2\left(\frac{3\pi}{4}x\right) - \frac{5}{2} - (x - 2) = -\frac{1}{2} + \cos^2\left(\frac{3\pi}{4}x\right) = \frac{1}{2} \cos\left(\frac{3\pi}{2}x\right),$$

donde hemos usado la identidad trigonométrica  $\cos^2(\alpha) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos(2\alpha)$ . Es decir, buscamos  $v(x, t)$  solución de

$$\begin{aligned} v_t - 3v_{xx} &= 0, & 0 < x < 1, \quad t > 0 \\ v_x(0, t) &= 0, \quad v(1, t) = 0, & t > 0, \\ v(x, 0) &= \frac{1}{2} \cos\left(\frac{3\pi}{2}x\right), & 0 < x < 1. \end{aligned}$$

Por lo visto en el Problema 8.17 la solución de este problema es

$$v(x, t) = \frac{1}{2} \cos\left(\frac{3\pi}{2}x\right)e^{-\left(\frac{3\pi}{2}\right)^2 3t},$$

y finalmente

$$u(x, t) = u_p(x, t) + v(x, t) = x - 2 + \frac{1}{2} \cos\left(\frac{3\pi}{2}x\right)e^{-\frac{27\pi^2}{4}t}.$$

Observamos que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} u(x, t) = x - 2 = u_p(x, t).$$

El truco consiste entonces en hallar la solución de estado estacionario que cumple las condiciones de borde para  $u_p$  y luego el problema se transforma en uno de los conocidos con CB homogéneas. Esto funciona bien con cualquier combinación de CB constantes en el tiempo, excepto cuando las dos condiciones son de tipo Neumann. Veamos un ejemplo semi-abstracto que ilustra la situación.

**Ejemplo 8.17.** Hallar la solución de

$$\begin{aligned} u_t - ku_{xx} &= 0, & 0 < x < L, \quad t > 0 \\ u_x(0, t) &= a, \quad u_x(L, t) = b, & t > 0, \\ u(x, 0) &= g(x), & 0 < x < L, \end{aligned} \tag{8.43}$$

Buscamos, como antes, una solución particular *estacionaria*  $u_p = u_p(x)$ , que debe ser por lo tanto lineal:  $u_p(x) = C_1x + C_2$ . Para que satisfaga las CB debe ser  $C_1 = a$  y  $C_1 = b$ . Tal solución estacionaria existe solo cuando  $a = b$ , y en este caso se procede como en los ejemplos anteriores. Si  $a \neq b$  tal solución estacionaria no existe, y para entender por qué, basta interpretar la ecuación cuando modela una temperatura  $u(x, t)$  en una barra unidimensional de longitud  $L$ . En este caso  $u_x(0, t) = a$  indica que la cantidad de calor que *sale* de la barra en  $x = 0$  proporcional a  $a$ , y  $u_x(L, t) = b$  indica que la cantidad de calor que *entra* a la barra en  $x = L$  proporcional a  $b$ , y además en la ecuación no figuran términos fuente o sumidero. Por lo tanto, cuando  $a \neq b$  no podrá existir un estado estacionario, dado que la cantidad de calor que entra/sale de la barra no es nula. Este análisis físico nos hace pensar que la cantidad de calor en la barra tiene que aumentar o disminuir linealmente con el tiempo, por eso proponemos una solución particular de la siguiente forma

$$u_p(x, t) = h(x) + ct.$$

Veamos si hallamos una solución de esta forma que cumpla la ED y las CB:

$$\begin{aligned} u_{p,t}(x, t) &= c, \\ u_{p,xx}(x, t) &= h''(x), \\ u_{p,t}(x, t) - ku_{p,xx}(x, t) &= c - kh''(x), \\ u_{p,x}(0, t) &= h'(0), \\ u_{p,x}(L, t) &= h'(L). \end{aligned}$$

La ED y las CB impuestas a  $u_p$  implican una EDO con CB para  $h(x)$ :

$$h''(x) = \frac{c}{k}, \quad 0 < x < L, \quad h'(0) = a, \quad h'(L) = b.$$

Intentemos resolverla:

$$\begin{aligned} h''(x) &= \frac{c}{k} \implies h(x) = \frac{c}{2k}x^2 + C_1x + C_2 \\ h'(x) &= \frac{c}{k}x + C_1 \\ h'(0) &= a \implies C_1 = a \implies h(x) = \frac{c}{2k}x^2 + ax + C_2 \\ h'(x) &= \frac{c}{k}x + a \\ h'(L) &= b \implies \frac{c}{k}L + a = b \implies c = \frac{b-a}{L}k \end{aligned}$$

y nos quedó  $C_2$  con libertad de elección. Para simplificar elegimos  $C_2 = 0$  y nos queda

$$u_p(x, t) = \underbrace{\frac{b-a}{2L}}_{\frac{c}{2k}} x^2 + \underbrace{a}_{C_1} x + \underbrace{\frac{b-a}{L}k}_{c} t$$

Luego nos falta hallar la solución  $v(x, t)$  del problema correspondiente, con condición inicial  $g(x) - u_p(x, 0)$ , que en este caso resulta

$$\begin{aligned} v_t - kv_{xx} &= 0, & 0 < x < L, \quad t > 0 \\ v_x(0, t) &= 0, \quad v_x(L, t) = 0, & t > 0, \\ v(x, 0) &= g(x) - \left[ \frac{b-a}{2L}x^2 + ax \right], & 0 < x < L. \end{aligned}$$

La solución de este problema está dada por

$$v(x, t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi x}{L} e^{-\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 kt},$$

con

$$a_0 = \frac{1}{L} \int_0^L g(x) - \left[ \frac{b-a}{2L}x^2 + ax \right], \quad a_n = \frac{2}{L} \int_0^L \left( g(x) - \left[ \frac{b-a}{2L}x^2 + ax \right] \right) \cos \frac{n\pi x}{L} dx, \quad n = 1, 2, \dots \quad (8.44)$$

Finalmente, la solución  $u(x, t)$  del problema (8.43) es  $u(x, t) = u_p(x, t) + v(x, t)$ , o sea

$$u(x, t) = \frac{b-a}{2L}x^2 + ax + \frac{b-a}{L}kt + a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi x}{L} e^{-\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 kt},$$

con  $a_n$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$  dados por (8.44).

## 8.6. CB dependientes del tiempo

Ya hemos visto que el problema

$$\begin{cases} u_t - ku_{xx} = 0, & 0 < x < L, \quad 0 < t < T, \\ u(0, t) = a(t), \quad u(L, t) = b(t), & 0 < t < T, \\ u(x, 0) = f(x), & 0 < x < L, \end{cases} \quad (8.45)$$



tiene solución única, y también sabemos cómo resolverlo si  $a$  y  $b$  son constantes. Queremos ver ahora cómo resolverlo si  $a(t)$  y  $b(t)$  no son constantes, sino que varían con  $t$ .

Podemos intentar algo similar a lo hecho antes, definiendo  $w(x, t) = \frac{b(t)-a(t)}{L}x + a(t)$ . Esta función cumple las CB pero

$$w_t - kw_{xx} = \frac{b'(t) - a'(t)}{L}x + a'(t),$$

que no es cero a menos que  $a$  y  $b$  sean constantes. Igualmente podemos seguir con el razonamiento, y buscar una función  $v$  que sumada a  $w$  sea la solución  $u = v + w$  que estamos buscando. Nos preguntamos: ¿qué debe cumplir dicha función  $v$ ? La respuesta es simple, dada la linealidad de la ecuación,  $v(x, t)$  debe ser solución de

$$\begin{cases} v_t - kv_{xx} = - \left[ \frac{b'(t) - a'(t)}{L}x + a'(t) \right], & 0 < x < L, \quad 0 < t < T, \\ v(0, t) = 0, \quad v(L, t) = 0, & 0 < t < T, \\ v(x, 0) = f(x) - \left[ \frac{b(0) - a(0)}{L}x + a(0) \right], & 0 < x < L, \end{cases}$$

Aparece entonces la necesidad de estudiar problemas con términos fuente no-nulos como el siguiente:

$$\begin{cases} u_t - ku_{xx} = h(x, t), & 0 < x < L, \quad 0 < t < T, \\ u(0, t) = 0, \quad u(L, t) = 0, & 0 < t < T, \\ u(x, 0) = g(x), & 0 < x < L. \end{cases}$$

Este problema puede a su vez desdoblarse en dos (sub)problemas

$$\begin{cases} u_{1,t} - ku_{1,xx} = 0, & 0 < x < L, \quad 0 < t < T, \\ u_1(0, t) = 0, \quad u_1(L, t) = 0, & 0 < t < T, \\ u_1(x, 0) = g(x), & 0 < x < L, \end{cases} \quad (8.46a)$$

$$\begin{cases} u_{2,t} - ku_{2,xx} = h(x, t), & 0 < x < L, \quad 0 < t < T, \\ u_2(0, t) = 0, \quad u_2(L, t) = 0, & 0 < t < T, \\ u_2(x, 0) = 0, & 0 < x < L. \end{cases} \quad (8.46b)$$

Llegamos entonces a la siguiente proposición:

**Proposición 8.18.** *La solución de (8.45) está dada por*

$$u(x, t) = w(x, t) + u_1(x, t) + u_2(x, t),$$

con  $w(x, t) = \frac{b(t) - a(t)}{L}x + a(t)$ ,  $u_1(x, t)$  y  $u_2(x, t)$  soluciones de (8.46a) y (8.46b), respectivamente, con

$$g(x) = f(x) - w(x, 0) = f(x) - \left[ \frac{b(0) - a(0)}{L}x + a(0) \right] \quad \text{en (8.46a),}$$

$$h(x, t) = -(w_t - kw_{xx}) = - \left[ \frac{b'(t) - a'(t)}{L}x + a'(t) \right] \quad \text{en (8.46b).}$$

La demostración de esta proposición es sencilla, y se deja como ejercicio.

## 8.7. El principio de Duhamel

Vimos en la sección anterior la necesidad de resolver problemas con un término fuente no nulo, de la forma

$$\begin{cases} u_t - ku_{xx} = h(x, t), & 0 < x < L, \quad 0 < t < T \\ u(0, t) = 0, \quad u(L, t) = 0 & 0 < t < T \\ u(x, 0) = 0, & 0 < x < L. \end{cases} \quad (8.47)$$

El objetivo de esta sección es presentar el *Principio de Duhamel* que provee una forma de resolver este tipo de problemas resolviendo una familia de problemas sin término fuente, pero con dato inicial no-homogéneo.

Veamos una derivación heurística de la fórmula. Consideremos  $\Delta t$  pequeño, digamos  $\Delta t = \frac{t^*}{n}$  con  $t^* > 0$  fijo y  $n$  grande, y la siguiente sucesión de instantes de tiempo:

$$t_0 = 0 < t_1 = \Delta t < t_2 = 2\Delta t < \dots < t_n = n\Delta t = t^* < \dots$$

Como  $\Delta t$  es pequeño, podemos pensar que la difusión es despreciable en el primer intervalo de tiempo, y luego

$$u(x, t_1) \cong \int_0^{t_1} h(x, t) dt \cong \Delta t h(x, t_1).$$

En el segundo intervalo de tiempo (entre  $t_1$  y  $t_2$ ) pensamos que hay difusión del calor que ingresó durante el primer intervalo, pero es despreciable la difusión del calor que ingresa durante el segundo intervalo, así:

$$u(x, t_2) \cong v_1(x, t_2) + \int_{t_1}^{t_2} h(x, t) dt \cong v_1(x, t_2) + \Delta t h(x, t_2),$$

con  $v_1(x, t)$  solución de la ecuación de difusión

$$\begin{cases} v_{1,t} - kv_{1,xx} = 0, & 0 < x < L, \quad t > t_1, \\ v_1(0, t) = 0, \quad v_1(L, t) = 0 & t > t_1, \\ v_1(x, t_1) = \Delta t h(x, t_1), & 0 < x < L, \quad (t = t_1). \end{cases}$$

En el tercer intervalo de tiempo (entre  $t_2$  y  $t_3$ ) pensamos que hay difusión del calor que ingresó durante los dos primeros intervalos, pero es despreciable la difusión del calor que ingresa durante el último intervalo, así:

$$u(x, t_3) \cong v_1(x, t_3) + v_2(x, t_3) + \int_{t_2}^{t_3} h(x, t) dt \cong v_1(x, t_3) + v_2(x, t_3) + \Delta t h(x, t_3),$$

con  $v_1(x, t)$  como antes y  $v_2(x, t)$  solución de la ecuación de difusión

$$\begin{cases} v_{2,t} - kv_{2,xx} = 0, & 0 < x < L, \quad t > t_2, \\ v_2(0, t) = 0, \quad v_2(L, t) = 0, & t > t_2, \\ v_2(x, t_2) = \Delta t h(x, t_2), & 0 < x < L, \quad (t = t_2). \end{cases}$$

Si continuamos con este razonamiento llegamos a que en  $t = t_n = t^*$ ,

$$u(x, t^*) \cong v_1(x, t^*) + v_2(x, t^*) + v_3(x, t^*) + \cdots + v_{n-1}(x, t^*) + \Delta t h(x, t_n), \quad (8.48)$$

con  $v_i(x, t)$ ,  $i = 1, 2, \dots, n-1$  solución de la ecuación de difusión

$$\begin{cases} v_{i,t} - kv_{i,xx} = 0, & 0 < x < L, \quad t > t_i, \\ v_i(0, t) = 0, \quad v_i(L, t) = 0, & t > t_i, \\ v_i(x, t_i) = \Delta t h(x, t_i), & 0 < x < L, \quad (t = t_i). \end{cases}$$

Para entender mejor la suma (8.48) definimos la función  $w(x, t; s)$  como solución de los siguientes problemas de difusión

$$\begin{cases} w_t(x, t; s) = w_{xx}(x, t; s), & 0 < x < L, \quad t > s, \\ w(0, t; s) = 0, \quad w(L, t; s) = 0, & t > s, \\ w(x, s; s) = h(x, s), & 0 < x < L. \end{cases}$$

Es decir que  $v_n(x, t) = \Delta t w(x, t; t_n)$ . Así, la suma (8.48) resulta

$$\begin{aligned} u(x, t^*) &\cong w(x, t^*; t_1) \Delta t + w(x, t^*; t_2) \Delta t + \cdots + w(x, t^*; t_{n-1}) \Delta t + \Delta t h(x, t_n) \\ &= \sum_{i=1}^{n-1} w(x, t^*; t_i) \Delta t + \Delta t h(x, t_n). \end{aligned}$$

Cuando  $\Delta t$  tiende a cero, la última suma tiende a  $\int_0^{t^*} w(x, t^*; t) dt$ . Como la aproximación debería ser mejor cuanto menor es  $\Delta t$ , esta heurística nos induce a creer que esta última integral es  $u(x, t^*)$ . Esto es cierto, como demostramos a continuación de manera rigurosa.

**Teorema 8.19** (Principio de Duhamel). *Sea  $h(x, t)$  una función  $C^2$  y para cada  $s > 0$  consideremos el problema<sup>1</sup>*

$$\begin{cases} w_t(x, t; s) = w_{xx}(x, t; s) & 0 < x < L, \quad t > s, \\ w(0, t; s) = 0, \quad w(L, t; s) = 0, & t > s, \\ w(x, s; s) = h(x, s), & 0 < x < L. \end{cases} \quad (8.49)$$

Entonces la única solución de

$$\begin{cases} u_t - ku_{xx} = h(x, t), & 0 < x < L, \quad 0 < t < T, \\ u(0, t) = 0, \quad u(L, t) = 0, & 0 < t < T, \\ u(x, 0) = 0, & 0 < x < L. \end{cases}$$

está dada por la fórmula

$$u(x, t) = \int_0^t w(x, t; s) ds.$$

La demostración es sencilla, pero para hacerla debemos ver antes el siguiente lema.

<sup>1</sup>Notemos que la condición inicial está dada en  $t = s$  y es allí donde entra la función  $h(x, t)$ .

**Lema 8.20.** Dada una función  $g(t, s)$  de dos variables tal que  $g(t, s)$  y  $g_t(t, s)$  son continuas, se cumple que

$$\frac{d}{dt} \left( \int_0^t g(t, s) ds \right) = g(t, t) + \int_0^t g_t(t, s) ds$$

*Demostración.* Para demostrar este lema definimos  $G(r, y) = \int_0^y g(r, s) ds$  y vemos que

$$\int_0^t g(t, s) ds = G(t, t).$$

Además

$$G_r(r, y) = \int_0^y g_t(r, s) ds \quad \text{y} \quad G_y(r, y) = g(r, y).$$

Ahora bien,

$$\frac{d}{dt} G(t, t) = G_r(t, t) + G_y(t, t) = G_r(r, y) \Big|_{\substack{r=t \\ y=t}} + G_y(r, y) \Big|_{\substack{r=t \\ y=t}} = \int_0^t g_t(t, s) ds + g(t, t).$$

□

Ahora sí, podemos demostrar el principio de Duhamel.

*Demostración del Teorema 8.19.* Es claro que  $u(0, t) = \int_0^t w(0, t; s) ds = \int_0^t 0 ds = 0$  y análogamente  $u(L, t) = 0$ . También  $u(x, 0) = \int_0^0 w(x, 0; 0) ds = 0$ . Hemos visto entonces que se cumplen las condiciones de borde y la condición inicial. Veamos que se cumple la ecuación diferencial:

$$\begin{aligned} u_t(x, t) &= \frac{\partial}{\partial t} \left( \int_0^t w(x, t; s) ds \right) \\ &= w(x, t; t) + \int_0^t w_t(x, t; s) ds && \text{por el lema anterior} \\ &= h(x, t) + \int_0^t kw_{xx}(x, t; s) ds && \text{por definición de } w(x, t; s) \\ &= h(x, t) + k \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left( \int_0^t w(x, t; s) ds \right) \\ &= h(x, t) + ku_{xx}(x, t). \end{aligned}$$

Es decir,  $u_t(x, t) - ku_{xx}(x, t) = h(x, t)$ . □

La fórmula puede ser bastante complicada, pero veamos un ejemplo cuando resolvemos en  $\mathbb{R}$  usando la solución fundamental.

**Ejemplo 8.21.** Hallar la solución de

$$\begin{aligned} u_t - ku_{xx} &= h(x, t), & x \in \mathbb{R}, \quad t > 0 \\ u(x, 0) &= 0, & x \in \mathbb{R} \quad (t = 0). \end{aligned}$$

Según el principio de Duhamel, la solución está dada por

$$u(x, t) = \int_0^t w(x, t; s) ds$$

donde  $w(x, t; s)$  debe ser la solución de

$$\begin{aligned} w_t(x, t; s) - kw_{xx}(x, t; s) &= 0, & x \in \mathbb{R}, \quad t > s \\ w(x, s; s) &= h(x, s), & x \in \mathbb{R} \quad (t = s). \end{aligned}$$

Según la fórmula dada en la Sección 8.1

$$w(x, t; s) = \int_{-\infty}^{\infty} h(y, s)\Phi(x - y, t - s) dy, \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > s.$$

Entonces

$$u(x, t) = \int_0^t \int_{-\infty}^{\infty} h(y, s)\Phi(x - y, t - s) dy ds, \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0.$$

Si quisiéramos resolver la ecuación de difusión en  $\mathbb{R}$  con término fuente  $h(x, t)$  y dato inicial  $g(x)$  tendríamos que sumar la solución del último ejemplo con la solución dada por (8.3). Así, la solución de

$$\begin{aligned} u_t - ku_{xx} &= h(x, t), & x \in \mathbb{R}, \quad t > 0 \\ u(x, 0) &= g(x), & x \in \mathbb{R} \quad (t = 0). \end{aligned}$$

es

$$u(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} g(y)\Phi(x - y, t) dy + \int_0^t \int_{-\infty}^{\infty} h(y, s)\Phi(x - y, t - s) dy ds, \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0.$$

## 8.8. Ejercicios

**8.1.** Demostrar que la *solución fundamental de la ecuación de difusión* en una dimensión dada por (8.2) es solución de  $u_t = ku_{xx}$  en  $\mathbb{R} \times (0, \infty)$ .

\* **8.2.** Consideremos la *solución fundamental de la ecuación de difusión* en una dimensión dada por (8.2). Demostrar que si  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  es acotada y de soporte compacto (es decir, existe  $M > 0$  tal que  $|g(x)| \leq M$ ,  $x \in \mathbb{R}$ ; y  $g(x) = 0$  si  $|x| > M$ ), entonces la función  $u(x, t)$  definida por (8.3) cumple lo siguiente:

- (a)  $u \in C^2(\mathbb{R} \times (0, \infty))$  (Demostrarlo primero para  $\Phi$  y ver que bajo la hipótesis de  $g$  acotada y de soporte compacto se puede *meter* la derivada en la integral);
- (b)  $u_t = ku_{xx}$  para  $(x, t) \in \mathbb{R} \times (0, \infty)$ ; (Usar que  $\Phi$  es solución y usar—nuevamente—que se puede *meter* la derivada en la integral);
- (c) Si  $x_0$  es un punto de continuidad de  $g$ , entonces  $\lim_{t \rightarrow 0^+} u(x_0, t) = g(x_0)$ .

Ayuda: Seguir los siguientes pasos:

- (I) Demostrar que  $\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$ . Para esto usar que  $\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2} dx = \left( \int_{\mathbb{R}^2} e^{-|x|^2} dx \right)^{1/2}$  y calcular la integral de  $\mathbb{R}^2$  usando coordenadas polares.
- (II) Demostrar que  $\int_{\mathbb{R}} \Phi(x, t) dx = 1$  para todo  $t > 0$ .
- (III) Demostrar que  $\int_{|x| < \delta} \Phi(x, t) dx \rightarrow 1$  cuando  $t \rightarrow 0^+$ , para cualquier  $\delta > 0$  fijo.
- (IV) Usar que

$$\begin{aligned} g(x_0) - u(x_0, t) &= \int_{-\infty}^{\infty} [g(x_0) - g(x_0 - y)] \Phi(y, t) dy \\ &= \int_{|y| < \delta} [g(x_0) - g(x_0 - y)] \Phi(y, t) dx + \int_{|y| > \delta} [g(x_0) - g(x_0 - y)] \Phi(y, t) dy. \end{aligned}$$

Comentario: Se puede demostrar que la ecuación de difusión en  $\mathbb{R}$  tiene una única solución acotada para cada dato inicial  $g$ . Este problema nos dice que la fórmula para dicha solución está dada por (8.3).

**8.3.** Supongamos que  $v(x, t)$  es una función  $C^2$  que satisface

$$\begin{aligned} (ED) \quad & v_t = kv_{xx} \quad 0 < x < L, \quad t > 0; \\ (CB) \quad & v(0, t) = 0 \quad v(L, t) = 0, \quad t > 0. \end{aligned}$$

Demostrar que si  $0 \leq t_1 \leq t_2$ , entonces

$$\int_0^L [v(x, t_2)]^2 dx \leq \int_0^L [v(x, t_1)]^2 dx. \quad (8.50)$$

(Ayuda: proceder como en el Teorema 8.1).

**8.4.** Demostrar el mismo resultado del ejercicio anterior cuando las condiciones de borde se cambian por

$$\text{(a)} \begin{cases} v_x(0, t) = 0 \\ v_x(L, t) = 0 \end{cases} \quad \text{(b)} \begin{cases} v_x(0, t) = 0 \\ v(L, t) = 0 \end{cases} \quad \text{(c)} \begin{cases} v_x(0, t) = hv(0, t) \quad (h > 0) \\ v(L, t) = 0 \end{cases}$$

**8.5.** Usar los principios del máximo/mínimo para deducir *cotas* para la solución de

$$\begin{aligned} u_t &= ku_{xx}, \quad 0 < x < 5, \quad t > 0, \\ u(0, t) &= 0, \quad u(5, t) = 0, \quad t > 0, \\ u(x, 0) &= x(5 - x), \quad 0 < x < 5. \end{aligned}$$

**8.6.** Considerar la misma ecuación del calor del ejercicio anterior, con  $k = 75$ :

$$\begin{aligned} u_t &= 75 u_{xx}, \quad 0 < x < 5, \quad t > 0, \\ u(0, t) &= 0, \quad u(5, t) = 0, \quad t > 0, \\ u(x, 0) &= f(x), \quad 0 < x < 5. \end{aligned}$$

Considerar  $f_e(x) = x(5 - x)$  y  $f_1(x) = \frac{200}{\pi^3} \text{sen} \left( \frac{\pi x}{5} \right)$ ;  $f_e$  es la condición inicial *exacta* y  $f_1$  una *aproximada*.

- (a) Utilizando una computadora/calculadora, superponer los gráficos de las funciones  $f_e$  y  $f_1$  en el intervalo  $[0, 5]$ . En MATLAB se puede hacer de la siguiente manera

```
>> x = [0:.01:5];
>> fe = x .* (5-x);
>> f1 = 200/pi^3*sin(pi/5*x);
>> plot(x, fe, x, f1);
>> legend('exacta', 'aproximada')
```

- (b) Graficar el error  $f_e(x) - f_1(x)$ . En MATLAB:

```
>> plot(x, fe - f1);
>> legend('error')
```

- (c) Tomando una grilla de aproximadamente 500 puntos, calcular el máximo error entre  $f_e$  y  $f_1$  (usar valor absoluto). En MATLAB: `>> max(abs(fe-f1))`

También se puede hallar el máximo y el mínimo de  $f_e(x) - f_1(x)$  analíticamente, pero no vale la pena en este caso.

- (d) Verificar que  $u_1(x, t) = \frac{200}{\pi^3} \operatorname{sen}\left(\frac{\pi x}{5}\right) e^{-3\pi^2 t}$  es solución del problema tomando como condición inicial la función  $f_1(x)$ .

- (e) Si se toma  $u_1(x, t)$  como aproximación de la solución exacta  $u_e(x, t)$ . ¿Cuál es el error entre  $u_e(x, t)$  y  $u_1(x, t)$  para  $0 \leq x \leq 5$  y  $t \geq 0$ ? ¿Sirve  $u_1(x, t)$  como aproximación de  $u_e(x, t)$ ?

- (f) Graficar el perfil de temperaturas dado por la aproximación  $u_1(x, t)$  para  $t = 0, 0,1, 0,2$ .

- (g) Graficar la temperatura en el punto medio del intervalo  $[0, 5]$  para  $t$  en el intervalo  $[0, 1]$ , usando la aproximación  $u_1(x, t)$ .

**8.7.** Repetir el ejercicio anterior con  $f_3(x) = \frac{200}{\pi^3} \operatorname{sen}\left(\frac{\pi x}{5}\right) + \frac{200}{27\pi^3} \operatorname{sen}\left(\frac{3\pi x}{5}\right)$  (determinar  $u_3(x, t)$ ).

\* **8.8.** Sea  $u$  una solución  $C^2([0, L] \times [0, T])$  del problema

$$\begin{aligned} u_t &= k u_{xx}, & 0 < x < L, & \quad 0 < t < T, \\ u(0, t) &= a(t), & u_x(L, t) &= 0, & \quad 0 < t < T, \\ u(x, 0) &= f(x), & 0 \leq x \leq L. \end{aligned}$$

Demostrar que si

$$M = \max \left\{ \max_{t \in [0, T]} a(t), \max_{x \in [0, L]} f(x) \right\}$$

entonces se cumple que  $u(x, t) \leq M$ , para todo  $0 \leq x \leq L$  y  $0 \leq t \leq T$ .

\* **8.9.** Sea  $u$  una solución  $C^2$  del problema

$$\begin{aligned} u_t &= k u_{xx}, & -L < x < L, & \quad t > 0, \\ u(-L, t) &= u(L, t), & u_x(-L, t) &= u_x(L, t), & \quad t > 0, \\ u(x, 0) &= f(x), & -L < x < L. & \end{aligned}$$

Demostrar que si

$$M = \max \left\{ \max_{x \in [0, L]} f(x) \right\}$$

entonces se cumple que  $u(x, t) \leq M$ , para todo  $-L \leq x \leq L$  y  $t \geq 0$ .

\* **8.10.** Sea  $\Omega$  un dominio de  $\mathbb{R}^d$  ( $d \geq 2$ ), y supongamos que  $u = u(x, t)$  es una solución  $C^2(\bar{\Omega} \times [0, T])$  del problema

$$\begin{aligned} u_t &= k \bar{\nabla}^2 u, & x \in \Omega, & \quad 0 < t < T, \\ u(x, t) &= a(x, t), & x \in \partial\Omega, & \quad t > 0, \\ u(x, 0) &= f(x), & x \in \Omega. & \end{aligned}$$

Demostrar que si

$$M = \max \left\{ \max_{x \in \partial\Omega, t \in [0, T]} a(x, t), \max_{x \in \bar{\Omega}} f(x) \right\}$$

se cumple que  $u(x, t) \leq M$ , para todo  $x \in \bar{\Omega}$  y  $0 \leq t \leq T$ .

**8.11.** Las siguientes integrales indefinidas son válidas cuando  $a \neq b$ ,

$$\begin{aligned} \int \operatorname{sen}(ax) \operatorname{sen}(bx) dx &= \frac{1}{2} \left[ \frac{\operatorname{sen}((a-b)x)}{a-b} - \frac{\operatorname{sen}((a+b)x)}{a+b} \right] \\ \int \cos(ax) \cos(bx) dx &= \frac{1}{2} \left[ \frac{\operatorname{sen}((a-b)x)}{a-b} + \frac{\operatorname{sen}((a+b)x)}{a+b} \right] \end{aligned}$$

Usándolas, y usando también que

$$\operatorname{sen}^2(\alpha) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos(2\alpha), \quad \cos^2(\alpha) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos(2\alpha).$$

Calcular las siguientes integrales (considerar los casos:  $n = m = 0$ ,  $n = m \neq 0$  y  $n \neq m$ ):

- (a)  $\int_0^L \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi x}{L}\right) dx$ , para  $n, m = 1, 2, 3, \dots$
- (b)  $\int_0^L \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right) dx$ , para  $n, m = 0, 1, 2, 3, \dots$
- (c)  $\int_0^L \operatorname{sen}\left(\frac{(n-\frac{1}{2})\pi x}{L}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{(m-\frac{1}{2})\pi x}{L}\right) dx$ , para  $n, m = 1, 2, 3, \dots$
- (d)  $\int_0^L \cos\left(\frac{(n-\frac{1}{2})\pi x}{L}\right) \cos\left(\frac{(m-\frac{1}{2})\pi x}{L}\right) dx$ , para  $n, m = 1, 2, 3, \dots$



**8.12.** En base al problema anterior, decir cómo deben calcularse los coeficientes  $a_n, b_n$  (en términos de  $f$ ) si se sabe que se cumplen las igualdades siguientes para  $f$  definida en  $[0, L]$ :

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad f(x) &= \sum_{n=1}^N b_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right). & \text{(c)} \quad f(x) &= \sum_{n=1}^N c_n \operatorname{sen}\left(\frac{(n-\frac{1}{2})\pi x}{L}\right). \\ \text{(b)} \quad f(x) &= a_0 + \sum_{n=1}^N a_n \operatorname{cos}\left(\frac{n\pi x}{L}\right). & \text{(d)} \quad f(x) &= \sum_{n=1}^N d_n \operatorname{cos}\left(\frac{(n-\frac{1}{2})\pi x}{L}\right). \end{aligned}$$

**8.13.** Decir cuál es la solución del siguiente problema

$$\begin{cases} u_t = 2u_{xx}, & 0 < x < 3, & t > 0, \\ u(0, t) = 0, & u(3, t) = 0, & t > 0, \\ u(x, 0) = f(x), & 0 < x < 3, \end{cases}$$

en cada uno de los siguientes casos

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad f(x) &= 4 \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi x}{3}\right) - \operatorname{sen}\left(\frac{5\pi x}{3}\right); \\ \text{(b)} \quad f(x) &= 5 \operatorname{sen}(4\pi x) + 2 \operatorname{sen}(10\pi x); \\ \text{(c)} \quad f(x) &= x(3-x). \end{aligned}$$

**8.14.** Decir cuál es la solución del siguiente problema

$$\begin{cases} u_t = u_{xx}, & -1 < x < 1, & t > 0, \\ u(-1, t) = u(1, t), & u_x(1, t) = u_x(-1, t), & t > 0, \\ u(x, 0) = f(x), & -1 < x < 1, \end{cases}$$

en cada uno de los siguientes casos

$$\text{(a)} \quad f(x) = 10 + 2 \operatorname{cos}(\pi x) - 0,1 \operatorname{sen}(8\pi x); \quad \text{(b)} \quad f(x) = 4 + \frac{x^3 - x}{2}.$$

**8.15.** Hallar todas las soluciones  $u(x, t) = \phi(x)G(t)$  de variables separadas del problema:

$$\begin{aligned} u_t &= k u_{xx}, & 0 < x < L, & \quad t > 0, \\ u_x(0, t) &= 0, & u_x(L, t) &= 0, & \quad t > 0. \end{aligned}$$

¿Qué situación física representan las condiciones de borde?

**8.16.** Decir cuál es la solución del siguiente problema

$$\begin{cases} u_t = 5u_{xx}, & 0 < x < 10, & t > 0, \\ u_x(0, t) = 0, & u_x(10, t) = 0, & t > 0, \\ u(x, 0) = f(x), & 0 < x < 10, \end{cases}$$

en cada uno de los siguientes casos

$$\text{(a)} \quad f(x) = 10; \quad \text{(b)} \quad f(x) = 10 - \operatorname{cos}\left(\frac{\pi}{10}x\right); \quad \text{(c)} \quad f(x) = 4 + \frac{10x - x^2}{2}.$$

**8.17.** Hallar todas las soluciones  $u(x, t) = \phi(x)G(t)$  de variables separadas del problema:

$$\begin{aligned} u_t &= ku_{xx}, & 0 < x < L, & \quad t > 0, \\ u_x(0, t) &= 0, & u(L, t) &= 0, & \quad t > 0. \end{aligned}$$

¿Qué situación física representan las condiciones de borde?

**8.18.** Decir cuál es la solución del siguiente problema

$$\begin{cases} u_t = 3u_{xx}, & 0 < x < 5, & t > 0, \\ u_x(0, t) = 0, & u(5, t) = 0, & t > 0. \\ u(x, 0) = f(x), & 0 < x < 5, \end{cases}$$

en cada uno de los siguientes casos

$$\text{(a) } f(x) = \cos\left(\frac{\pi}{10}x\right); \quad \text{(b) } f(x) = 5 - \frac{x^2}{5}.$$

**8.19.** Hallar todas las soluciones  $u(x, t) = \phi(x)G(t)$  de variables separadas del problema:

$$\begin{aligned} u_t &= ku_{xx}, & 0 < x < L, & \quad t > 0, \\ u(0, t) &= 0, & u_x(L, t) &= -u(L, t), & \quad t > 0. \end{aligned}$$

¿Qué situación física representan las condiciones de borde?

**8.20.** Resolver el siguiente problema

$$\begin{aligned} u_t &= 2u_{xx}, & 0 < x < 1, & \quad t > 0, \\ u(0, t) &= -1, & u_x(1, t) &= 1, & \quad t > 0, \\ u(x, 0) &= x + \operatorname{sen}\left(\frac{3\pi x}{2}\right) - 1, & 0 < x < 1. \end{aligned}$$

**8.21.** Resolver el siguiente problema

$$\begin{aligned} u_t &= 5u_{xx}, & 0 < x < 10, & \quad t > 0, \\ u_x(0, t) &= 2, & u_x(10, t) &= 3, & \quad t > 0, \\ u(x, 0) &= \frac{1}{20}x^2 + 2x + \cos(\pi x), & 0 < x < 10. \end{aligned}$$

**8.22.** Demostrar la Proposición 8.18.

**8.23.** Considerar el problema siguiente:

$$\begin{aligned} u_t &= ku_{xx}, & 0 \leq x \leq L, & \quad t \geq 0, \\ u_x(0, t) &= a(t), & u_x(L, t) &= b(t), & \quad t \geq 0, \\ u(x, 0) &= f(x), & 0 \leq x \leq L. \end{aligned} \tag{8.51}$$

(a) ¿Qué situación física representa?

(b) Dar una fórmula para una función  $w(x, t)$  que cumpla las condiciones de borde.

- (c) ¿Qué problema debe resolver  $v(x, t)$  para que  $u(x, t) = v(x, t) + w(x, t)$  sea solución de (8.51)?
- (d) Realizar una descomposición del problema descrito en el ítem anterior en dos subproblemas más sencillos, análogos a (8.46a) y (8.46b). Dar las fórmulas precisas para los datos no-homogéneos de los problemas resultantes ( $g(x)$  y  $h(x, t)$  de (8.46a) y (8.46b) respectivamente).
- (e) Demostrar que la suma de  $w(x, t)$  y las soluciones  $u_1(x, t)$ ,  $u_2(x, t)$  de los subproblemas del ítem anterior, es solución del problema original.

**8.24.** Repetir los cinco ítems el ejercicio anterior para la siguiente situación:

$$\begin{aligned} u_t &= ku_{xx} + q(x, t), & 0 \leq x \leq L, & \quad t \geq 0, \\ u_x(0, t) &= a(t), & u_x(L, t) + Hu(L, t) &= Hb(t), & \quad t \geq 0, \\ u(x, 0) &= f(x), & 0 \leq x \leq L. & \end{aligned}$$

## Bibliografía complementaria

- [Bleecker-Csordas 1996] Bleecker, D., Csordas, G., *Basic Partial Differential Equations*, International Press, Cambridge, Massachusetts, 1996.
- [Haberman 1998] Haberman, R., *Elementary Applied Partial Differential Equations*, Prentice Hall, Upper Saddle River, NJ, 1998.

# Capítulo 9

## Series de Fourier

En el capítulo anterior vimos que las soluciones de ecuaciones de difusión (con coeficientes constantes) sobre intervalos acotados se escriben como combinaciones lineales de senos y cosenos, multiplicadas por exponenciales. Al tomar  $t = 0$  para verificar la condición inicial, las exponenciales dan todas igual a uno y desaparecen de la expresión. Afirmamos en ese momento que había una forma de determinar los coeficientes  $a_n$  o  $b_n$  para que la suma de senos o cosenos aproximase al dato inicial  $f(x)$  tanto como deseáramos. Junto con el principio del máximo, vimos que la suma correspondiente una vez vueltas a incorporar las exponenciales, sería una solución igualmente aproximada de la solución exacta para todo  $x$  y para todo  $t > 0$ . Nos proponemos ahora estudiar un poco más en detalle la aproximación de funciones por series de senos y/o de cosenos.

El objetivo de este capítulo es estudiar cómo aproximar funciones  $f(x)$  por sumas de alguna de las siguientes formas:

$$a_0 + \sum_{n=1}^N a_n \cos \frac{n\pi x}{L}, \quad \sum_{n=1}^N b_n \sin \frac{n\pi x}{L}, \quad a_0 + \sum_{n=1}^N a_n \cos \frac{n\pi x}{L} + b_n \sin \frac{n\pi x}{L}.$$

Estudiaremos primero el caso más general (que engloba de alguna manera a los otros dos) que consiste en aproximar una función  $f$  definida en  $[-L, L]$  por una suma de la forma

$$a_0 + \sum_{n=1}^N a_n \cos \frac{n\pi x}{L} + b_n \sin \frac{n\pi x}{L}. \quad (9.1)$$

Estas sumas se denominan *polinomios trigonométricos*.

### 9.1. Ortogonalidad de funciones

El producto escalar natural de vectores  $\mathbb{R}^N$  es el dado por  $\bar{x} \cdot \bar{y} = \sum_{i=1}^N x_i y_i$ , es decir, la suma del producto de sus componentes correspondientes. Como ya vimos desde el primer capítulo, la generalización de suma (por ejemplo para calcular promedios) cuando se trata de funciones definidas sobre un intervalo, es la integral. Así, definimos para funciones definidas sobre el intervalo  $[-L, L]$  los siguientes conceptos análogos a los del espacio de dimensión finita  $\mathbb{R}^N$ .

Espacio $\mathbb{R}^N$	Espacio de funciones sobre $[-L, L]$
Producto escalar, producto interno, o producto punto	
$\bar{x} \cdot \bar{y} = \sum_{i=1}^N x_i y_i$	$\langle f, g \rangle = \int_{-L}^L f(x)g(x) dx$
Norma, magnitud, tamaño	
$ \bar{x}  = \sqrt{\bar{x} \cdot \bar{x}} = \left( \sum_{i=1}^N x_i^2 \right)^{\frac{1}{2}}$	$\ f\  = \sqrt{\langle f, f \rangle} = \left( \int_{-L}^L f(x)^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}$
Distancia	
$ \bar{x} - \bar{y}  = \left( \sum_{i=1}^N (x_i - y_i)^2 \right)^{\frac{1}{2}}$	$\ f - g\  = \left( \int_{-L}^L [f(x) - g(x)]^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}$
Ortogonalidad o perpendicularidad	
$\bar{x} \perp \bar{y} \iff \bar{x} \cdot \bar{y} = 0$	$f \perp g \iff \langle f, g \rangle = 0$ $\iff \int_{-L}^L f(x)g(x) dx = 0$
Desigualdad de Cauchy-Schwarz	
$ \bar{x} \cdot \bar{y}  \leq  \bar{x}   \bar{y} $	$ \langle f, g \rangle  \leq \ f\  \ g\ $ $\int_{-L}^L f(x)g(x) dx \leq \left( \int_{-L}^L f(x)^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \left( \int_{-L}^L g(x)^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}$

Recordamos también que si  $\bar{a}$  es un vector unitario, entonces  $\bar{x} \cdot \bar{a}$  es la componente de  $x$  en la dirección de  $\bar{a}$ . Más aún, si  $a_i, i = 1, 2, \dots, N$  es una base *ortonormal*<sup>1</sup> de  $\mathbb{R}^N$ , entonces

$$x = \sum_{i=1}^N (\bar{x} \cdot \bar{a}_i) \bar{a}_i. \quad (9.2)$$

Algo parecido ocurre cuando tomamos una sucesión de funciones ortogonales.

---

<sup>1</sup> $\{\bar{a}_i\}_{i=1}^N$  es una base ortonormal de  $\mathbb{R}^N$  si  $\bar{a}_i \cdot \bar{a}_j = \delta_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq j \\ 1 & \text{si } i = j \end{cases}$ . Es decir,  $a_i \perp a_j$  si  $i \neq j$  y  $|a_i| = 1$ .

Retomemos el estudio de las funciones senos y cosenos del capítulo anterior, es decir, consideremos la sucesión

$$\underbrace{1}_{c_0}, \quad \underbrace{\cos \frac{\pi x}{L}}_{c_1(x)}, \quad \underbrace{\operatorname{sen} \frac{\pi x}{L}}_{s_1(x)}, \quad \underbrace{\cos \frac{2\pi x}{L}}_{c_2(x)}, \quad \underbrace{\operatorname{sen} \frac{2\pi x}{L}}_{s_2(x)}, \quad \underbrace{\cos \frac{3\pi x}{L}}_{c_3(x)}, \quad \underbrace{\operatorname{sen} \frac{3\pi x}{L}}_{s_3(x)}, \quad \dots$$

Vimos en ese capítulo que se cumplen las siguientes relaciones (ver (8.39))

$$\begin{aligned} \langle c_n, c_m \rangle &= \delta_{n,m}L = \begin{cases} 0 & \text{si } n \neq m \\ L & \text{si } n = m \end{cases}, \quad n, m = 1, 2, 3, \dots, \\ \langle s_n, s_m \rangle &= \delta_{n,m}L, \quad n, m = 1, 2, 3, \dots, \\ \langle c_n, s_m \rangle &= 0, \quad n, m = 1, 2, 3, \dots, \\ \langle c_0, s_n \rangle &= 0, \quad n = 1, 2, 3, \dots, \\ \langle c_0, c_n \rangle &= 0, \quad n = 1, 2, 3, \dots, \\ \langle c_0, c_0 \rangle &= 2L. \end{aligned}$$

En palabras:

Las funciones de la familia  $c_1, c_1, s_1, c_2, s_2, \dots$ , son ortogonales y

$$\|c_0\|^2 = 2L, \quad \|c_n\|^2 = L, \quad \|s_n\|^2 = L, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Como consecuencia de estas identidades se tiene el siguiente teorema.

**Teorema 9.1.** *Si*

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^N a_n \cos \frac{n\pi x}{L} + b_n \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L}, \quad (9.3)$$

entonces los coeficientes  $a_0, a_n, b_n$  cumplen:

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{2L} \int_{-L}^L f(x) dx = \frac{1}{2L} \langle f, c_0 \rangle \\ a_n &= \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \cos \frac{n\pi x}{L} dx = \frac{1}{L} \langle f, c_n \rangle, \quad n = 1, 2, \dots, N, \\ b_n &= \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} dx = \frac{1}{L} \langle f, s_n \rangle, \quad n = 1, 2, \dots, N. \end{aligned}$$

La demostración de este teorema fue hecha en la página 123, a continuación de las identidades (8.39).

**Observación 9.2.** Si escribimos la fórmula para los coeficientes dentro de (9.3) obtenemos

$$f(x) = \frac{\langle f, c_0 \rangle}{\|c_0\|^2} c_0(x) + \sum_{n=1}^N \frac{\langle f, c_n \rangle}{\|c_n\|^2} c_n(x) + \sum_{n=1}^N \frac{\langle f, s_n \rangle}{\|s_n\|^2} s_n(x)$$

Si definimos

$$\tilde{c}_0 = \frac{c_0}{\|c_0\|}, \quad \tilde{c}_n = \frac{c_n}{\|c_n\|}, \quad \tilde{s}_n = \frac{s_n}{\|s_n\|}, \quad n = 1, 2, 3, \dots,$$

entonces la fórmula anterior puede reescribirse como

$$f(x) = \langle f, \tilde{c}_0 \rangle \tilde{c}_0(x) + \sum_{n=1}^N \langle f, \tilde{c}_n \rangle \tilde{c}_n(x) + \sum_{n=1}^N \langle f, \tilde{s}_n \rangle \tilde{s}_n(x),$$

que es análoga a (9.2).

## 9.2. Serie de Fourier. Definición y ejemplos

Es claro que no toda función es de la forma (9.3), pues estas son siempre  $C^\infty[-L, L]$  y existen funciones no tan suaves, u otras suaves pero que no coinciden con una suma finita de senos y cosenos. Las funciones cuyas gráficas se observan en la Figura 9.1 son ejemplos de tales funciones.

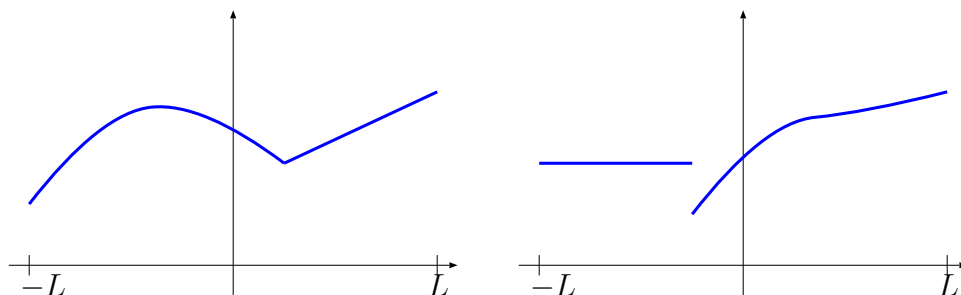


Figura 9.1: Gráficas de funciones que no son de la forma (9.3).

Sin embargo, casi siempre podemos definir los coeficientes de Fourier, y su correspondiente *serie*.

**Definición 9.3** (Serie de Fourier). Sea  $f(x)$  definida sobre el intervalo  $[-L, L]$  tal que las siguientes integrales están bien definidas:

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{2L} \int_{-L}^L f(x) dx = \frac{1}{2L} \langle f, c_0 \rangle, \\ a_n &= \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \cos \frac{n\pi x}{L} dx = \frac{1}{L} \langle f, c_n \rangle, \quad n = 1, 2, \dots, N, \\ b_n &= \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \sin \frac{n\pi x}{L} dx = \frac{1}{L} \langle f, s_n \rangle, \quad n = 1, 2, \dots, N. \end{aligned}$$

Definimos entonces la *serie de Fourier de f* por

$$\text{SF } f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi x}{L} + b_n \sin \frac{n\pi x}{L},$$

y los coeficientes  $a_0, a_1, b_1, a_2, b_2, \dots$ , se llaman *coeficientes de Fourier de f*.

**Observación 9.4.** Si definimos la suma parcial de orden  $N$  de SF  $f$  por

$$\text{SF}_N f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^N a_n \cos \frac{n\pi x}{L} + b_n \text{sen} \frac{n\pi x}{L},$$

entonces por definición de serie, o suma infinita, resulta

$$\text{SF} f(x) = \lim_{N \rightarrow \infty} \text{SF}_N f(x).$$

**Observación 9.5.** Como veremos en las secciones siguientes, y como mencionamos en el capítulo anterior, para una gran familia de funciones se cumple que

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \text{SF}_N f(x) = f(x),$$

o lo que es lo mismo

$$\text{SF} f(x) = f(x),$$

o también

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi x}{L} + b_n \text{sen} \frac{n\pi x}{L}.$$

Lo que también es interesante es poder medir el error entre  $\text{SF}_N f(x)$  y  $f(x)$ , que también estudiaremos en esta sección y en las que siguen.

El primer resultado de aproximación de  $\text{SF}_N f$  a  $f$ , usando la norma integral  $\|\cdot\|$  definida al principio de esta sección está dado en la siguiente proposición.

**Proposición 9.6.** Sea  $\mathbb{V}_N$  el conjunto de todas las funciones que pueden escribirse como combinación lineal de  $c_0, c_1, s_1, c_2, s_2, \dots, c_N, s_N$ , entonces

$$\|f - \text{SF}_N f\| \leq \|f - g\|, \quad \text{para toda función } g \in \mathbb{V}_N.$$

**Observación 9.7.** La proposición anterior dice, en palabras, que  $\text{SF}_N f$  es la mejor aproximación a  $f$  desde el espacio  $\mathbb{V}_N$  (midiendo el error con la norma  $\|\cdot\|$ ), o lo que es lo mismo:

$$\|f - \text{SF}_N f\| = \min_{g \in \mathbb{V}_N} \|f - g\|.$$

*Demostración de la Proposición 9.6.* Observemos primero que el error  $f - \text{SF}_N f$  es ortogonal a cualquier función de  $\mathbb{V}_N$ . Primero lo vemos para todas las de la base  $c_0, c_1, s_1, c_2, s_2, \dots, c_N, s_N$ :

$$\begin{aligned} \langle f - \text{SF}_N f, \underbrace{c_0}_{=1} \rangle &= \langle f, c_0 \rangle - \langle \text{SF}_N f, c_0 \rangle \\ &= \langle f, c_0 \rangle - a_0 \underbrace{\langle c_0, c_0 \rangle}_{=2L} + \sum_{n=1}^N a_n \underbrace{\langle c_n, c_0 \rangle}_{=0} + b_n \underbrace{\langle s_n, c_0 \rangle}_{=0} \\ &= \langle f, c_0 \rangle - a_0 2L = \langle f, c_0 \rangle - \frac{\langle f, c_0 \rangle}{2L} 2L = 0. \end{aligned}$$



Para  $m = 1, 2, \dots, N$ ,

$$\begin{aligned}
\langle f - \text{SF}_N f, c_m \rangle &= \langle f, c_m \rangle - \langle \text{SF}_N f, c_m \rangle \\
&= \langle f, c_m \rangle - \left[ a_0 \underbrace{\langle c_0, c_m \rangle}_{=0} + \sum_{n=1}^N a_n \underbrace{\langle c_n, c_m \rangle}_{=\delta_{n,m}L} + b_n \underbrace{\langle s_n, c_m \rangle}_{=0} \right] \\
&= \langle f, c_m \rangle - a_m L = \langle f, c_m \rangle - \frac{\langle f, c_m \rangle}{L} L = 0,
\end{aligned}$$

y análogamente,

$$\begin{aligned}
\langle f - \text{SF}_N f, s_m \rangle &= \langle f, s_m \rangle - \langle \text{SF}_N f, s_m \rangle \\
&= \langle f, s_m \rangle - \left[ a_0 \underbrace{\langle c_0, s_m \rangle}_{=0} + \sum_{n=1}^N a_n \underbrace{\langle c_n, s_m \rangle}_{=0} + b_n \underbrace{\langle s_n, s_m \rangle}_{=\delta_{n,m}L} \right] \\
&= \langle f, s_m \rangle - b_m L = \langle f, s_m \rangle - \frac{\langle f, s_m \rangle}{L} L = 0.
\end{aligned}$$

Resumiendo,  $\langle f - \text{SF}_N f, c_0 \rangle = 0$ ,  $\langle f - \text{SF}_N f, c_n \rangle = 0$ , y  $\langle f - \text{SF}_N f, s_n \rangle = 0$ , para  $n = 1, 2, \dots, N$ . Si ahora  $v$  es cualquier función del conjunto  $\mathbb{V}_N$ , entonces se escribe como  $v = \bar{a}_0 c_0 + \sum_{n=1}^N \bar{a}_n c_n + \bar{b}_n s_n$ , y por lo tanto

$$\langle f - \text{SF} f, v \rangle = \bar{a}_0 \langle f - \text{SF} f, c_0 \rangle + \sum_{n=1}^N \bar{a}_n \langle f - \text{SF} f, c_n \rangle + \bar{b}_n \langle f - \text{SF} f, s_n \rangle = 0.$$

Finalmente, recordando la definición de norma dada en la tabla del principio de este capítulo, dada  $g \in \mathbb{V}_N$

$$\begin{aligned}
&\|f - \text{SF}_N f\|^2 \\
&= \langle f - \text{SF}_N f, f - \text{SF}_N f \rangle && \text{definición de norma} \\
&= \langle f - \text{SF}_N f, f - g + g - \text{SF}_N f \rangle && \text{sumamos y restamos } g \in \mathbb{V}_N \\
&= \langle f - \text{SF}_N f, f - g \rangle + \underbrace{\langle f - \text{SF}_N f, g - \text{SF}_N f \rangle}_{=v \in \mathbb{V}_N} && \text{linealidad del producto escalar} \\
&= \langle f - \text{SF}_N f, f - g \rangle && f - \text{SF}_N f \perp v \in \mathbb{V}_N \\
&\leq \|f - \text{SF}_N f\| \|f - g\|. && \text{Cauchy-Schwarz (ver tabla)}
\end{aligned}$$

Luego  $\|f - \text{SF}_N f\|^2 \leq \|f - \text{SF}_N f\| \|f - g\|$ , lo cual implica que

$$\|f - \text{SF}_N f\| \leq \|f - g\|,$$

para cualquier  $g \in \mathbb{V}_N$ . □

A continuación calcularemos los coeficientes de Fourier para algunas funciones  $f(x)$  a fin de comprender en base a experimentos de qué manera las sumas parciales  $\text{SF}_N f$  aproximan a  $f$ .

**Ejemplo 9.8.** Hallar la serie de Fourier de  $f(x) = x$  en  $[-L, L]$ . Lo que debemos hacer es calcular los coeficientes de Fourier  $a_0, a_1, b_1, a_2, b_2, \dots$

$$a_0 = \frac{1}{2L} \int_{-L}^L x \, dx = 0,$$

$$a_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L x \cos \frac{n\pi x}{L} \, dx = 0, \quad n = 1, 2, \dots \quad (\text{función par por impar es impar})$$

$$b_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L x \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} \, dx = -\frac{2L}{n\pi} \cos(n\pi) = \frac{2L}{n\pi} (-1)^{n+1}, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Para el cálculo de  $a_0$  y  $a_n, n = 1, 2, \dots$  hemos usado que la integral de una función impar en un intervalo simétrico respecto del origen es cero, y que el producto de una función par por una impar es impar (ver ejercicio 9.4). Para el cálculo de los  $b_n$  se usó el programa wxMaxima, disponible de manera gratuita en Internet. En la figura 9.2 se muestra el gráfico de  $\text{SF}_N f(x)$  para  $N = 1, 3, 5, 10, 25$ , y también el de  $\text{SF } f$ , comparado con  $f$  sobre el intervalo  $[-L, L]$ , tomando  $L = 2$ . Notar que para la definición de  $\text{SF } f(x)$  solo se

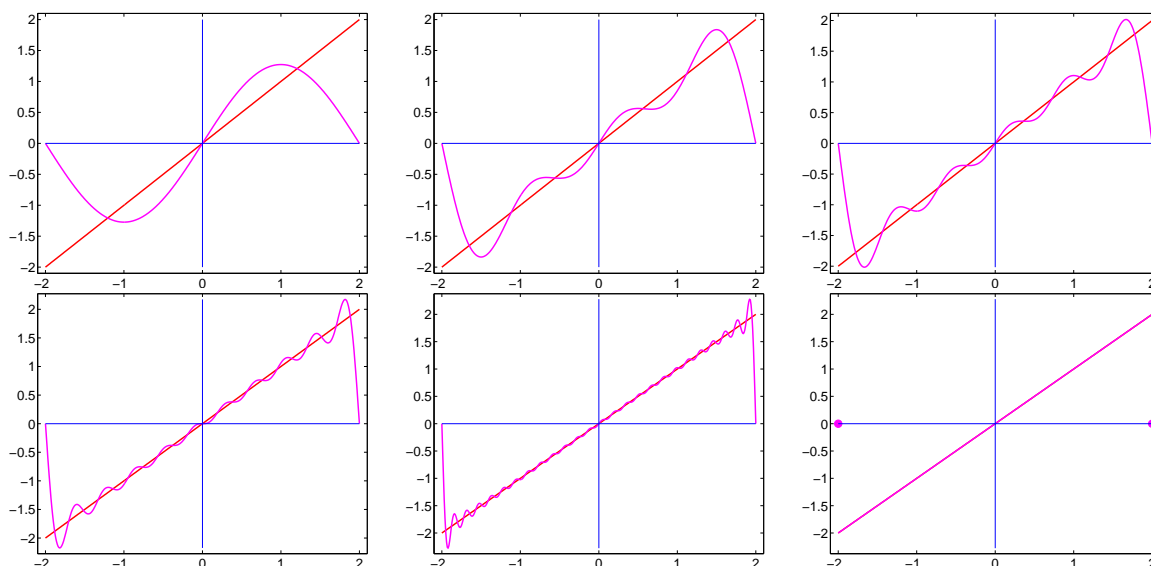


Figura 9.2: Gráficas de  $\text{SF}_N f(x)$  para  $N = 1, 3, 5, 10$  y  $\text{SF } f$  para  $f(x) = x$  en  $[-L, L]$  (usamos  $L = 2$ ).

usaron los valores de  $f(x)$  para  $-2 \leq x \leq 2$  y que sin embargo las funciones  $\text{SF}_N f(x)$  y  $\text{SF } f(x)$  están definidas en todo  $\mathbb{R}$ . En la figura 9.3 se muestra el gráfico de  $\text{SF}_{25} f(x)$  y también el de  $\text{SF } f$ , comparado con  $f$  sobre el intervalo  $[-6, 6]$ . El fenómeno de oscilación de magnitud grande de  $\text{SF}_N f(x)$  en los extremos del intervalo se denomina *Fenómeno de Gibbs*, y se debe a que para las condiciones que satisface  $f(x) = x$  son de alguna manera *incompatibles* con las condiciones periódicas que cumplen los senos y cosenos.

**Ejemplo 9.9.** Consideremos ahora la función  $f(x) = 3 + (x - L)^2(x + L)^2$ , cuyos coefi-

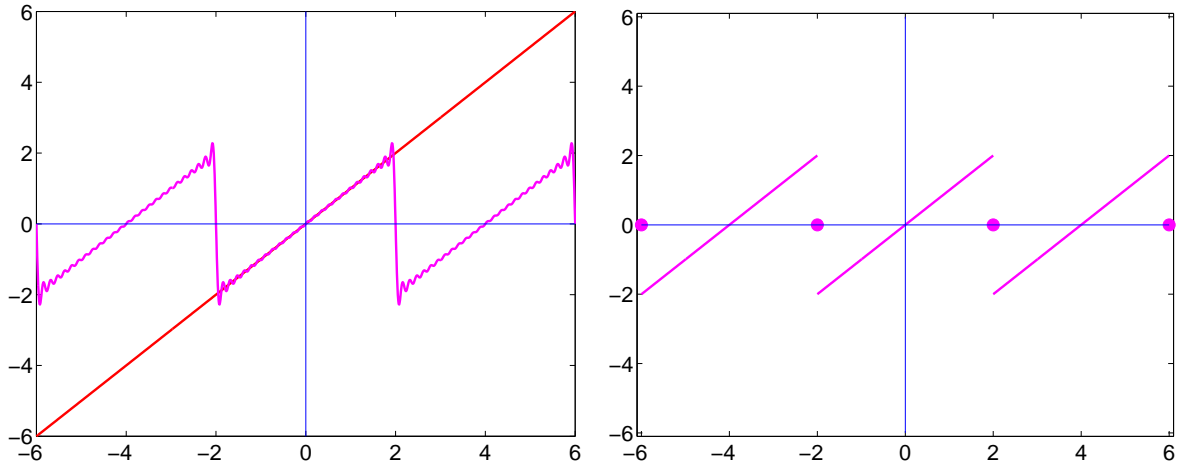


Figura 9.3: Gráficas de  $SF_{25} f(x)$  (izquierda) y  $SF f$  (derecha) para  $f(x) = x$  en  $[-2, 2]$ , pero graficadas sobre el intervalo  $[-6, 6]$ .

cientes de Fourier son

$$\begin{aligned}
 a_0 &= \frac{1}{15}(8L^4 + 45), \\
 a_n &= -\frac{48}{n^4\pi^4} \cos(n\pi) = \frac{48}{n^4\pi^4}(-1)^{n+1}, \quad n = 1, 2, \dots, \\
 b_n &= 0, \quad n = 1, 2, \dots
 \end{aligned}$$

En la figura 9.4 se muestra el gráfico de  $SF_N f(x)$  para  $N = 1, 3, 5$ , y también el de  $SF f$ , comparado con  $f$  sobre el intervalo  $[-1, 1]$ . Notar nuevamente que para la definición de  $SF f(x)$  solo se usaron los valores de  $f(x)$  para  $-L \leq x \leq L$  y que sin embargo las funciones  $SF_N f(x)$  y  $SF f(x)$  están definidas en todo  $\mathbb{R}$ . En la figura 9.5 se muestra el gráfico de  $SF_{25} f(x)$  y también el de  $SF f$ , comparado con  $f$  sobre el intervalo  $[-3L, 3L]$ .

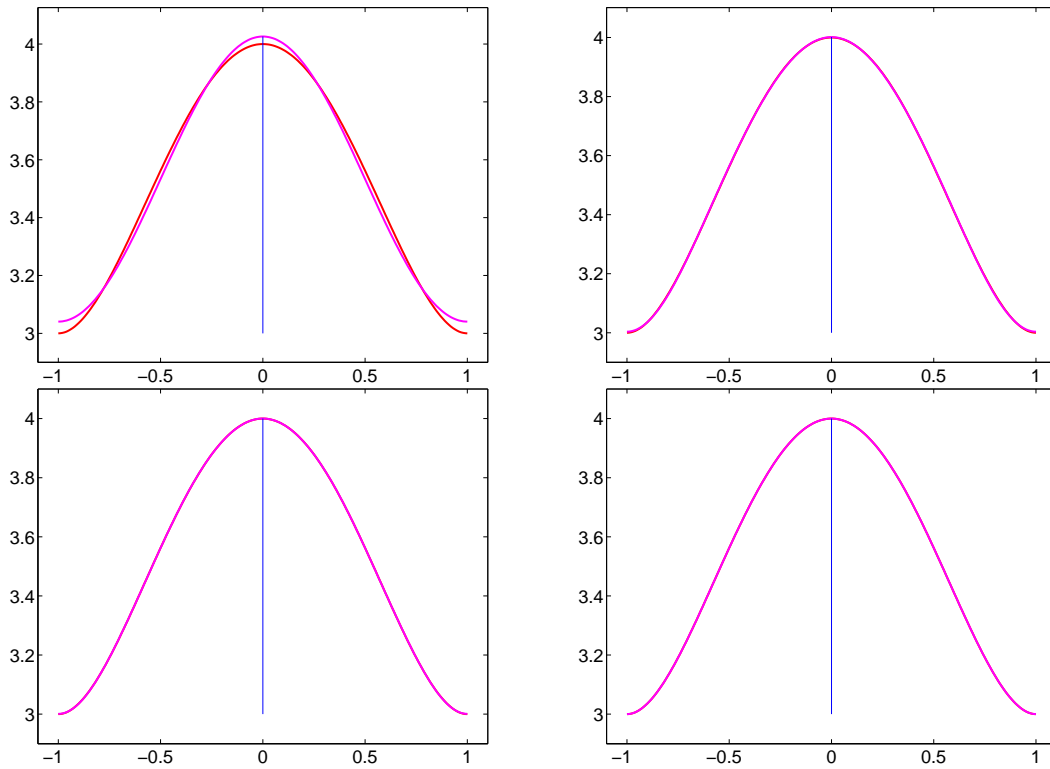


Figura 9.4: Gráficas de  $SF_N f(x)$  para  $N = 1, 3, 5$  y  $SF f$  para  $f(x) = 3 + (x - L)^2(x + L)$ , con  $L = 1$ .

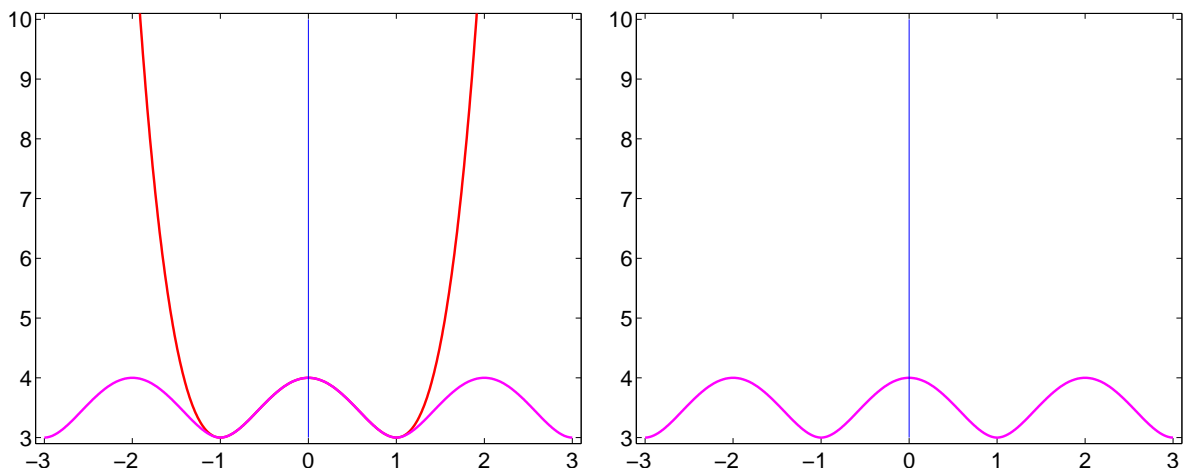


Figura 9.5: Gráficas de  $SF_{10} f(x)$  (izquierda) y  $SF f$  (derecha) para  $f(x) = 3 + (x - L)^2(x + L)$  en  $[-1, 1]$  ( $L = 1$ ), pero graficadas sobre el intervalo  $[-3, 3]$ .

**Ejemplo 9.10.** Consideremos ahora la función  $f(x) = |x|$ , cuyos coeficientes de Fourier son

$$a_0 = \frac{L}{2}$$

$$a_n = \frac{2L}{n^2\pi^2} (\cos n\pi - 1) = \frac{2L}{n^2\pi^2} ((-1)^n - 1), \quad n = 1, 2, \dots,$$

$$b_n = 0, \quad n = 1, 2, \dots$$

En la figura 9.6 se muestra el gráfico de  $\text{SF}_N f(x)$  para  $N = 1, 3, 5$ , y también el de  $\text{SF} f$ , comparado con  $f$  sobre el intervalo  $[-1, 1]$ . Notar nuevamente que para la definición de

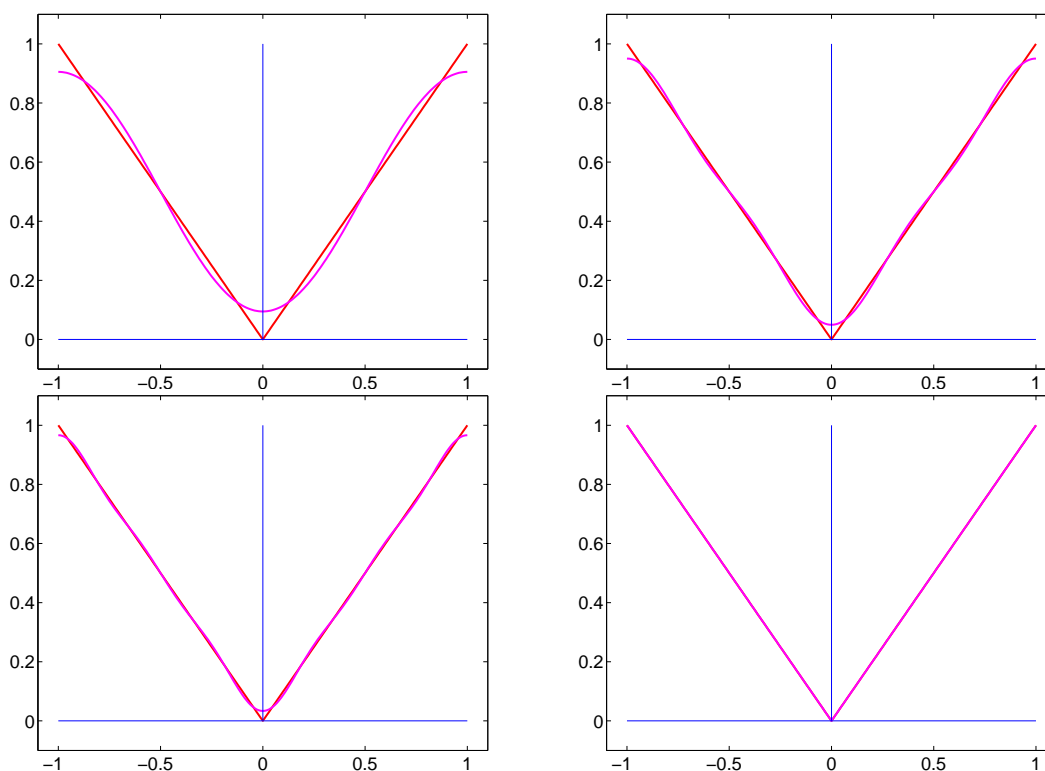


Figura 9.6: Gráficas de  $\text{SF}_N f(x)$  para  $N = 1, 3, 5$  y  $\text{SF} f$  para  $f(x) = |x|$ , con  $L = 1$ .

$\text{SF} f(x)$  solo se usaron los valores de  $f(x)$  para  $-L \leq x \leq L$  y que sin embargo las funciones  $\text{SF}_N f(x)$  y  $\text{SF} f(x)$  están definidas en todo  $\mathbb{R}$ . En la figura 9.7 se muestra el gráfico de  $\text{SF}_5 f(x)$  y también el de  $\text{SF} f$ , comparado con  $f$  sobre el intervalo  $[-3, 3]$ .

**Ejemplo 9.11.** Consideremos ahora la función

$$f(x) = (x)_+ := \begin{cases} x, & \text{si } x > 0, \\ 0, & \text{si } x \leq 0, \end{cases}$$

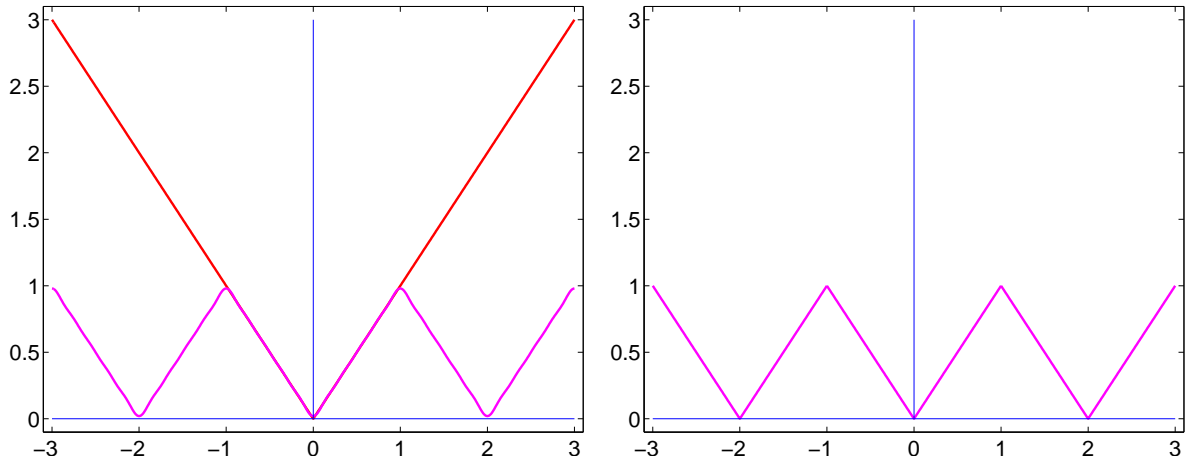


Figura 9.7: Gráficas de  $SF_{10} f(x)$  (izquierda) y  $SF f$  (derecha) para  $f(x) = |x|$  en  $[-1, 1]$  ( $L = 1$ ), pero graficadas sobre el intervalo  $[-3, 3]$ .

cuyos coeficientes de Fourier son

$$\begin{aligned}
 a_0 &= \frac{L}{4} \\
 a_n &= \frac{L}{n^2\pi^2}(\cos n\pi - 1) = \frac{L}{n^2\pi^2}((-1)^n - 1), \quad n = 1, 2, \dots, \\
 b_n &= -\frac{L}{n\pi} \cos n\pi = -\frac{L}{n\pi}(-1)^n, \quad n = 1, 2, \dots
 \end{aligned}$$

En la figura 9.8 se muestra el gráfico de  $SF_N f(x)$  para  $N = 1, 5, 15$ , y también el de  $SF f$ , comparado con  $f$  sobre el intervalo  $[-1, 1]$ . Notar nuevamente que para la definición de  $SF f(x)$  solo se usaron los valores de  $f(x)$  para  $-L \leq x \leq L$  y que sin embargo las funciones  $SF_N f(x)$  y  $SF f(x)$  están definidas en todo  $\mathbb{R}$ . En la figura 9.9 se muestra el gráfico de  $SF_{15} f(x)$  y también el de  $SF f$ , comparado con  $f$  sobre el intervalo  $[-3, 3]$ .

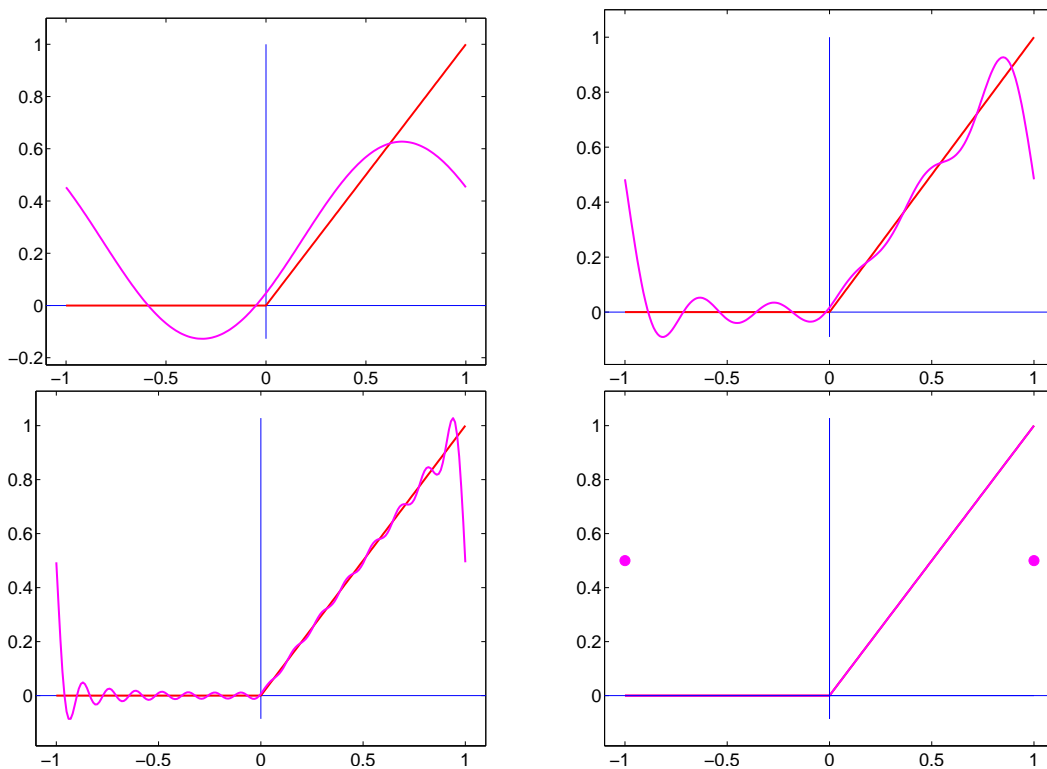


Figura 9.8: Gráficas de  $SF_N f(x)$  para  $N = 1, 5, 15$  y  $SF f$  para  $f(x) = (x)_+$ , con  $L = 1$ .

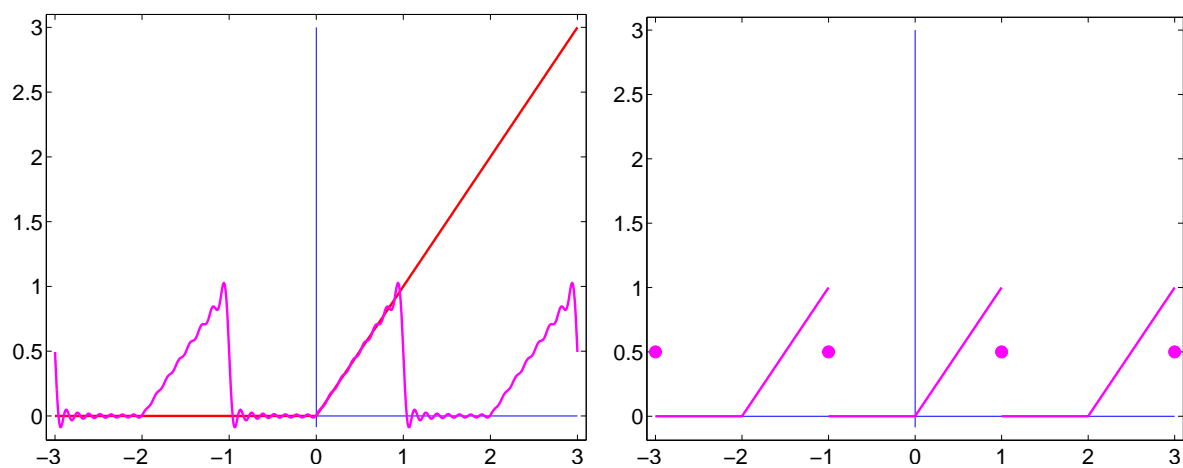


Figura 9.9: Gráficas de  $SF_{15} f(x)$  (izquierda) y  $SF f$  (derecha) para  $f(x) = (x)_+$  en  $[-1, 1]$  ( $L = 1$ ), pero graficadas sobre el intervalo  $[-3, 3]$ .

**Ejemplo 9.12.** Consideremos el último ejemplo dado por la función

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } x > 0, \\ 0, & \text{si } x \leq 0, \end{cases}$$

cuyos coeficientes de Fourier son

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{2} \\ a_n &= 0, \quad n = 1, 2, \dots, \\ b_n &= \frac{1}{n\pi}(1 - \cos n\pi) = \frac{1}{n\pi}(1 - (-1)^n), \quad n = 1, 2, \dots \end{aligned}$$

En la figura 9.10 se muestra el gráfico de  $SF_N f(x)$  para  $N = 1, 5, 15$ , y también el de  $SF f$  sobre el intervalo  $[-1, 1]$ . Notar nuevamente que para la definición de  $SF f(x)$  solo

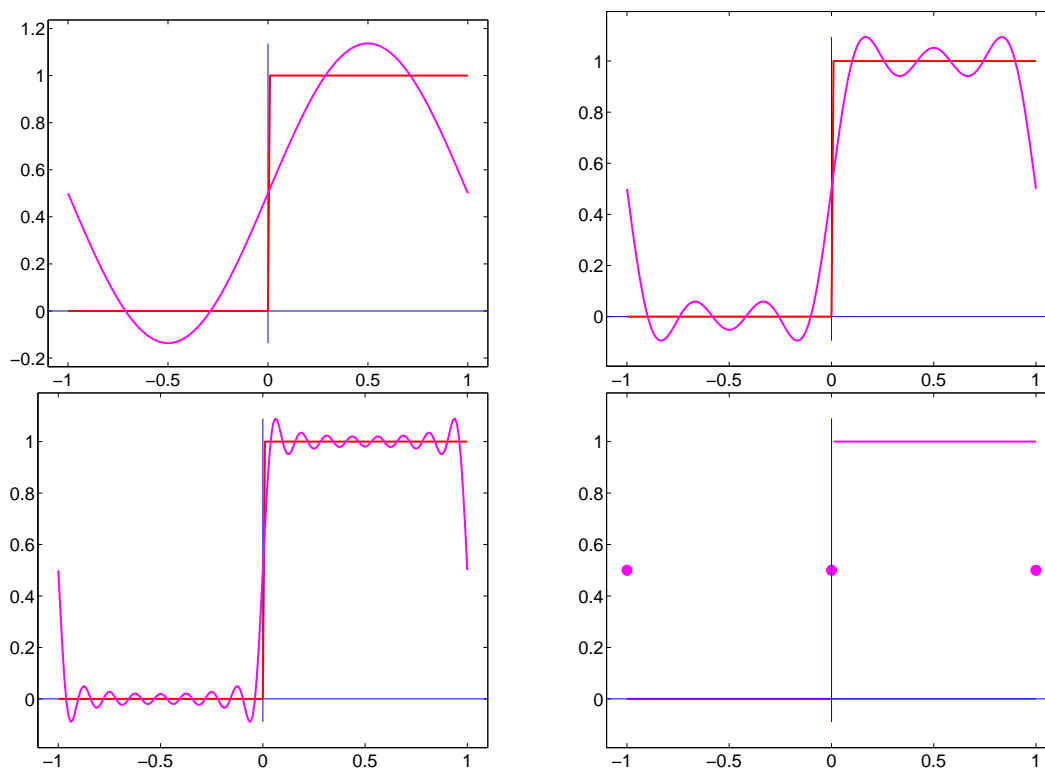


Figura 9.10: Gráficas de  $SF_N f(x)$  para  $N = 1, 5, 15$  y  $SF f$  para  $f(x) = 1$  si  $x > 0$  y  $f(x) = 0$  si  $x \leq 0$ , con  $L = 1$ .

se usaron los valores de  $f(x)$  para  $-L \leq x \leq L$  y que sin embargo las funciones  $SF_N f(x)$  y  $SF f(x)$  están definidas en todo  $\mathbb{R}$ . En la figura 9.11 se muestra el gráfico de  $SF_{15} f(x)$  y también el de  $SF f$ , comparado con  $f$  sobre el intervalo  $[-3, 3]$ .

### 9.3. La convergencia de las series de Fourier

En esta sección veremos algunos resultados de convergencia de las series de Fourier.



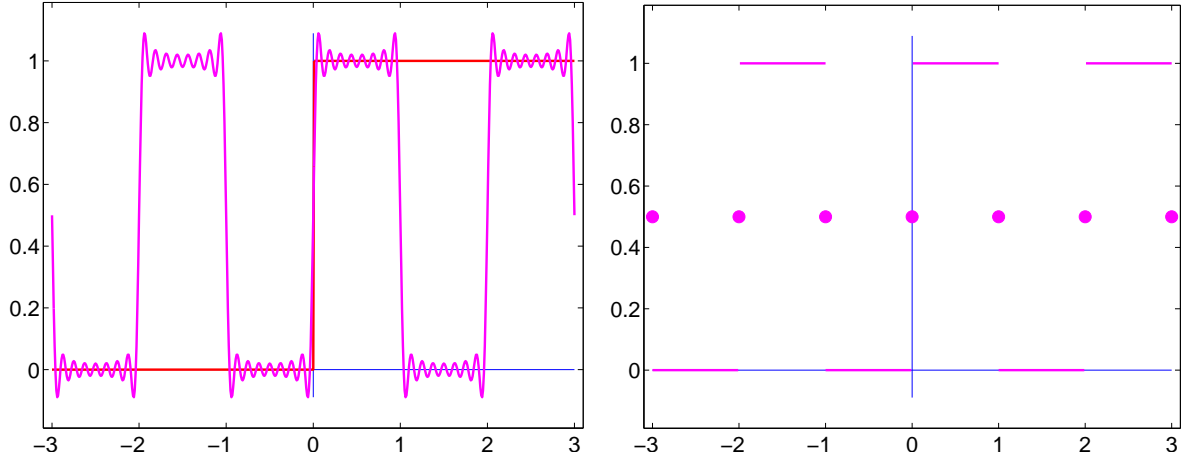


Figura 9.11: Gráficas de  $SF_{15} f(x)$  (izquierda) y  $SF f$  (derecha) para  $f(x) = (x)_+$  en  $[-1, 1]$  ( $L = 1$ ), pero graficadas sobre el intervalo  $[-3, 3]$ .

Observemos primero que dada una función  $f(x)$  definida en  $[-L, L]$  la suma parcial de  $N$  términos de su serie de Fourier es

$$\begin{aligned}
 SF_N f(x_0) &= a_0 + \sum_{n=1}^N a_n \cos \frac{n\pi x_0}{L} + b_n \operatorname{sen} \frac{n\pi x_0}{L} \\
 &= \int_{-L}^L \frac{1}{2L} f(x) dx \\
 &\quad + \sum_{n=1}^N \int_{-L}^L \frac{1}{L} f(x) \cos \frac{n\pi x}{L} dx \cos \frac{n\pi x_0}{L} + \int_{-L}^L \frac{1}{L} f(x) \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} dx \operatorname{sen} \frac{n\pi x_0}{L} \\
 &= \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \left[ \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^N \cos \frac{n\pi x}{L} \cos \frac{n\pi x_0}{L} + \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} \operatorname{sen} \frac{n\pi x_0}{L} \right] dx \\
 &= \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \underbrace{\left[ \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^N \cos \frac{n\pi(x-x_0)}{L} \right]}_{D_N(x-x_0)} dx.
 \end{aligned}$$

Es decir, la suma parcial de orden  $N$  se puede expresar de manera compacta como una integral involucrando al llamado *núcleo de Dirichlet*  $D_N$ :

$$SF_N f(x_0) = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) D_N(x - x_0) dx,$$

con

$$D_N(x) = \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^N \cos \frac{n\pi x}{L}.$$

La primera propiedad que podemos ver que satisface el núcleo de Dirichlet es que  $D_N(x)$  es periódica de período  $2L$ , es decir,  $D_N(x + 2L) = D_N(x)$  para todo  $x \in \mathbb{R}$  y por lo tanto su gráfica se repite en intervalos consecutivos de longitud  $2L$ . Otra propiedad es

la siguiente:

$$\int_{-L}^L D_N(x) dx = \int_{-L}^L \frac{1}{2} dx + \sum_{n=1}^N \int_{-L}^L \cos \frac{n\pi x}{L} dx = L,$$

y por lo tanto

$$\frac{1}{L} \int_{-L}^L D_N(x) dy = 1, \quad N = 1, 2, 3 \dots$$

Usando más identidades trigonométricas puede verse que

$$D_N(x) = \begin{cases} \frac{\operatorname{sen} \left( \frac{(n+\frac{1}{2})\pi x}{L} \right)}{2 \operatorname{sen} \left( \frac{\pi x}{2L} \right)}, & \text{si } \operatorname{sen} \left( \frac{\pi x}{2L} \right) \neq 0, \\ n + \frac{1}{2}, & \text{si } \operatorname{sen} \left( \frac{\pi x}{2L} \right) = 0. \end{cases}$$

A partir de esta nueva fórmula elaboramos la gráfica de  $D_N$  sobre  $[-L, L]$  para diferentes valores de  $N$ , que puede observarse en la Figura 9.12. Vemos en la gráfica que la función

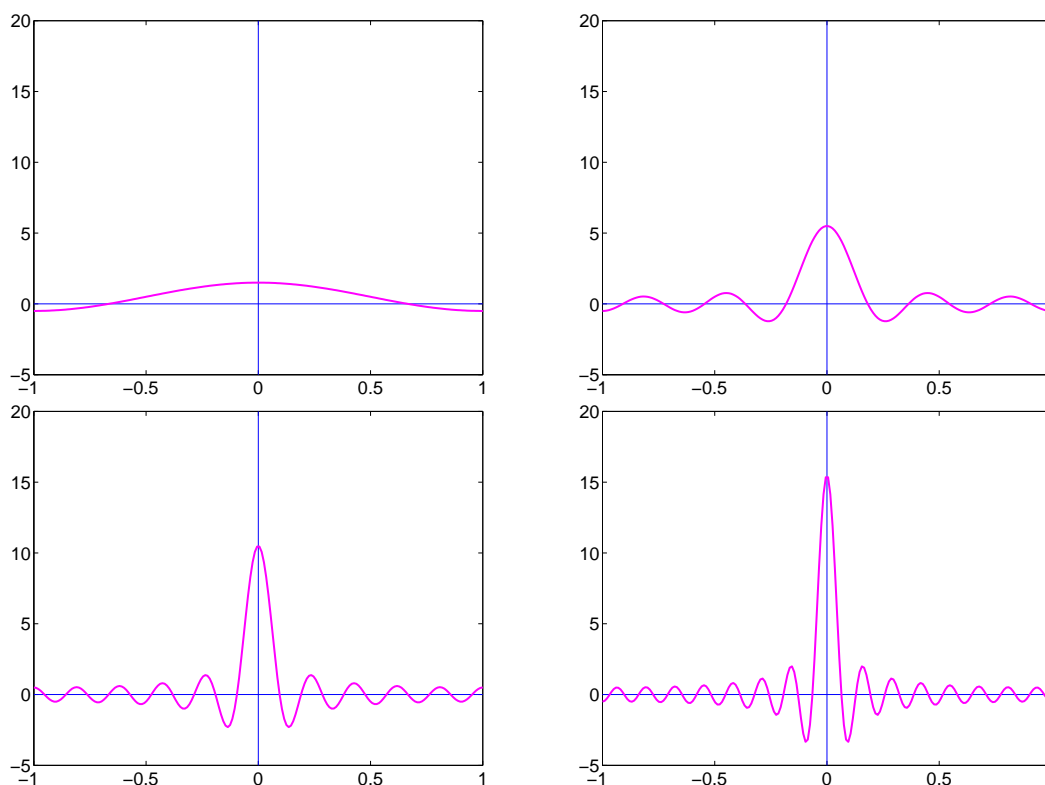


Figura 9.12: Gráficas de  $D_N(x)$  para  $N = 1, 5, 10, 15$  y  $L = 1$  en el intervalo  $[-L, L]$ .

$D_N(x)$  es más oscilante para  $N$  más grande, pero se *concentra* alrededor del origen. Uno tendería entonces a pensar que  $\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) D_N(x) dx = f(0)$  siempre que  $f(x)$  sea continua en  $x = 0$ . Debido a las oscilaciones de  $D_N(x)$ , esta afirmación es cierta cuando además de continua,  $f$  es  $C^1$  a trozos, como lo establece la siguiente proposición.

**Proposición 9.13.** Sea  $f(x)$  una función  $C^1$  a trozos y continua en  $[-L, L]$ . Entonces

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) D_N(x) dx = f(0).$$

La demostración de esta proposición escapa al interés de este apunte; los interesados pueden encontrarla en el Capítulo 4 del libro [Bleecker-Csordas 1996]. Como consecuencia de este resultado, solo trasladando el núcleo de Dirichlet, y usando que es periódico de período  $2L$  obtenemos el siguiente corolario.

**Corolario 9.14.** Sea  $f(x)$  una función  $C^1$  a trozos y continua en  $[-L, L]$ , que satisface  $f(-L) = f(L)$ . Entonces

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) D_N(x - x_0) dx = f(x_0), \quad \text{para cada } x_0 \in [-L, L].$$

Ahora sí, dado que  $\frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) D_N(x - x_0) dx = \text{SF}_N f(x_0)$ , tenemos que

**Teorema 9.15.** Sea  $f(x)$  una función  $C^1$  a trozos y continua en  $[-L, L]$ , que satisface  $f(-L) = f(L)$ . Entonces

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \text{SF}_N f(x) = f(x), \quad \text{para cada } x \in [-L, L].$$

Equivalentemente podemos escribir:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} a_0 + \sum_{n=1}^N a_n \cos \frac{n\pi x}{L} + b_n \sin \frac{n\pi x}{L} = f(x), \quad \text{para cada } x \in [-L, L].$$

o también

$$\text{SF} f(x) = f(x), \quad \text{para cada } x \in [-L, L],$$

que es lo mismo que decir

$$a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi x}{L} + b_n \sin \frac{n\pi x}{L} = f(x), \quad \text{para cada } x \in [-L, L].$$

### 9.3.1. Convergencia puntual

Concluimos, en base a los ejemplos vistos en la Sección 9.2 que cuando  $f$  es discontinua o cuando  $f(-L) \neq f(L)$  la serie de Fourier converge en esos puntos de discontinuidad al valor medio de los límites laterales. Eso se debe a que

$$\frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) D_N(x) dx = \frac{1}{L} \left[ \int_{-L}^0 f(x) D_N(x) dx + \int_0^L f(x) D_N(x) dx \right],$$

y las integrales del lado derecho, multiplicadas por  $\frac{1}{L}$  convergen a  $\frac{f(0^-)}{2}$  y  $\frac{f(0^+)}{2}$  respectivamente, donde  $f(0^-) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$  y  $f(0^+) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ .

Motivados por esta observación hacemos la siguiente definición.

**Definición 9.16.** Sea  $f(x)$  una función  $C^1$  a trozos en  $[-L, L]$ . Cambiando los valores de  $f(x)$  en algunos puntos obtenemos la *función arreglada*  $\bar{f}(x)$  que se define como sigue:

$$\bar{f}(x) = \begin{cases} \frac{f(x^+) + f(x^-)}{2}, & \text{si } -L < x < L, \\ \frac{f(-L^+) + f(L^-)}{2}, & \text{si } x = \pm L, \end{cases} \quad (9.4)$$

donde  $f(x_0^+) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$  y  $f(x_0^-) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$ .

**Observación 9.17.** Si  $f(x)$  es continua en  $[-L, L]$  entonces  $\bar{f}(x) = f(x)$  para todo  $x \in (-L, L)$  ( $-L < x < L$ ) y  $\bar{f}(\pm L) = \frac{f(-L^+) + f(L^-)}{2}$ .

Si  $f(x)$  es continua y además  $f(-L) = f(L)$ , entonces  $\bar{f}(x) = f(x)$  para todo  $x \in [-L, L]$  ( $-L \leq x \leq L$ ).

En la Figura 9.13 vemos algunos ejemplos gráficos de funciones  $f$  y sus correspondientes funciones arregradas  $\bar{f}$ .

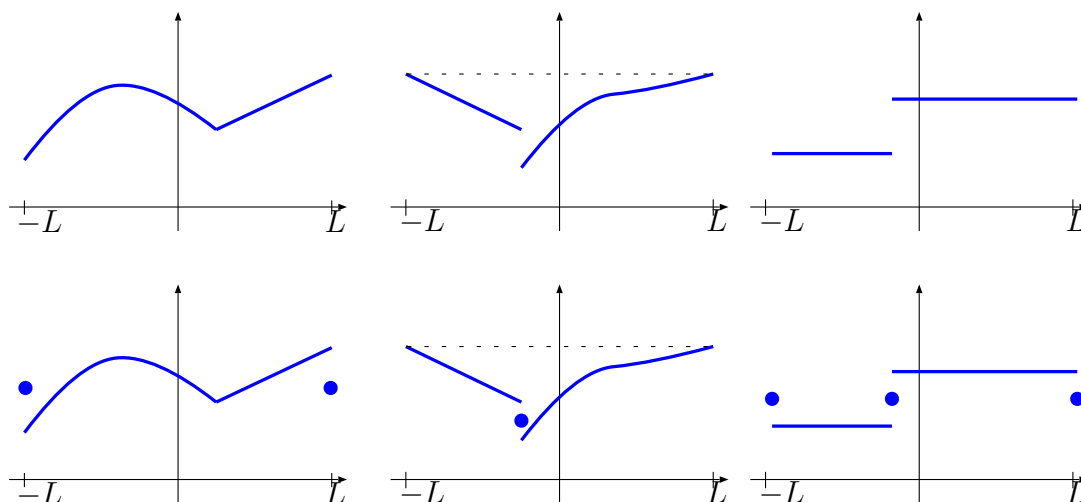


Figura 9.13: Ejemplos gráficos de funciones  $f$  (arriba) y sus correspondientes funciones arregradas  $\bar{f}$  (abajo).

Enunciamos a continuación un segundo resultado de convergencia de series de Fourier, cuya demostración puede encontrarse en el Capítulo 4 del libro [Bleeker-Csordas 1996].

**Teorema 9.18.** Sea  $f(x)$  una función  $C^1$  a trozos en  $[-L, L]$  y sea  $\bar{f}(x)$  la función arreglada de  $f$  según (9.4). Entonces

$$\text{SF } f(x) = \bar{f}(x), \quad \text{para cada } x \in [-L, L],$$

es decir,

$$\lim_{N \rightarrow \infty} a_0 + \sum_{n=1}^N a_n \cos \frac{n\pi x}{L} + b_n \sin \frac{n\pi x}{L} = \bar{f}(x), \quad \text{para cada } x \in [-L, L].$$

Más aún, si  $\tilde{f}$  es la extensión periódica de  $\bar{f}$ , entonces

$$\text{SF } f(x) = \tilde{f}(x), \quad \text{para cada } x \in \mathbb{R},$$

o,

$$\lim_{N \rightarrow \infty} a_0 + \sum_{n=1}^N a_n \cos \frac{n\pi x}{L} + b_n \text{sen} \frac{n\pi x}{L} = \tilde{f}(x), \quad \text{para cada } x \in \mathbb{R}.$$

En la Figura 9.14 se pueden ver las extensiones periódicas de las funciones arregladas de la Figura 9.13.

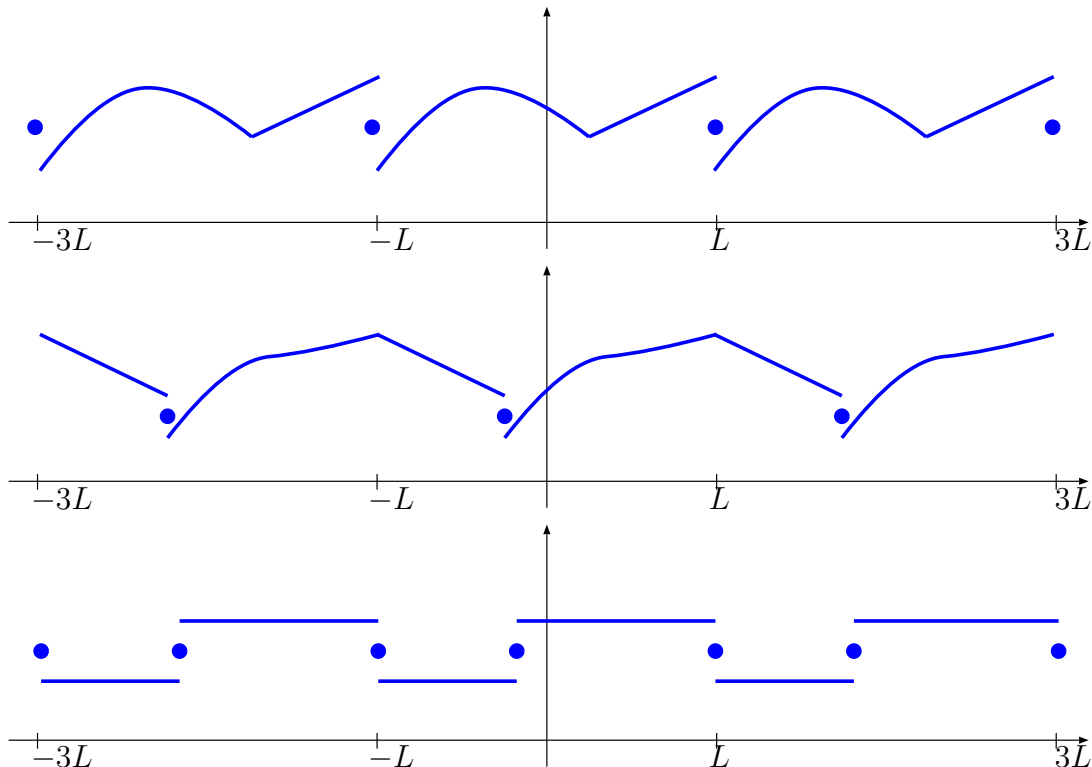


Figura 9.14: Gráficos de las extensiones periódicas de las funciones arregladas de la Figura 9.13, sobre el intervalo  $[-3L, 3L]$ .

**Observación 9.19.** El Teorema 9.18 nos dice que para cada  $x \in [-L, L]$  (fijo) se cumple que  $\lim_{N \rightarrow \infty} \text{SF}_N f(x) = \bar{f}(x)$ . Notemos que si  $f$  es discontinua en algún punto, o si no se cumple que  $f(-L) = f(L)$ , entonces no es cierto que  $\max_{-L \leq x \leq L} |\text{SF}_N f(x) - \bar{f}(x)| \rightarrow 0$ . Esta convergencia es la que se conoce como *convergencia uniforme*, y se sabe que si una sucesión de funciones continuas converge *uniformemente* a otra, entonces la función límite es también continua. Por lo tanto como las funciones  $\text{SF}_N f(x)$  son continuas y valen lo mismo en  $-L$  y  $L$ , si se cumpliera que  $\max_{-L \leq x \leq L} |\text{SF}_N f(x) - \bar{f}(x)| \rightarrow 0$ , resultaría necesariamente que  $f$  es continua y  $f(-L) = f(L)$ .

**Observación 9.20** (Fenómeno de Gibbs). Cuando la función  $f$  tiene una discontinuidad esencial (no evitable) o cuando  $f(L^-) \neq f(-L^+)$ , al aproximarla con su serie de Fourier ocurre el llamado *Fenómeno de Gibbs*, por el que las sumas parciales de las series de

Fourier aproximan mal a la función en un entorno de la discontinuidad. A medida que sumamos más términos de la serie, el entorno se achica, pero el overshooting/undershooting no disminuye por debajo de un cierto umbral (Ver Figuras 9.2, 9.8, 9.10).

### 9.3.2. Convergencia uniforme

El Teorema 9.15 nos dice que *para cada*  $x \in [-L, L]$  se cumple que  $\lim_{N \rightarrow \infty} \text{SF}_N f(x) = f(x)$ , pero bajo esas hipótesis se cumple un resultado un poco más fuerte, que es el siguiente:

**Teorema 9.21.** *Sea  $f(x)$  una función continua y  $C^1$  a trozos en  $[-L, L]$  tal que  $f(-L) = f(L)$  entonces*

$$\max_{-L \leq x \leq L} |f(x) - \text{SF}_N f(x)| \rightarrow 0, \quad \text{cuando } N \rightarrow \infty.$$

**Observación 9.22.** Este último teorema nos dice que si  $f$  es continua en  $[-L, L]$  y  $C^1$  a trozos, y además cumple la condición de periodicidad  $f(-L) = f(L)$  entonces su serie de Fourier converge a  $f$  *uniformemente*. El máximo error entre  $\text{SF}_N f(x)$  y  $f(x)$  tiende a cero cuando  $N \rightarrow \infty$ . Vimos que esto no ocurre cuando  $f$  es discontinua o cuando  $f(-L) \neq f(L)$  debido al fenómeno de Gibbs.

A continuación vemos un teorema que bajo hipótesis más fuertes sobre  $f$  establece la convergencia uniforme de la serie de Fourier pero además presenta un *orden de convergencia*.

**Teorema 9.23.** *Sea  $f(x)$  una función de clase  $C^2$  en el intervalo  $[-L, L]$  tal que*

$$f(-L) = f(L) \quad \text{y} \quad f'(-L) = f'(L).$$

*Sean  $a_0, a_n, b_n, n = 1, 2, 3, \dots$  sus coeficientes de Fourier y sea  $M = \max_{[-L, L]} |f''|$ . Entonces, para cada  $N \geq 1$  se tiene que*

$$|f(x) - \text{SF}_N f(x)| \leq \frac{4L^2 M}{\pi^2} \frac{1}{N}, \quad \text{para todo } x \in [-L, L].$$

**Observación 9.24.** La afirmación precedente nos dice que si  $f$  tiene derivadas primeras y segundas continuas en  $[-L, L]$  y además cumple las condiciones de compatibilidad (periodicidad) de igualdad de  $f$  y también de  $f'$  en los extremos, entonces el error entre  $f(x)$  y la suma de  $N$  términos de su serie de Fourier es menor que una constante por  $\frac{1}{N}$ . Esto nos dice que dicho error tiende a cero *uniformemente*, tan rápido como  $\frac{1}{N}$ , y también nos da una manera de elegir  $N$  para aproximar con una tolerancia dada.

*Demostración del Teorema 9.23.* Por el Teorema 9.21 se cumple que  $\text{SF} f(x) = f(x)$  para

todo  $x \in [-L, L]$  y por lo tanto, para cada  $N \geq 1$ ,

$$\begin{aligned} f(x) - \text{SF}_N f(x) &= \text{SF} f(x) - \text{SF}_N f(x) \\ &= \left[ a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi x}{L} + b_n \text{sen} \frac{n\pi x}{L} \right] \\ &\quad - \left[ a_0 + \sum_{n=1}^N a_n \cos \frac{n\pi x}{L} + b_n \text{sen} \frac{n\pi x}{L} \right] \\ &= \left[ \sum_{n=N+1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi x}{L} + b_n \text{sen} \frac{n\pi x}{L} \right]. \end{aligned}$$

Por lo tanto, como  $|\cos \frac{n\pi x}{L}| \leq 1$  y  $|\text{sen} \frac{n\pi x}{L}| \leq 1$  se tiene que

$$|f(x) - \text{SF}_N f(x)| \leq \sum_{n=N+1}^{\infty} (|a_n| + |b_n|).$$

Veamos ahora si podemos acotar el tamaño de los coeficientes  $a_n$ ,  $b_n$ . Recordemos que  $c_n(x) = \cos \frac{n\pi x}{L}$  y que entonces  $c_n(x) = -\left(\frac{L}{n\pi}\right)^2 c_n''(x)$ . Luego, integrando por partes obtenemos

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) c_n(x) dx = -\frac{L}{n^2 \pi^2} \int_{-L}^L f(x) c_n''(x) dx \\ &= -\frac{L}{n^2 \pi^2} \left[ f(x) c_n'(x) \Big|_{x=-L}^{x=L} - \int_{-L}^L f'(x) c_n'(x) dx \right]. \end{aligned}$$

Como  $c_n'(x) = -\frac{n\pi}{L} s_n(x)$ , resulta que  $c_n'(-L) = c_n'(L) = 0$ , entonces  $f(x) c_n'(x) \Big|_{x=-L}^{x=L} = 0$  y luego

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{L}{n^2 \pi^2} \left[ \int_{-L}^L f'(x) c_n'(x) dx \right] \\ &= \frac{L}{n^2 \pi^2} \left[ f'(x) c_n(x) \Big|_{x=-L}^{x=L} - \int_{-L}^L f''(x) c_n(x) dx \right]. \end{aligned}$$

Como  $f'(-L) = f'(L)$  resulta  $f'(x) c_n(x) \Big|_{x=-L}^{x=L} = 0$  y

$$a_n = -\frac{L}{n^2 \pi^2} \int_{-L}^L f''(x) c_n(x) dx.$$

Análogamente,

$$b_n = -\frac{L}{n^2 \pi^2} \int_{-L}^L f''(x) s_n(x) dx,$$

con  $s_n(x) = \text{sen} \frac{n\pi x}{L}$ . Como  $|f''(x)| \leq M$  tenemos que

$$|c_n(x) f''(x)| \leq M \quad \text{y} \quad |s_n(x) f''(x)| \leq M,$$

por lo tanto

$$|a_n| \leq \frac{L}{n^2\pi^2} \int_{-L}^L M dx = \frac{2L^2M}{n^2\pi^2},$$

$$|b_n| \leq \frac{L}{n^2\pi^2} \int_{-L}^L M dx = \frac{2L^2M}{n^2\pi^2},$$

por lo que finalmente

$$|f(x) - \text{SF}_N f(x)| \leq \sum_{n=N+1}^{\infty} (|a_n| + |b_n|) \leq \frac{4L^2M}{\pi^2} \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \leq \frac{4L^2M}{\pi^2} \frac{1}{N}.$$

Donde hemos usado que  $\sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \leq \frac{1}{N}$ , lo que puede verse comparando la suma  $\sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$

con la integral  $\int_N^{\infty} \frac{1}{x^2} dx$ . □

Como dijimos en el comentario anterior a la demostración, este último teorema nos sirve, además, para saber cuántos términos de la serie de Fourier se deben sumar para *garantizar* una aproximación con una tolerancia dada. Veamos un ejemplo.

**Ejemplo 9.25.** Dada  $f(x) = x^3 - x$  y  $L = 1$ . Determinar  $N$  para asegurar que  $|\text{SF}_N f(x) - f(x)| \leq 0,01$ . Al ser  $f$  un polinomio es de clase  $C^\infty$  y por lo tanto también  $C^2$ . Además  $f(-1) = f(1) = 0$  y  $f'(x) = 3x^2 - 1$  por lo que  $f'(-1) = f'(1) = 2$ . Luego se cumplen las hipótesis de  $f$  para que valga la afirmación del teorema anterior. Necesitamos saber  $M = \max_{[-1,1]} |f''|$ . Veamos,  $f''(x) = 6x$ , y luego  $M = 6$ . Queremos saber para qué  $N \in \mathbb{N}$  se cumple que

$$\frac{4L^2M}{\pi^2} \frac{1}{N} \leq 0,01 \iff \frac{4 \times 6}{\pi^2} \frac{1}{N} \leq 0,01 \iff \frac{24}{0,01\pi^2} = 243,17\dots < N.$$

Luego, para  $N \geq 244$ , se cumple que  $|f(x) - \text{SF}_N f(x)| \leq 0,01$  para todo  $x \in [-1, 1]$ .

## 9.4. Series de Senos y series de Cosenos

Hasta aquí hemos estado trabajando con series de Fourier que involucran senos y también cosenos sobre el intervalo  $[-L, L]$ . En los problemas de difusión sobre el intervalo  $[0, L]$  con condiciones de Dirichlet y de Neumann aparecen las series de Fourier de senos y las series de Fourier de cosenos por separado:

$$a_0 + \sum_{n=1}^N a_n \cos \frac{n\pi x}{L}, \quad \sum_{n=1}^N b_n \sin \frac{n\pi x}{L}.$$

Queremos utilizar lo aprendido en la sección anterior para ver si es cierto lo que afirmamos en el Capítulo 8, que una gran familia de funciones definidas sobre el intervalo  $[0, L]$  se puede aproximar por series de cosenos (para resolver problemas con CB Neumann) y también por series de senos (para resolver problemas con CB Dirichlet).

Recordemos la siguiente definición.



**Definición 9.26.** Una función  $f(x)$  se llama par si  $f(-x) = f(x)$  para todo  $x$ , y una función  $f(x)$  se llama impar si  $f(-x) = -f(x)$  para todo  $x$ .

La demostración de la siguiente proposición es una consecuencia inmediata del ejercicio 9.4.

**Proposición 9.27.** Sea  $f(x)$  definida en el intervalo  $[-L, L]$  con coeficientes de Fourier

$$a_0 = \frac{1}{2L} \int_{-L}^L f(x) dx, \quad a_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \cos \frac{n\pi x}{L} dx, \quad n = 1, 2, \dots,$$

$$b_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} dx, \quad n = 1, 2, \dots$$

- Si  $f(x)$  es una función par, entonces

$$a_0 = \frac{1}{L} \int_0^L f(x) dx, \quad a_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \cos \frac{n\pi x}{L} dx, \quad n = 1, 2, \dots,$$

$$b_n = 0, \quad n = 1, 2, \dots$$

- Si  $f(x)$  es una función impar, entonces

$$a_0 = 0, \quad a_n = 0, \quad n = 1, 2, \dots,$$

$$b_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} dx, \quad n = 1, 2, \dots$$

En base a las observaciones escritas en la proposición anterior establecemos la siguiente definición.

**Definición 9.28.** Sea  $f$  definida en  $[0, L]$  tal que las integrales de (9.6) y (9.5) existen.

- La serie de Fourier de *senos* de  $f(x)$  es

$$\text{SF}^s f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L},$$

$$\text{con} \quad b_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} dx, \quad n = 1, 2, \dots \quad (9.5)$$

- La serie de Fourier de *cosenos* de  $f(x)$  es

$$\text{SF}^c f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi x}{L},$$

$$\text{con} \quad a_0 = \frac{1}{L} \int_0^L f(x), \quad a_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \cos \frac{n\pi x}{L} dx, \quad n = 1, 2, \dots \quad (9.6)$$

Y al pensar en los límites de estas series de Fourier de senos y de cosenos, aparece naturalmente la necesidad de hacer las siguientes definiciones:

**Definición 9.29.** Sea  $f$  una función definida en  $[0, L]$ .

- La *extensión par* de  $f$  es la función

$$f_p(x) = \begin{cases} f(x), & \text{si } 0 \leq x \leq L, \\ f(-x), & \text{si } -L \leq x < 0. \end{cases}$$

- La *extensión impar* de  $f$  es la función

$$f_i(x) = \begin{cases} f(x), & \text{si } 0 < x \leq L, \\ 0, & \text{si } x = 0, \\ -f(-x), & \text{si } -L \leq x < 0. \end{cases}$$

**Proposición 9.30.** *Sea  $f(x)$  definida en el intervalo  $[0, L]$  tal que existen las integrales de (9.5) y (9.6). Entonces la serie de Fourier de senos de  $f$  coincide con la serie de Fourier de su extensión impar  $f_i$  y la serie de Fourier de cosenos de  $f$  coincide con la serie de Fourier de su extensión par  $f_p$ . O sea,*

$$\text{SF}^s f = \text{SF} f_i, \quad \text{SF}^c f = \text{SF} f_p.$$

*Demostración.* Veamos que la primera afirmación es cierta, la segunda es análoga. La serie de Fourier de senos de  $f$  es

$$\text{SF}^s f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \text{sen} \frac{n\pi x}{L}, \quad \text{con } b_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \text{sen} \frac{n\pi x}{L} dx.$$

Por otro lado, si consideramos la extensión impar  $f_i$  de  $f$ , resulta que por la Proposición 9.27, sus coeficientes de Fourier (de la serie de senos y cosenos) son

$$\begin{aligned} a_0 &= 0, \quad a_n = 0, \quad n = 1, 2, \dots, \\ b_n &= \frac{2}{L} \int_0^L f_i(x) \text{sen} \frac{n\pi x}{L} dx = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \text{sen} \frac{n\pi x}{L} dx, \quad n = 1, 2, \dots \end{aligned}$$

Y por lo tanto, la serie de Fourier de  $f_i$  es

$$\text{SF} f_i = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \text{sen} \frac{n\pi x}{L}, \quad \text{con } b_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \text{sen} \frac{n\pi x}{L} dx,$$

es decir  $\text{SF}^s f = \text{SF} f_i$ . □

Con lo visto en la última proposición podemos adaptar los resultados de convergencia de series de Fourier (de senos y cosenos) para obtener resultados de convergencia de las series de Fourier de senos y de las de cosenos.

**Teorema 9.31** (Convergencia de la serie de Fourier de senos). *Sea  $f$  una función  $C^1$  a trozos en  $[0, L]$ . Entonces las sumas parciales  $\text{SF}_N^s f$  de la serie de Fourier de senos de  $f$  convergen puntualmente (en cada  $x$ ) a*

$$\text{SF}^s f(x) = \begin{cases} \frac{f(x^+) + f(x^-)}{2}, & \text{si } 0 < x < L, \\ 0, & \text{si } x = 0 \text{ ó } x = L. \end{cases}$$

Si  $f(x)$  es además continua en  $[0, L]$  y  $f(0) = 0$ ,  $f(L) = 0$ , entonces la suma parcial  $\text{SF}_N^s f$  converge uniformemente (no hay fenómeno de Gibbs) a  $f(x)$  en  $[0, L]$ , es decir,

$$\max_{0 \leq x \leq L} |f(x) - \text{SF}_N^s(x)| \rightarrow 0, \quad \text{cuando } N \rightarrow \infty.$$

*Demostración.* Para demostrar las dos afirmaciones de este teorema basta ver que si  $f(x)$  cumple las hipótesis del mismo, entonces su extensión impar  $f_i$  cumple las hipótesis de los Teoremas 9.18 y 9.21, respectivamente.  $\square$

**Teorema 9.32** (Convergencia de la serie de Fourier de cosenos). *Sea  $f$  una función  $C^1$  a trozos en  $[0, L]$ . Entonces las sumas parciales  $\text{SF}_N^c f$  de la serie de Fourier de cosenos de  $f$  convergen puntualmente (en cada  $x$ ) a*

$$\text{SF}^c f(x) = \begin{cases} \frac{f(x^+) + f(x^-)}{2}, & \text{si } 0 < x < L, \\ f(0^+), & \text{si } x = 0, \\ f(L^-), & \text{si } x = L. \end{cases}$$

Si  $f(x)$  es además continua en  $[0, L]$ , entonces la suma parcial  $\text{SF}_N^c f$  converge uniformemente (no hay fenómeno de Gibbs) a  $f(x)$  en  $[0, L]$ , es decir,

$$\max_{0 \leq x \leq L} |f(x) - \text{SF}_N^c(x)| \rightarrow 0, \quad \text{cuando } N \rightarrow \infty.$$

*Demostración.* Para demostrar las dos afirmaciones de este teorema basta ver que si  $f(x)$  cumple las hipótesis del mismo, entonces su extensión impar  $f_p$  cumple las hipótesis de los Teoremas 9.18 y 9.21, respectivamente.  $\square$

También se puede aplicar el Teorema 9.23 a las extensiones par e impar de una función  $f$  definida en  $[0, L]$  para obtener los siguientes teoremas.

**Teorema 9.33** (Convergencia con orden de la serie de Fourier de senos). *Sea  $f(x)$  una función de clase  $C^2$  en el intervalo  $[0, L]$ , tal que  $f(0) = 0$  y  $f(L) = 0$ , y sea  $M = \max_{[0, L]} |f''|$ .*

*Entonces, para cada  $N \geq 1$  se tiene que*

$$|f(x) - \text{SF}_N^s f(x)| \leq \frac{4L^2 M}{\pi^2} \frac{1}{N}, \quad \text{para todo } x \in [0, L].$$

*Demostración.* Si  $f$  es  $C^2$  en  $[0, L]$  y  $f(0) = f(L) = 0$  entonces su extensión impar  $f_i$  es  $C^2$  en  $[-L, L]$ ,  $f_i(-L) = f_i(L)$  y  $f_i'(-L) = f_i'(L)$  (pues la derivada de una función impar es una función par). Aplicamos entonces el Teorema 9.23 a  $f_i$  y obtenemos que

$$|f_i(x) - \text{SF}_N f_i(x)| \leq \frac{4L^2 M}{\pi^2} \frac{1}{N}, \quad \text{para todo } x \in [-L, L].$$

Por un lado  $f_i(x) = f(x)$  en  $[0, L]$ , y por la Proposición 9.30  $\text{SF}_N f_i(x) = \text{SF}_N^s f(x)$  para todo  $x \in [0, L]$  y todo  $N \in \mathbb{N}$ . Por lo tanto  $|f(x) - \text{SF}_N^s f(x)| \leq \frac{4L^2 M}{\pi^2} \frac{1}{N}$  para todo  $x \in [0, L]$ .  $\square$

**Teorema 9.34** (Convergencia con orden de la serie de Fourier de cosenos). *Sea  $f(x)$  una función de clase  $C^2$  en el intervalo  $[0, L]$ , tal que  $f'(0) = 0$  y  $f'(L) = 0$ , y sea  $M = \max_{[0, L]} |f''|$ . Entonces, para cada  $N \geq 1$  se tiene que*

$$|f(x) - \text{SF}_N^c f(x)| \leq \frac{4L^2 M}{\pi^2} \frac{1}{N}, \quad \text{para todo } x \in [0, L].$$

*Demostración.* Si  $f$  es  $C^2$  en  $[0, L]$  y  $f'(0) = f'(L) = 0$  entonces su extensión par  $f_p$  es  $C^2$  en  $[-L, L]$ ,  $f_p(-L) = f_p(L)$  y  $f_p'(-L) = f_p'(L)$ . Aplicamos entonces el Teorema 9.23 a  $f_p$  y obtenemos que

$$|f_p(x) - \text{SF}_N f_p(x)| \leq \frac{4L^2 M}{\pi^2} \frac{1}{N}, \quad \text{para todo } x \in [-L, L].$$

Por un lado  $f_p(x) = f(x)$  en  $[0, L]$ , y por la Proposición 9.30  $\text{SF}_N f_p(x) = \text{SF}_N^c f(x)$  para todo  $x \in [0, L]$  y todo  $N \in \mathbb{N}$ . Por lo tanto  $|f(x) - \text{SF}_N^c f(x)| \leq \frac{4L^2 M}{\pi^2} \frac{1}{N}$  para todo  $x \in [0, L]$ .  $\square$

Los últimos teoremas son de aplicación directa para el cálculo aproximado de soluciones de problemas de difusión. Veamos un ejemplo.

**Ejemplo 9.35.** Considerar el problema

$$\begin{cases} u_t = u_{xx}, & 0 < x < 1, \quad t > 0, \\ u(0, t) = 0, \quad u(1, t) = 0, & t > 0. \\ u(x, 0) = x^3 - x, & 0 < x < 1, \end{cases}$$

Hallar una solución aproximada  $u_N(x, t)$  que cumple  $|u_N(x, t) - u(x, t)| \leq 0,01$  para todo  $x \in [0, L]$  y todo  $t \geq 0$ . Las soluciones exactas que conocemos de este problema son de la forma

$$u_N(x, t) = \sum_{n=1}^N b_n \text{sen}(n\pi x) e^{-n^2 \pi^2 t}.$$

Por el principio del máximo, dado que  $u(x, t) = u_N(x, t) = 0$  para  $x = 0$  y  $x = L$  ( $t > 0$ ), sabemos que

$$\max_{\substack{0 \leq x \leq 1 \\ t \geq 0}} |u(x, t) - u_N(x, t)| \leq \max_{0 \leq x \leq 1} |u(x, 0) - u_N(x, 0)|.$$

Ahora bien,  $u(x, 0) = x^3 - x = f(x)$  es  $C^2$  en  $[0, 1]$  y  $f(0) = f(1) = 0$ , es decir, cumple las hipótesis del Teorema 9.33 (para  $L = 1$ ), y por lo tanto, si  $b_n$  se eligen como los coeficientes de la serie de Fourier de senos de  $f(x)$  resulta

$$\max_{0 \leq x \leq 1} |f(x) - \text{SF}_N^s f(x)| \leq \frac{4M}{\pi^2} \frac{1}{N},$$

con  $M = \max_{[0, 1]} |f''|$ . Como ya vimos en el Ejemplo 9.25,  $M = 6$  y basta elegir  $N \geq 244$  para que  $\frac{4M}{\pi^2} \frac{1}{N} \leq 0,01$ . Por lo tanto, la solución deseada es

$$u_N(x, t) = \sum_{n=1}^{244} b_n \text{sen}(n\pi x) e^{-n^2 \pi^2 t},$$

con  $b_n = 2 \int_0^1 (x^3 - x) \operatorname{sen}(n\pi x) dx = \frac{12}{n^3\pi^3} \cos(n\pi) = \frac{12}{n^3\pi^3} (-1)^n$ . De esta manera, la solución buscada resulta

$$u_N(x, t) = 12 \sum_{n=1}^{244} \frac{(-1)^n}{n^3\pi^3} \operatorname{sen}(n\pi x) e^{-n^2\pi^2 t}.$$

## 9.5. Ejercicios

**9.1.** Para  $L = 1$  y la función  $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$  graficar con la computadora  $\operatorname{SF}_N f(x)$  en  $[-1, 1]$ , para  $N = 1, 3, 5, 7, 9, \dots, 101$ , y verificar que siempre  $\max_{x \in [0, 1]} \operatorname{SF}_N f(x) \geq 1,089$  (mientras que  $\max_{x \in \mathbb{R}} f(x) = 1$ ). Para hacerlo, tomar  $\mathbf{x} = [-1 : .001 : 1]$  y evaluar  $\operatorname{SF}_N f$  en esa grilla, luego tomar el máximo valor. Este fenómeno, observado experimentalmente en la computadora, puede demostrarse *para todo*  $N \in \mathbb{N}$ . Nos dice que la discontinuidad de  $f$  en  $x = 0$  causa un *overshooting* debido al fenómeno de Gibbs mayor al 8 % del salto en la discontinuidad.

**9.2.** Para cada una de las siguientes funciones, definir y graficar (a mano) la función arreglada en  $[-L, L]$ , con  $L = 1$  y graficar su extensión periódica en  $[-3L, 3L]$ .

- (a)  $f(x) = 1$ ,                      (b)  $f(x) = x^3$ ,                      (c)  $f(x) = 1 - x^2$ ,  
 (d)  $f(x) = \cos(\pi x)$ ,                      (e)  $f(x) = \operatorname{sen}(\pi x)$ .

\* **9.3.** Sea  $f(x)$  una función  $C^3$  en el intervalo  $[-L, L]$  tal que  $f(-L) = f(L)$ ,  $f'(-L) = f'(L)$ , y  $f''(-L) = f''(L)$ . Demostrar que si  $M = \max_{x \in [-L, L]} |f'''(x)|$ , entonces

(a)  $\max_{x \in [-L, L]} |f(x) - \operatorname{SF}_N f(x)| \leq \frac{2L^3 M}{\pi^3} \frac{1}{N^2}$ ,

(b)  $(\operatorname{SF}_N f)'(x) = \operatorname{SF}_N f'(x)$ ,

(c)  $\max_{x \in [-L, L]} |f'(x) - \operatorname{SF}_N f'(x)| \leq \frac{4L^2 M}{\pi^2} \frac{1}{N}$ .

**9.4.** Verificar (demostrar) las siguientes afirmaciones:

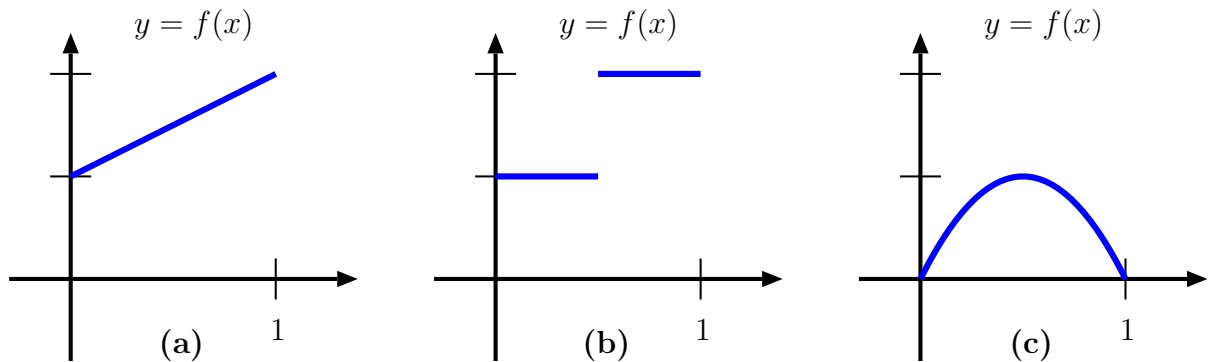
- (a) El producto de dos funciones pares es par.  
 (b) El producto de dos funciones impares es par.  
 (c) El producto de una función par y una impar es impar.  
 (d) Si  $f(x)$  es impar, entonces  $\int_{-L}^L f(x) dx = 0$ .  
 (e) Si  $f(x)$  es par, entonces  $\int_{-L}^L f(x) dx = 2 \int_0^L f(x) dx$ .

**9.5.** Mostrar que cualquier función  $f(x)$  definida en  $[-L, L]$  se puede escribir como suma de una función par y una impar. Ayuda:  $f(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2} + \frac{f(x) - f(-x)}{2}$ .

**9.6.** Para cada una de las siguientes funciones definidas en  $[0, L]$ , definir y graficar (a mano) su extensión par y su extensión impar a  $[-L, L]$ , la función arreglada de la extensión par y de la impar en  $[-L, L]$  y graficar su extensión periódica en  $[-3L, 3L]$  (considerar  $L = 1$ ).

- (a)  $f(x) = 1$ ,                      (b)  $f(x) = x^3$ ,                      (c)  $f(x) = 1 - x^2$ ,  
 (d)  $f(x) = \cos(\pi x)$ ,              (e)  $f(x) = \text{sen}(\pi x)$ .

**9.7.** Consideremos  $L = 1$  y la función  $f(x)$  definida sobre el intervalo  $[0, 1]$  cuyo gráfico es el de la figura.



En cada caso por separado, graficar (a mano, aproximadamente) sobre el intervalo  $[-3, 3]$

- $\text{SF}_{10}^s f(x)$ ,  $\text{SF}^s f(x)$ . Es decir, la suma de diez términos de la serie de Fourier de senos de  $f$  y el límite de las sumas parciales, o la serie total de senos.
- $\text{SF}_{10}^c f(x)$ ,  $\text{SF}^c f(x)$ . Es decir, la suma de diez términos de la serie de Fourier de cosenos de  $f$  y el límite de las sumas parciales, o la serie total de cosenos.

Decir en qué casos se observa el fenómeno de Gibbs y en qué casos la convergencia es uniforme.

**9.8.** Considerar el problema

$$\begin{cases} u_t = u_{xx}, & 0 < x < 1, \quad t > 0, \\ u(0, t) = 0, \quad u(1, t) = 0, & t > 0. \\ u(x, 0) = x(1 - x), & 0 < x < 1, \end{cases}$$

Usando el principio del máximo determinar una solución aproximada  $u_N(x, t)$  que cumpla

$$|u(x, t) - u_N(x, t)| \leq 0,005, \quad 0 \leq x \leq L, t > 0.$$

**9.9.** Considerar el problema

$$\begin{cases} u_t = u_{xx}, & 0 < x < 1, & t > 0, \\ u(0, t) = 1, & u(1, t) = 2, & t > 0. \\ u(x, 0) = x + 1 + x(1 - x), & & 0 < x < 1, \end{cases}$$

(a) Usando el principio del máximo determinar una solución aproximada  $u_N(x, t)$  que cumpla

$$|u(x, t) - u_N(x, t)| \leq 0,005, \quad 0 \leq x \leq L, t > 0.$$

(b) Usando (la computadora y) la solución aproximada del item anterior, determinar (aproximadamente) el valor de  $t_0$  a partir del cual  $u(x, t) \leq 2$  para todo  $t \geq t_0$ .

**9.10.** Considerar el problema

$$\begin{cases} u_t = 5u_{xx}, & 0 < x < 1, & t > 0, \\ u(0, t) = 1, & u_x(1, t) = 0, & t > 0. \\ u(x, 0) = (x - 1)^2, & & 0 < x < 1, \end{cases}$$

(a) Usando el principio del máximo (enunciado en el Problema 8.8) y el Teorema 9.23 determinar una solución aproximada  $u_N(x, t)$  que cumpla

$$|u(x, t) - u_N(x, t)| \leq 0,005, \quad 0 \leq x \leq 1, \quad t > 0.$$

(b) Usando (la computadora y) la solución aproximada del item anterior, determinar (aproximadamente) el valor de  $t_0$  a partir del cual  $u(x, t) \geq 0,5$  para todo  $t \geq t_0$ .

## Bibliografía complementaria

[Bleecker-Csordas 1996] Bleecker, D., Csordas, G., *Basic Partial Differential Equations*, International Press, Cambridge, Massachusetts, 1996.

[Haberman 1998] Haberman, R., *Elementary Applied Partial Differential Equations*, Prentice Hall, Upper Saddle River, NJ, 1998.

# Capítulo 10

## La ecuación de Laplace

Cuando consideramos la ecuación de difusión sin término fuente, y con condiciones de borde independientes del tiempo, el límite de las soluciones cuando  $t \rightarrow \infty$  es la solución de la ecuación de estado estacionario. En el caso de coeficientes constantes resulta la ecuación de Laplace  $\nabla^2 u = 0$  con las condiciones de borde que provienen de la ecuación de difusión original. Cuando el dominio espacial es unidimensional (un intervalo) la ecuación de Laplace resulta  $u_{xx} = 0$  cuyas soluciones son las funciones lineales  $u(x) = c_1x + c_2$ . Imponer condiciones de borde es sencillo en esta situación, y salvo el caso en que ambos extremos tengan condiciones de borde de flujo prescrito, pueden hallarse siempre las constantes  $c_1$  y  $c_2$  para que las condiciones de borde se cumplan, ver Sección 8.5. En este capítulo estudiaremos cómo resolver la ecuación de Laplace en diferentes regiones del plano y del espacio, y también veremos algunas propiedades *cualitativas* de las soluciones, como el principio del máximo y la propiedad del valor medio.

### 10.1. Ecuación de Laplace en un Rectángulo

Comenzamos resolviendo la ecuación de Laplace en un rectángulo ( $0 \leq x \leq L$ ,  $0 \leq y \leq H$ ) cuando la temperatura está prescrita en la frontera (borde) del mismo:

$$\text{EDP: } \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad 0 < x < L, \quad 0 < y < H.$$

Consideraremos primero el caso de condiciones de borde de tipo *Dirichlet*. Como el borde del rectángulo está compuesto por cuatro segmentos, escribimos las condiciones de borde de la siguiente manera:

CB1:	$u(0, y) = g_1(y)$	$0 < y < H$
CB2:	$u(L, y) = g_2(y)$	$0 < y < H$
CB3:	$u(x, 0) = f_1(x)$	$0 < x < L$
CB4:	$u(x, H) = f_2(x)$	$0 < x < L$

donde  $g_1(y)$ ,  $g_2(y)$ ,  $f_1(x)$  y  $f_2(x)$  son funciones dadas. Otras condiciones de borde serán presentadas en los ejercicios. En este caso, la EDP es lineal y homogénea pero las condiciones de borde, aunque lineales, no son homogéneas. No podremos aplicar el método de



separación de variables a este problema tal como está. La razón de esto es que al separar variables, el problema a valores de borde que determina las constantes de separación posibles o autovalores debe tener condiciones de borde homogéneas. En este ejemplo, todas las condiciones de borde son no-homogéneas.

Podemos superar esta dificultad dándonos cuenta de que el problema original es no-homogéneo debido a las *cuatro* condiciones de borde no-homogéneas. Utilizaremos el principio de superposición para desglosar nuestro problema en cuatro subproblemas, cada uno de los cuales tiene **solo una** condición no-homogénea. Escribimos

$$u(x, t) = u_1(x, t) + u_2(x, t) + u_3(x, t) + u_4(x, t),$$

donde cada una de las funciones  $u_i(x, y)$  ( $i = 1, 2, 3, 4$ ) satisface la ecuación de Laplace con una condición de borde no-homogénea y las otras tres condiciones de borde homogéneas, como se muestra en la Figura 10.1.

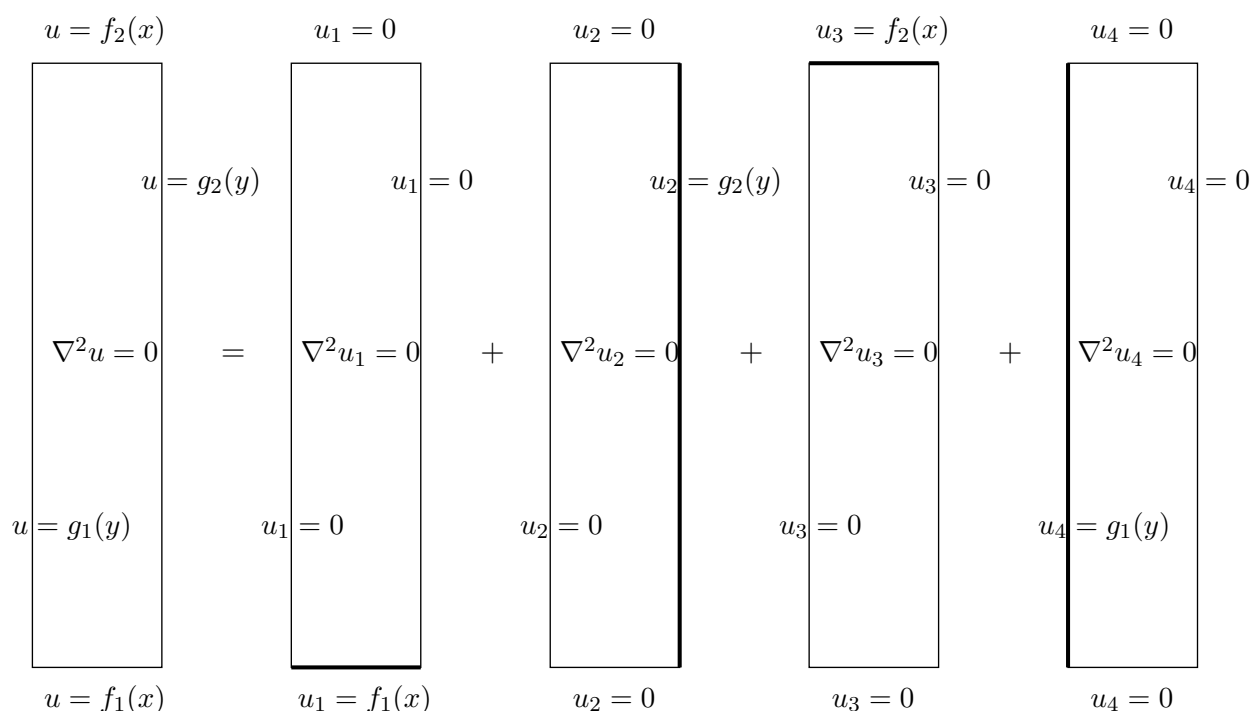


Figura 10.1: Ecuación de Laplace dentro de un rectángulo

El método para hallar cualquiera de las  $u_i(x, y)$  es el mismo; solo algunos detalles difieren. Haremos la resolución para encontrar  $u_4(x, y)$ , y dejaremos los otros casos para los ejercicios:

$$\begin{array}{ll}
 \text{EDP:} & \frac{\partial^2 u_4}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_4}{\partial y^2} = 0 & 0 < x < L, \quad 0 < y < H \\
 \text{CB1:} & u_4(0, y) = g_1(y) & 0 < y < H \\
 \text{CB2:} & u_4(L, y) = 0 & 0 < y < H \\
 \text{CB3:} & u_4(x, 0) = 0 & 0 < x < L \\
 \text{CB4:} & u_4(x, H) = 0 & 0 < x < L.
 \end{array}$$

Nos proponemos resolver este problema por el método de separación de variables. Comenzamos ignorando la condición no-homogénea  $u_4(0, y) = g_1(y)$ . Eventualmente sumaremos soluciones producto para obtener esta condición, pero por ahora la ignoraremos. Buscamos soluciones producto

$$u_4(x, y) = h(x)\phi(y),$$

que satisfagan las condiciones de borde homogéneas CB2, CB3 y CB4. Éstas nos dicen que

$$h(L) = 0, \quad \phi(0) = 0, \quad \phi(H) = 0.$$

Luego, la parte de la solución dependiente de  $y$ ,  $\phi(y)$  tiene dos condiciones de borde homogéneas, mientras que la parte dependiente de  $x$  solo tiene una. Si sustituimos la solución producto en la ecuación de Laplace obtenemos

$$\phi(y)h''(x) + h(x)\phi''(y) = 0.$$

Las variables pueden separarse dividiendo por  $h(x)\phi(y)$ , obteniendo

$$\frac{1}{h(x)}h''(x) = -\frac{1}{\phi(y)}\phi''(y). \quad (10.1)$$

El lado izquierdo es solo función de la variable  $x$ , mientras que el lado derecho depende solo de  $y$ . Por lo tanto, ambos deben ser iguales a una constante de separación. ¿Qué usamos? ¿ $\lambda$  ó  $-\lambda$ ? Una de ellas es más conveniente. Si la constante de separación fuera negativa (como lo era antes), la ecuación (10.1) implicaría que  $h(x)$  oscila (trigonométrica) y  $\phi(y)$  es una combinación de exponenciales. Pero las condiciones de borde para  $\phi(y)$  indican que este caso no es posible. Por otro lado, si la constante de separación fuera positiva, (10.1) implicaría que  $h(x)$  es combinación de exponenciales y  $\phi(y)$  es combinación de senos y cosenos. Esto parece más razonable dadas las condiciones de borde y entonces introducimos la variable de separación  $\lambda$  (aunque *no suponemos*  $\lambda \geq 0$ ):

$$\frac{1}{h(x)}h''(x) = -\frac{1}{\phi(y)}\phi''(y) = \lambda.$$

Obtenemos entonces dos ecuaciones diferenciales ordinarias:

$$\begin{aligned} h''(x) &= \lambda h(x) \\ \phi''(y) &= -\lambda \phi(y). \end{aligned}$$

El problema dependiente de la variable  $x$  *no es un problema a valores en la frontera* pues *no tiene dos condiciones homogéneas*:

$$h''(x) = \lambda h(x) \quad h(L) = 0.$$

En cambio, el problema dependiente de la variable  $y$  sí lo es y será utilizado para determinar los autovalores  $\lambda$

$$\phi''(y) = -\lambda \phi(y) \quad \phi(0) = 0 \quad \phi(H) = 0.$$

Este problema a valores en la frontera es el mismo que hemos estudiado anteriormente, con la única diferencia dada por la longitud del intervalo, que en este caso es  $H$  en lugar de

$L$ . Todos los autovalores son positivos  $\lambda > 0$ . Las autofunciones son senos pues  $\phi(0) = 0$ . Más aún, la condición  $\phi(H) = 0$  implica que

$$\lambda = \left(\frac{n\pi}{H}\right)^2, \quad \phi(y) = \text{sen} \frac{n\pi y}{H}, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Para obtener soluciones producto, debemos ahora resolver la EDO para  $h(x)$  con la condición de borde homogénea correspondiente y con  $\lambda$  un autovalor de los ya encontrados. Como  $\lambda = (n\pi/H)^2$ , la ecuación resulta

$$h''(x) = \left(\frac{n\pi}{H}\right)^2 h(x). \quad (10.2)$$

La solución general es una combinación lineal de exponenciales, que también puede expresarse como una combinación lineal de funciones hiperbólicas. Podríamos utilizar cualquiera de estas dos expresiones de la solución general, pero ninguna de estas es la más apropiada para la condición de borde  $h(L) = 0$ . Podemos encontrar la solución que buscamos de un modo más rápido y sencillo si observamos que las funciones *trasladadas*

$$\cosh \frac{n\pi(x-L)}{H} \quad \text{y} \quad \sinh \frac{n\pi(x-L)}{H}$$

son soluciones linealmente independientes de (10.2). Por lo que la solución general también puede escribirse como (ver Ejercicios 6.8–6.9)

$$h(x) = a_1 \cosh \frac{n\pi(x-L)}{H} + a_2 \sinh \frac{n\pi(x-L)}{H}.$$

Resulta natural preguntarse ahora por qué es más conveniente esta expresión de la solución general. Bien, si queremos forzar la condición de borde  $h(L) = 0$  obtenemos

$$0 = h(L) = a_1 \cosh \frac{n\pi(L-L)}{H} + a_2 \sinh \frac{n\pi(L-L)}{H} = a_1 \cosh 0 + a_2 \sinh 0 = a_1.$$

De esto resulta  $a_1 = 0$  y  $h(x) = a_2 \sinh \frac{n\pi(x-L)}{H}$ , una expresión sencilla de la solución.

Las soluciones producto resultan entonces

$$u_4(x, y) = b_n \text{sen} \frac{n\pi y}{H} \sinh \frac{n\pi(x-L)}{H}, \quad n = 1, 2, \dots$$

Ahora queremos encontrar una solución más general, para lo cual utilizamos el principio de superposición, obteniendo

$$u_4(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \text{sen} \frac{n\pi y}{H} \sinh \frac{n\pi(x-L)}{H}.$$

Una vez que tenemos esta solución general, imponemos la condición de borde no-homogénea  $u_4(0, y) = g_1(y)$ :

$$u_4(0, y) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \text{sen} \frac{n\pi y}{H} \sinh \frac{n\pi(-L)}{H} = g_1(y).$$

Este es el mismo tipo de serie de senos que ya hemos discutido con una sola diferencia: Antes teníamos los coeficientes  $b_n$  multiplicando a las funciones seno, pero ahora tenemos que  $b_n \sinh \frac{n\pi(-L)}{H}$  multiplica a las funciones seno (notar que  $b_n \sinh \frac{n\pi(-L)}{H}$  no depende de la variable  $y$ ). Por ende, si llamamos  $B_n = b_n \sinh \frac{n\pi(-L)}{H}$  nuestro problema consiste en hallar  $B_n$  tal que

$$\sum_{n=1}^{\infty} B_n \operatorname{sen} \frac{n\pi y}{H} = g_1(y).$$

Luego, por lo que ya hemos visto en secciones anteriores

$$B_n = \frac{2}{H} \int_0^H g_1(y) \operatorname{sen} \frac{n\pi y}{H} dy,$$

y despejando  $b_n$  obtenemos

$$b_n = \frac{B_n}{\sinh \frac{n\pi(-L)}{H}} = \frac{2}{H \sinh \frac{n\pi(-L)}{H}} \int_0^H g_1(y) \operatorname{sen} \frac{n\pi y}{H} dy.$$

Es importante notar aquí que  $\sinh \frac{n\pi(-L)}{H} \neq 0$  y por ende  $b_n$  está bien definido para todo  $n$ .

Por lo tanto, la solución  $u_4(x, y)$  es la serie

$$u_4(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen} \frac{n\pi y}{H} \sinh \frac{n\pi(x-L)}{H}.$$

con sus coeficientes  $b_n$  dados por

$$b_n = \frac{2}{H \sinh \frac{n\pi(-L)}{H}} \int_0^H g_1(y) \operatorname{sen} \frac{n\pi y}{H} dy.$$

## 10.2. Ecuación de Laplace en un Disco

Consideramos ahora la ecuación de Laplace en un disco de radio  $a$  con condiciones de Dirichlet en el borde como se ilustra en la Figura 10.2. La geometría (forma) de este problema sugiere el uso de coordenadas polares, es decir, escribir  $u = u(r, \theta)$ . En particular, en la circunferencia de radio  $r = a$  la distribución de temperatura es una función dada de la variable  $\theta$ ,  $u(a, \theta) = f(\theta)$ .

Para intentar resolver este problema es necesario primero encontrar una expresión de  $\nabla^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$  en coordenadas polares, para ello, recordamos que debemos escribir

$$\begin{aligned} u(r, \theta) &= u(r(x, y), \theta(x, y)), \\ x &= r \cos \theta, \\ y &= r \operatorname{sen} \theta. \end{aligned}$$

Las coordenadas polares coinciden con las coordenadas cilíndricas (ignorando la variable  $z$ , y llamando  $r$  a  $\rho$ ) y entonces

$$\nabla^2 u = \frac{1}{r} \left\{ \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} \right) \right\} = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}.$$

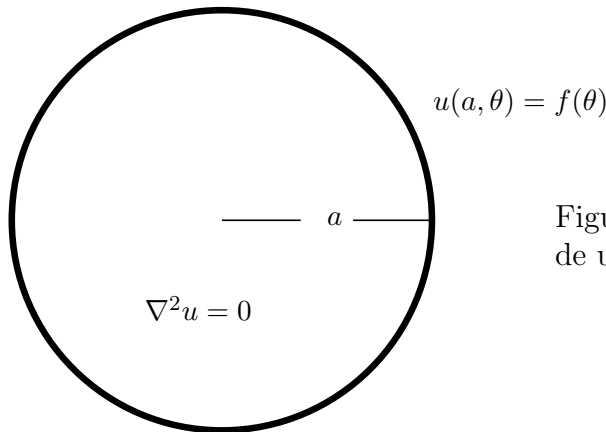


Figura 10.2: Ecuación de Laplace dentro de un disco

El problema que queremos resolver es entonces

$$\begin{array}{ll} \text{EDP:} & \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = 0 \quad 0 < r < a \quad -\pi < \theta < \pi \\ \text{CB:} & u(a, \theta) = f(\theta), \quad -\pi < \theta < \pi. \end{array}$$

A primera vista parecería que no podemos utilizar el método de separación de variables porque no tenemos ninguna condición de borde homogénea. Sin embargo, el utilizar coordenadas polares requiere una discusión acerca del método de separación de variables que nos ayudará a comprenderlo un poco mejor. Si resolvemos la ecuación de Laplace en un rectángulo, entonces se necesitan condiciones en los extremos de definición de las variables,  $x = 0$ ,  $x = L$ ,  $y = 0$ ,  $y = H$ . Estos extremos coinciden con los bordes físicos de la placa rectangular que se considera. Por otro lado, para coordenadas polares,  $0 \leq r \leq a$ ,  $-\pi \leq \theta \leq \pi$ . Matemáticamente, se necesitan dos condiciones en los extremos  $r = 0$ ,  $r = a$ , y  $\theta = -\pi$ ,  $\theta = \pi$ . La única condición que corresponde a una frontera física es en  $r = a$ . Por lo tanto todavía nos hace falta determinar condiciones de borde en  $r = 0$  y en  $\theta = \pm\pi$ . Para hallarlas utilizaremos consideraciones del problema físico. Las coordenadas polares son singulares en  $r = 0$ ; por razones físicas, pediremos que la incógnita  $u$  (temperatura, densidad) sea finita, o **acotada** allí:

$$\text{acotación de } u \text{ en el origen:} \quad |u(0, \theta)| < \infty.$$

Aún nos falta definir condiciones en  $\theta = \pm\pi$ . Esto es similar a lo que ocurre en la situación del anillo circular. El extremo  $\theta = -\pi$  corresponde al mismo punto de la placa circular que  $\theta = \pi$ . Aunque allí no hay realmente un borde de la placa, el hecho de que la temperatura o densidad sea continua allí y que el flujo de calor o de masa en la dirección de  $\theta$  también sea continuo, implica las siguientes condiciones de borde:

$$u(r, -\pi) = u(r, \pi) \quad \frac{\partial u}{\partial \theta}(r, -\pi) = \frac{\partial u}{\partial \theta}(r, \pi).$$

Notamos que estas condiciones “de borde” son también lineales y homogéneas. De este modo, el problema luce similar a la ecuación de Laplace en un rectángulo: Hay cuatro condiciones, de las cuales solo una es no-homogénea:  $u(a, \theta) = f(\theta)$ . Aplicaremos entonces el método de separación de variables.

Buscaremos soluciones producto

$$u(r, \theta) = \phi(\theta)G(r),$$

que satisfagan la EDP y las tres condiciones de borde homogéneas (nuevamente ignoramos momentáneamente la condición no-homogénea). Las condiciones periódicas implican

$$\phi(-\pi) = \phi(\pi) \quad \phi'(-\pi) = \phi'(\pi).$$

Si la función producto satisface la EDP se tiene que

$$\phi(\theta)G''(r) + \frac{1}{r}\phi(\theta)G'(r) + \frac{1}{r^2}G(r)\phi''(\theta) = 0$$

Multiplicando por  $\frac{r^2}{\phi(\theta)G(r)}$  obtenemos

$$\frac{r^2G''(r) + rG'(r)}{G(r)} = -\frac{\phi''(\theta)}{\phi(\theta)} = \lambda.$$

Hemos introducido la constante de separación como  $\lambda$  (en lugar de  $-\lambda$ ) porque hay dos condiciones homogéneas para la función  $\phi$  de la variable  $\theta$ . El problema que determinará los autovalores  $\lambda$  es

$$\phi''(\theta) = -\lambda\phi(\theta), \quad \phi(-\pi) = \phi(\pi), \quad \phi'(-\pi) = \phi'(\pi).$$

Los autovalores  $\lambda$  se determinan del modo usual. En efecto, este es uno de los problemas estándar que ya hemos resuelto, el del alambre circular, con  $L = \pi$ . Por lo tanto los autovalores son

$$\lambda = \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 = n^2,$$

con las autofunciones correspondientes

$$\text{sen } n\theta \quad \text{y} \quad \text{cos } n\theta.$$

El caso  $n = 0$  debe también considerarse pues da la función constante.

El problema dependiente de la variable  $r$  es entonces

$$r^2G''(r) + rG'(r) = n^2G(r)$$

ó

$$r^2G''(r) + rG'(r) - n^2G(r) = 0. \tag{10.3}$$

La ecuación (10.3) es lineal y homogénea pero tiene coeficientes **no-constant**. Sin embargo se puede resolver fácilmente. La forma más sencilla de resolver esta ecuación, es dándose cuenta de que para el operador diferencial en (10.3) la función  $G(r) = r^p$  se reproduce a sí misma. Esto quiere decir que si reemplazamos  $r^p$  en el lugar de  $G(r)$  en la ecuación (10.3) obtenemos un múltiplo de  $r^p$ . En efecto

$$\begin{aligned} r^2 \frac{d^2}{dr^2} (r^p) + r \frac{d}{dr} (r^p) - n^2 r^p &= r^2 p(p-1) r^{p-2} + r p r^{p-1} - n^2 r^p \\ &= (p(p-1) + p - n^2) r^p. \end{aligned}$$

Luego nuestro problema se transforma en encontrar las potencias  $p$  para las cuales

$$p(p-1) + p - n^2 = 0.$$

Pero

$$p(p-1) + p - n^2 = p^2 - p + p - n^2 = p^2 - n^2$$

y esta última expresión es igual a cero cuando  $p = n$  ó  $p = -n$ . Si  $n \neq 0$  estas raíces son distintas y las funciones  $r^n$  y  $r^{-n}$  son linealmente independientes, por lo que la solución general resulta

$$G(r) = c_1 r^n + c_2 r^{-n}.$$

El caso  $n = 0$  es diferente, e igualmente importante porque  $\lambda = 0$  también es un autovalor. Si  $n = 0$  la ecuación (10.3) resulta

$$r^2 G''(r) + r G'(r) = 0$$

que es equivalente a

$$r G''(r) + G'(r) = 0$$

y también a

$$\frac{d}{dr} (r G'(r)) = 0$$

lo que a su vez equivale a decir que  $r G'(r)$  es constante. Luego  $G'(r) = \text{const}/r$ , integrando obtenemos

$$G(r) = c_1 + c_2 \ln r.$$

Ya hemos discutido la condición en  $r = 0$  y hemos dicho que requeriremos  $|u(0, \theta)| < \infty$ , lo que implica para la solución producto que

$$|G(0)| < \infty.$$

Si ahora observamos las soluciones generales obtenidas, vemos que la parte multiplicada por  $c_2$  tiende a  $\infty$  cuando  $r \rightarrow 0$ . Esto nos dice que  $c_2 = 0$  y luego la solución general de la parte dependiente de  $r$  es

$$G(r) = c_1 r^n, \quad n \geq 0,$$

donde para  $n = 0$  esta expresión se reduce a la constante  $c_1$ .

Concluyendo, las soluciones producto que satisfacen las condiciones homogéneas son

$$r^n \cos n\theta \quad (n \geq 1) \quad \text{y} \quad r^n \sin n\theta \quad (n \geq 0).$$

Por el principio de superposición, la solución general de la ecuación de Laplace en el círculo es

$$u(r, \theta) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n r^n \cos n\theta + \sum_{n=1}^{\infty} B_n r^n \sin n\theta.$$

Para resolver la condición de borde no-homogénea  $u(a, \theta) = f(\theta)$  los coeficientes  $A_n$ ,  $B_n$  tienen que ser determinados para que se satisfaga la igualdad

$$f(\theta) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n a^n \cos n\theta + \sum_{n=1}^{\infty} B_n a^n \sin n\theta, \quad -\pi \leq \theta \leq \pi.$$

Este problema es similar al que resolvimos en la Sección 8.4. La única diferencia es que aquí el papel de los coeficientes  $a_n$  y  $b_n$  es jugado por  $A_n a^n$  y por  $B_n a^n$ , respectivamente. Usando las mismas fórmulas integrales de esa sección, obtenemos

$$\begin{aligned} A_0 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\theta) d\theta \\ A_n a^n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\theta) \cos n\theta d\theta, \quad n \geq 1 \\ B_n a^n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\theta) \operatorname{sen} n\theta d\theta, \quad n \geq 1. \end{aligned}$$

Como  $a^n \neq 0$ , la solución de la ecuación del calor en el disco de radio  $a$  con temperatura prescrita  $u(a, \theta) = f(\theta)$  en la frontera es

$$u(r, \theta) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n r^n \cos n\theta + \sum_{n=1}^{\infty} B_n r^n \operatorname{sen} n\theta,$$

donde los coeficientes  $A_n$  y  $B_n$  están dados por

$$\begin{aligned} A_0 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\theta) d\theta \\ A_n &= \frac{1}{\pi a^n} \int_{-\pi}^{\pi} f(\theta) \cos n\theta d\theta, \quad n \geq 1 \\ B_n &= \frac{1}{\pi a^n} \int_{-\pi}^{\pi} f(\theta) \operatorname{sen} n\theta d\theta, \quad n \geq 1. \end{aligned}$$

### 10.3. Condición de Compatibilidad para la Existencia de Soluciones.

Podría presentársenos el caso de querer resolver la ecuación de Laplace con condiciones de borde de *flujo prescripto*. En cuyo caso se indica el flujo  $-K \nabla u \cdot \bar{n}$ , en lugar de la temperatura  $u$ . Vimos en la Sección 8.5 (en una dimensión) que si se prescribe el flujo en ambos extremos podría no existir solución estacionaria (cuando  $u_x(0) \neq u_x(L)$ ). Veamos que si se prescribe el flujo en la frontera, éste debe satisfacer una condición necesaria para que exista solución: Supongamos que  $u$  es solución de la ecuación de Laplace en una región bidimensional  $\Omega$ . Luego  $\nabla^2 u = 0$  sobre toda esta región, integrando obtenemos

$$0 = \iint_{\Omega} \nabla^2 u dA = \iint_{\Omega} \nabla \cdot (\nabla u) dA.$$

Por el teorema de la divergencia se tiene que  $\iint_{\Omega} \nabla \cdot (\nabla u) dA = \int_{\partial\Omega} \nabla u \cdot \bar{n} ds$ , donde  $\partial\Omega$  denota la curva cerrada que rodea a  $\Omega$  y  $\bar{n}$  el vector normal exterior a  $\Omega$ . Luego

$$\int_{\partial\Omega} \nabla u \cdot \bar{n} ds = 0. \quad (10.4)$$



Esto nos dice que si  $u$  es solución de la ecuación de Laplace (ecuación de difusión estacionaria), el flujo de calor neto a través de la frontera debe ser cero. Esto también está claro desde el punto de vista físico si pensamos en difusión de calor. Si el flujo de calor neto a través de la frontera no fuera cero, habría cambio (en el tiempo) de la energía térmica total dentro de la región, violando la condición de estado estacionario. La condición (10.4) se denomina **condición de compatibilidad** para la ecuación de Laplace.

**Ejemplo 10.1.** Consideremos la ecuación de Laplace  $\nabla^2 u = 0$  en el rectángulo  $[0, L] \times [0, H]$  con las siguientes condiciones de borde

$$u_x(0, y) = f(y), \quad u_x(L, y) = 0, \quad u_y(x, 0) = 0, \quad u_y(x, H) = g(x),$$

para  $0 < x < L$ ,  $0 < y < H$ . Es decir, el flujo está prescrito en el lado izquierdo ( $x = 0$ ) y en el lado superior ( $y = H$ ). La condición de compatibilidad (10.4) nos dice que

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{\partial\Omega} \nabla u \cdot \bar{n} \, ds \\ &= \int_0^L \nabla u(x, 0) \cdot (-\bar{j}) \, dx + \int_0^H \nabla u(L, y) \cdot \bar{i} \, dy \\ &\quad + \int_0^L \nabla u(x, H) \cdot \bar{j} \, dx + \int_0^H \nabla u(0, y) \cdot (-\bar{i}) \, dy \\ &= \int_0^L -u_y(x, 0) \, dx + \int_0^H u_x(L, y) \, dy + \int_0^L u_y(x, H) \, dx + \int_0^H -u_x(0, y) \, dy. \end{aligned}$$

Usando las condiciones de borde, obtenemos que la condición de compatibilidad resulta

$$0 = \int_0^L g(x) \, dx + \int_0^H -f(y) \, dy.$$

Es decir, el problema tiene solución *solo si*

$$\int_0^L g(x) \, dx = \int_0^H f(y) \, dy.$$

**Observación 10.2.** Notemos que si se cumple la condición de compatibilidad en un problema donde la condición de borde sobre todo el borde es de tipo Neumann, entonces el problema tiene *infinitas* soluciones. Todas ellas se obtienen sumando una constante a una solución dada.

## 10.4. Propiedades Cualitativas de la Ecuación de Laplace

### 10.4.1. Propiedad del Valor Medio.

La solución obtenida de la ecuación de Laplace dentro de un círculo por el método de separación de variables nos permite observar un resultado importante. Si evaluamos la función  $u$  en el origen ( $r = 0$ ), vemos que

$$u(\mathbf{0}) = A_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\theta) \, d\theta;$$

es decir, la función  $u$  en el centro es igual al promedio de la temperatura en el borde del círculo. Esta propiedad se conoce como **propiedad del valor medio** para la ecuación de Laplace y se cumple en general en el siguiente sentido.

**Teorema 10.3** (Propiedad del valor medio). *Sea  $u$  una función  $C^2$  y armónica ( $\nabla^2 u = 0$ ) en una región  $\Omega$  de  $\mathbb{R}^2$ . Si el disco centrado en  $(x_0, y_0)$  de radio  $R$  está completamente (con borde) contenido en  $\Omega$  (ver Figura 10.3), y si denotamos con  $C_R$  a la circunferencia de radio  $R$ , entonces*

$$\begin{aligned} u(x_0, y_0) &= \frac{1}{2\pi R} \int_{C_R} u \, ds = \frac{1}{\text{longitud}(C_R)} \int_{C_R} u \, ds \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(x_0 + R \cos \theta, y_0 + R \sin \theta) \, d\theta. \end{aligned}$$

Es decir, el valor de  $u(x_0, y_0)$  es igual al promedio de  $u$  sobre la circunferencia centrada en  $(x_0, y_0)$  y radio  $R$ .

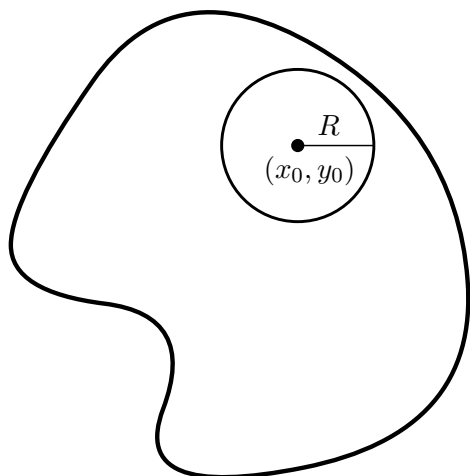


Figura 10.3: Círculo dentro de una región general. La circunferencia no toca el borde de la región.

*Demostración.* Observemos primero que por el teorema de la divergencia, si  $0 < r \leq R$ , entonces

$$\int_{C_r} \nabla u \cdot \bar{n} \, ds = \iint_{D_r} \nabla \cdot \nabla u \, dA = \iint_{D_r} \nabla^2 u \, dA = 0,$$

donde  $D_r$  denota el disco de centro  $(x_0, y_0)$  y radio  $r$ .

Definimos la función  $V(r)$  para  $0 < r \leq R$  como el promedio de  $u$  sobre la circunferencia de centro  $(x_0, y_0)$  y radio  $r$ . Es decir

$$V(r) = \frac{1}{2\pi r} \int_{C_r} u \, ds = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(x_0 + r \cos \theta, y_0 + r \sin \theta) \, d\theta. \quad (10.5)$$

Entonces,

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dr}V(r) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\partial}{\partial r} u(x_0 + r \cos \theta, y_0 + r \operatorname{sen} \theta) d\theta \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u_x(x_0 + r \cos \theta, y_0 + r \operatorname{sen} \theta) \cos \theta + u_y(x_0 + r \cos \theta, y_0 + r \operatorname{sen} \theta) \operatorname{sen} \theta d\theta \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \nabla u(x_0 + r \cos \theta, y_0 + r \operatorname{sen} \theta) \cdot \underbrace{(\cos \theta \bar{i} + \operatorname{sen} \theta \bar{j})}_{\bar{n}} d\theta \\
 &= \frac{1}{2\pi r} \int_{C_r} \nabla u \cdot \bar{n} ds = 0,
 \end{aligned}$$

por (10.5). Por lo tanto  $V(r)$  es constante para  $0 < r \leq R$  y resulta que

$$\begin{aligned}
 V(R) &= \frac{1}{2\pi R} \int_{C_R} u ds = \frac{1}{\operatorname{longitud}(C_R)} \int_{C_R} u ds \\
 &= \lim_{r \rightarrow 0^+} V(r) = \lim_{r \rightarrow 0^+} \frac{1}{2\pi r} \int_{C_r} u ds = \lim_{r \rightarrow 0^+} \frac{1}{\operatorname{longitud}(C_r)} \int_{C_r} u ds.
 \end{aligned}$$

Por otro lado, como los promedios sobre circunferencias que se encogen a un punto convergen al valor de la función en ese punto

$$\lim_{r \rightarrow 0^+} \frac{1}{\operatorname{longitud}(C_r)} \int_{C_r} u ds = u(x_0, y_0),$$

y por lo tanto

$$\frac{1}{2\pi R} \int_{C_R} u ds = u(x_0, y_0).$$

□

Aplicando la propiedad del valor medio a una temperatura en estado de equilibrio obtenemos la siguiente afirmación:

En estado de equilibrio (estacionario) la temperatura en cualquier punto **interior** a  $\Omega$  es igual al promedio de la temperatura alrededor de cualquier círculo (contenido en  $\Omega$ ) centrado en ese mismo punto.

### 10.4.2. Principios del máximo

Como consecuencia de la propiedad del valor medio se obtiene el siguiente principio del máximo.

**Teorema 10.4** (Principio del máximo fuerte). *Sea  $u$  una función  $C^2$  y armónica en un dominio conexo  $\Omega$ . Si alcanza su máximo en un punto interior (que no está en el borde), entonces  $u$  es constante.*

*Demostración.* Sea  $M = \max_{\Omega} u$  y sea  $(x_0, y_0) \in \Omega$  tal que  $u(x_0, y_0) = M$ . Sea ahora  $R$  tal que el disco  $D_R$  con centro  $(x_0, y_0)$  y radio  $R$  está completamente contenido en  $\Omega$ , entonces

$$u(x_0, y_0) = M = \frac{1}{2\pi R} \int_{C_R} u \, ds = \text{promedio de } u \text{ sobre } C_R.$$

Si existiera un punto sobre  $C_R$  donde  $u < M$ , entonces para que el promedio sea  $M$ , debería haber otros puntos sobre  $C_R$  donde  $u > M$ , pero esto es imposible pues  $M$  es el máximo de  $u$ . Por lo tanto  $u = M$  en todos los puntos de  $C_R$  y esto se cumple para todo radio  $R$  tal que  $D_R \subset \Omega$ . En otras palabras,  $u = M$  en todo disco centrado en  $(x_0, y_0)$  contenido en  $\Omega$ .

Ahora, si tomamos  $(x_1, y_1)$  contenido en un disco de estos, resulta que también  $u(x_1, y_1) = M$  y por lo tanto,  $u = M$  en todo disco contenido centrado en  $(x_1, y_1)$  y contenido en  $\Omega$ . Repitiendo este argumento cubrimos  $\Omega$  con discos donde  $u = M$  y resulta que  $u \equiv M$  en  $\Omega$ .  $\square$

**Observación 10.5.** La prueba matemática rigurosa del principio del máximo fuerte para funciones armónicas puede hacerse demostrando que el conjunto de puntos de  $\Omega$  donde  $u = M$  es abierto y cerrado en  $\Omega$ , y no vacío. Usando que  $\Omega$  es conexo resulta que el conjunto es todo  $\Omega$ .

Como consecuencia inmediata del principio del máximo fuerte obtenemos el principio del máximo débil.

**Teorema 10.6** (Principio del máximo débil). *Sea  $\Omega$  una región acotada de  $\mathbb{R}^2$ . Si  $u$  es una función  $C^2$  en  $\Omega$  y armónica ( $\bar{\nabla}^2 u = 0$ ) en  $\Omega$  y es continua en  $\bar{\Omega} := \Omega \cup \partial\Omega$  entonces*

$$\max_{\bar{\Omega}} u = \max_{\partial\Omega} u,$$

*es decir, el máximo se alcanza siempre en un punto del borde de  $\Omega$ .*

### 10.4.3. Unicidad y estabilidad de soluciones.

El principio del máximo es una herramienta muy importante para el análisis de ecuaciones en derivadas parciales, especialmente al establecer propiedades cualitativas.

El primer resultado está dado en la siguiente proposición.

**Proposición 10.7** (Unicidad de soluciones). *El problema de Dirichlet para la ecuación de Poisson*

$$\begin{aligned} \bar{\nabla}^2 u &= f && \text{en } \Omega \\ u &= g && \text{en } \partial\Omega \end{aligned} \tag{10.6}$$

*tiene solución única.*

**Observación 10.8.** La ecuación de Laplace es también una ecuación de Poisson, con término fuente  $f \equiv 0$ .

*Demostración.* Sean  $u_1$  y  $u_2$  soluciones del problema (10.6). Definimos entonces  $v = u_1 - u_2$  y resulta que  $v$  es solución del problema de Laplace

$$\bar{\nabla}^2 v = 0 \quad \text{en } \Omega, \quad v = 0 \quad \text{en } \partial\Omega.$$

Por el principio del máximo,  $\max_{\bar{\Omega}} v = \max_{\partial\Omega} v = 0$  y por lo tanto

$$v(x) \leq 0, \quad \text{para todo } x \in \Omega.$$

Por otro lado,  $-v = u_2 - u_1$  también es solución del mismo problema de Laplace y luego

$$-v(x) \leq 0, \quad \text{para todo } x \in \Omega,$$

o lo que es lo mismo

$$v(x) \geq 0, \quad \text{para todo } x \in \Omega.$$

Por lo tanto  $v(x) \equiv 0$  en  $\Omega$ , o sea  $u_1 \equiv u_2$  en  $\Omega$ .  $\square$

De manera análoga puede demostrarse el siguiente teorema de *estabilidad con respecto a los valores de borde*.

**Teorema 10.9** (Estabilidad con respecto al dato de borde). *Sean  $u_1, u_2$  soluciones de la ecuación de Poisson con el mismo término fuente, pero diferente valor de borde:*

$$\begin{aligned} \bar{\nabla}^2 u_1 = f & \quad \text{en } \Omega, & \bar{\nabla}^2 u_2 = f & \quad \text{en } \Omega, \\ u_1 = g_1 & \quad \text{en } \partial\Omega, & u_2 = g_2 & \quad \text{en } \partial\Omega. \end{aligned} \quad (10.7)$$

Entonces

$$\max_{\bar{\Omega}} |u_1 - u_2| \leq \max_{\partial\Omega} |g_1 - g_2|$$

Antes de proceder a la demostración vale la pena interpretar lo que este principio del máximo significa en la práctica. Supongamos que  $g_1$  es el valor *medido* de la temperatura en el borde de una región y  $g_2$  es el valor *real* o *exacto* ( $g_1$  es una aproximación de  $g_2$ ). Sea ahora  $u_1$  la solución de la ecuación de Poisson con dato  $g_1$  en el borde. Si  $u_2$  denota la temperatura real en la región, entonces  $u_2$  es la solución de la ecuación de Laplace con dato  $g_2$  en el borde. Pregunta: ¿Cuán bien aproxima  $u_1$  (solución calculada) a  $u_2$  (temperatura real desconocida)? Respuesta: tan bien como  $g_1$  aproxime a  $g_2$ .

*Demostración del Teorema 10.9.* Definamos (como en la demostración de la proposición anterior)  $v = u_1 - u_2$ . Entonces  $v$  es solución de la ecuación de Laplace con dato de borde  $g_1 - g_2$ . Más precisamente

$$\bar{\nabla}^2 v = 0 \quad \text{en } \Omega, \quad v = g_1 - g_2 \quad \text{en } \partial\Omega.$$

Por el principio del máximo

$$\max_{\bar{\Omega}} v = \max_{\partial\Omega} v = \max_{\partial\Omega} g_1 - g_2 \leq \max_{\partial\Omega} |g_1 - g_2|,$$

y por lo tanto

$$v(x) \leq \max_{\partial\Omega} |g_1 - g_2|, \quad \text{para todo } x \in \Omega.$$

Análogamente,

$$-v(x) \leq \max_{\partial\Omega} |g_1 - g_2|, \quad \text{para todo } x \in \Omega.$$

Luego

$$-\max_{\partial\Omega} |g_1 - g_2| \leq v(x) = u_1(x) - u_2(x) \leq \max_{\partial\Omega} |g_1 - g_2|, \quad \text{para todo } x \in \Omega.$$

Por lo tanto  $\max_{\bar{\Omega}} |u_1 - u_2| \leq \max_{\partial\Omega} |g_1 - g_2|$ .  $\square$

## 10.5. Ejercicios

**10.1.** Hallar la solución de la ecuación de Laplace dentro de un rectángulo  $0 \leq x \leq L$ ,  $0 \leq y \leq H$  con las siguientes condiciones de borde (para  $0 < x < L$ ,  $0 < y < H$ ):

(a)  $\frac{\partial u}{\partial x}(0, y) = 0$ ,  $\frac{\partial u}{\partial x}(L, y) = 0$ ,  $u(x, 0) = 0$ ,  $u(x, H) = f(x)$ .

(b)  $\frac{\partial u}{\partial x}(0, y) = g(y)$ ,  $\frac{\partial u}{\partial x}(L, y) = 0$ ,  $u(x, 0) = 0$ ,  $u(x, H) = 0$ .

**10.2.** Supongamos que  $u(x, y)$  es la solución de la ecuación de Laplace dentro del rectángulo  $0 \leq x \leq L$ ,  $0 \leq y \leq H$  con las condiciones de borde:

$$u_x(0, y) = 0, \quad u_x(L, y) = 0, \quad u_y(x, 0) = 0, \quad u_y(x, H) = f(x).$$

(a) Sin resolver el problema, explicar la condición de compatibilidad (sobre la función  $f$ ) para que este problema tenga solución. Interpretar físicamente.

(b) Resolver el problema por el método de separación de variables. Mostrar que el método solo funciona bajo la condición de la parte (a). Notar que queda una constante sin determinar, es decir que puede tomar cualquier valor.

(c) Considerar la ecuación del calor dependiente del tiempo  $v_t = k(v_{xx} + v_{yy})$  con condición inicial  $v(x, y, 0) = g(x, y)$  y condiciones de borde

$$v_x(0, y, t) = 0, \quad v_x(L, y, t) = 0, \quad v_y(x, 0, t) = 0, \quad v_y(x, H, t) = f(x),$$

para  $0 < x < L$ ,  $0 < y < H$ ,  $t > 0$ , (las mismas que  $u$ ). Demostrar que si  $v$  es una solución  $C^2$ , entonces la energía

$$E(t) = \int_0^L \int_0^H v(x, y, t) dy dx$$

se mantiene constantemente igual a  $\int_0^L \int_0^H g(x, y) dy dx$  para todo  $t > 0$ .

(d) Como dijimos antes, la solución del ítem (b) tiene una constante arbitraria que queda sin determinar. Determinarla considerando que  $u(x, y)$  es el estado estacionario de la ecuación (del calor) dependiente del tiempo del ítem (c). Es decir, suponer que

$$u(x, y) = \lim_{t \rightarrow \infty} v(x, y, t). \quad (\text{límite uniforme})$$

(Ayuda: la constante a determinar tiene que ver con la condición inicial  $g(x, y)$ .)

**10.3.** Resolver la ecuación de Laplace dentro de un cuarto de círculo de radio 1 ( $0 < \theta < \pi/2$ ,  $0 < r < 1$ ), sujeto a las condiciones de borde

(a)  $\frac{\partial u}{\partial \theta}(r, 0) = 0$ ,  $u(r, \pi/2) = 0$ ,  $u(1, \theta) = f(\theta)$

(b)  $\frac{\partial u}{\partial \theta}(r, 0) = 0$ ,  $\frac{\partial u}{\partial \theta}(r, \pi/2) = 0$ ,  $\frac{\partial u}{\partial r}(1, \theta) = g(\theta)$ .

Mostrar que esta última solución existe solo si  $\int_0^{\pi/2} g(\theta) d\theta = 0$ . ¿Hay solución única?

**10.4.** Resolver la ecuación de Laplace *fuera* de un círculo de radio  $a$  sujeto a la condición de borde (en coord. polares)  $u(a, \theta) = f(\theta)$  (para  $-\pi \leq \theta \leq \pi$ ). Para este problema hace falta imponer que  $u(r, \theta)$  permanece acotado cuando  $r \rightarrow \infty$ .

**10.5.** Resolver la ecuación de Laplace en un anillo circular  $a < r < b$  sujeto a las condiciones de borde

(a)  $u(a, \theta) = f(\theta), \quad u(b, \theta) = 0$

(b)  $\frac{\partial u}{\partial r}(a, \theta) = 0, \quad u(b, \theta) = f(\theta)$

**10.6.** Considerar la ecuación de Laplace dentro de un rectángulo  $0 < x < L, 0 < y < H$ , con las condiciones de borde

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0, y) = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial x}(L, y) = g(y), \quad \frac{\partial u}{\partial y}(x, 0) = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial y}(x, H) = f(x).$$

¿Cuál es la condición de compatibilidad (sobre  $f$  y  $g$ ) para que exista solución y cuál es su interpretación física?

\* **10.7.** Demostrar *rigurosamente* el principio del máximo fuerte del Teorema 10.4 siguiendo la sugerencia de la Observación 10.5.

\* **10.8.** Demostrar con un contraejemplo que si  $\Omega$  no es acotado, entonces no vale el principio del máximo débil (Teorema 10.6). Más precisamente, hallar un dominio  $\Omega$  y una función armónica que valga cero en  $\partial\Omega$  y resulte no acotada en  $\Omega$ .

## Bibliografía complementaria

[Haberman 1998] Haberman, R., *Elementary Applied Partial Differential Equations*, Prentice Hall, Upper Saddle River, NJ, 1998.

[Pinchover-Rubinstein 2005] Pinchover, Y., Rubinstein, J., *An Introduction to Partial Differential Equations*, Cambridge University Press, New York, 2005.

# Capítulo 11

## La ecuación de Ondas en una dimensión

Dada una cuerda elástica de densidad lineal constante  $\rho$  a tensión constante  $T_0$ , alineada con el eje  $x$ , el desplazamiento vertical  $u(x, t)$  del punto a distancia  $x$  del origen, satisface la ecuación

$$\rho u_{tt}(x, t) = T_0 u_{xx}(x, t).$$

Esta ecuación se conoce como *ecuación de ondas unidimensional*, y se obtiene después de algunas simplificaciones que resultan de suponer pequeños desplazamientos y que no hay desplazamiento horizontal. Los detalles pueden encontrarse en [Haberman 1998, Weinberger 1995]. Usualmente se reemplaza  $\frac{T_0}{\rho}$  por  $c^2$  con  $c > 0$  y la ecuación resulta:

$$u_{tt}(x, t) = c^2 u_{xx}(x, t).$$

Dado que la ecuación es de segundo orden en el tiempo, deben imponerse dos condiciones iniciales: la posición inicial y la velocidad inicial:

$$u(x, 0) = f(x), \quad u_t(x, 0) = g(x).$$

En las siguientes secciones hallaremos la solución de esta ecuación en un intervalo infinito y en un intervalo acotado.

### 11.1. Solución en $\mathbb{R}$ . Fórmula de D'Alembert

Si bien no existe una cuerda infinita, es también de interés resolver la ecuación de ondas en toda la recta real. Planteamos el problema con condiciones iniciales:

$$\begin{aligned} u_{tt}(x, t) &= c^2 u_{xx}(x, t), & x \in \mathbb{R}, \quad t > 0, \\ u(x, 0) &= f(x), & x \in \mathbb{R}, \quad (t = 0), \\ u_t(x, 0) &= g(x), & x \in \mathbb{R}, \quad (t = 0). \end{aligned} \tag{11.1}$$

Una manera de encontrar la solución de este problema es a través del cambio de variables

$$w = x + ct, \quad z = x - ct.$$



Buscamos entonces una solución  $v(z, w)$  que satisfaga:

$$v(w, z) = v(x + ct, x - ct) = u(x, t).$$

Procedemos como en el Capítulo 7, cuando resolvíamos ecuaciones de primer orden: Hallamos primero  $u_{xx}$  en términos de  $v, w, z$ :

$$u_x = v_w w_x + v_z z_x$$

$$u_x = v_w \cdot 1 + v_z \cdot 1$$

$$u_x = v_w + v_z$$

$$u_{xx} = v_{ww}w_x + v_{wz}z_x + v_{zw}w_x + v_{zz}z_x$$

$$u_{xx} = v_{ww} \cdot 1 + v_{wz} \cdot 1 + v_{zw} \cdot 1 + v_{zz} \cdot 1$$

$$u_{xx} = v_{ww} + 2v_{wz} + v_{zz}.$$

Hallamos ahora  $u_{tt}$ :

$$u_t = v_w w_t + v_z z_t$$

$$u_t = v_w c + v_z (-c)$$

$$u_t = c v_w - c v_z$$

$$u_{tt} = c v_{ww} w_t + c v_{wz} z_t - c v_{zw} w_t - c v_{zz} z_t$$

$$u_{tt} = c v_{ww} c + c v_{wz} (-c) - c v_{zw} c - c v_{zz} (-c)$$

$$u_{tt} = c^2 v_{ww} - c^2 v_{wz} - c^2 v_{zw} + c^2 v_{zz}$$

$$u_{tt} = c^2 v_{ww} - 2c^2 v_{wz} + c^2 v_{zz}.$$

La ecuación  $u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0$  se transforma en  $-4c^2 v_{wz} = 0$ , que es equivalente a

$$v_{wz} = 0.$$

Integrando primero respecto de  $z$  obtenemos

$$v_w(w, z) = C_1(w),$$

con  $C_1(w)$  una función de la variable  $w$ . Integrando esta última expresión respecto de  $w$  obtenemos

$$v(w, z) = C_2(z) + \mathbb{C}_1(w),$$

donde  $\mathbb{C}_1$  es una primitiva o antiderivada de  $C_1$ . En síntesis,  $v(w, z)$  es la suma de dos funciones, una que depende de  $w = x + ct$  y otra que depende de  $z = x - ct$ . Podemos decir entonces que

$$u(x, t) = F(x + ct) + G(x - ct).$$

Imponemos ahora las condiciones iniciales: La primera  $u(x, 0) = f(x)$  implica que

$$f(x) = F(x) + G(x).$$

La segunda involucra a  $u_t$ , entonces vemos primero que

$$u_t(x, t) = F'(x + ct)c + G'(x - ct)(-c) = cF'(x + ct) - cG'(x - ct),$$

luego debe cumplirse que

$$g(x) = u_t(x, 0) = cF'(x) - cG'(x) = c(F'(x) - G'(x)),$$

que se cumple cuando

$$\int_0^x g(s) ds = c(F(x) - G(x)).$$

Por lo tanto,  $F(x)$  y  $G(x)$  deben cumplir el siguiente sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas ( $f(x)$  y  $g(x)$  son datos conocidos):

$$\begin{aligned} F(x) + G(x) &= f(x) \\ F(x) - G(x) &= \frac{1}{c} \int_0^x g(s) ds. \end{aligned}$$

Sumando las ecuaciones obtenemos que

$$F(x) = \frac{1}{2} \left[ f(x) + \frac{1}{c} \int_0^x g(s) ds \right],$$

y restándolas obtenemos que

$$G(x) = \frac{1}{2} \left[ f(x) - \frac{1}{c} \int_0^x g(s) ds \right].$$

Luego, la solución  $u(x, t) = F(x + ct) + G(x - ct)$  resulta

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \frac{1}{2} \left[ f(x + ct) + \frac{1}{c} \int_0^{x+ct} g(s) ds \right] + \frac{1}{2} \left[ f(x - ct) - \frac{1}{c} \int_0^{x-ct} g(s) ds \right] \\ &= \frac{f(x + ct) + f(x - ct)}{2} + \frac{1}{2c} \left[ \int_0^{x+ct} g(s) ds - \int_0^{x-ct} g(s) ds \right]. \end{aligned}$$

Como  $\int_0^{x+ct} g(s) ds - \int_0^{x-ct} g(s) ds = \int_{x-ct}^{x+ct} g(s) ds$  resulta

$$u(x, t) = \frac{f(x + ct) + f(x - ct)}{2} + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} g(s) ds..$$

Esta fórmula da la solución de la ecuación de ondas (11.1) y se conoce como **Fórmula de D'Alembert**.

**Dominio de dependencia y dominio de influencia.** Además de decir cuál es la solución de la ecuación de ondas en  $\mathbb{R}$ , la fórmula de D'Alembert nos permite determinar lo que se conoce como *dominio de dependencia* y *dominio de influencia* de las condiciones iniciales. Observemos que para determinar el valor de  $u(x_0, t_0)$  solo se usa el valor de  $f(x)$  en  $x = x_0 + ct_0$  y en  $x = x_0 - ct_0$ , y de la función  $g(x)$  se usa su valor sobre el intervalo  $[x_0 - ct_0, x_0 + ct_0]$ . Es decir:

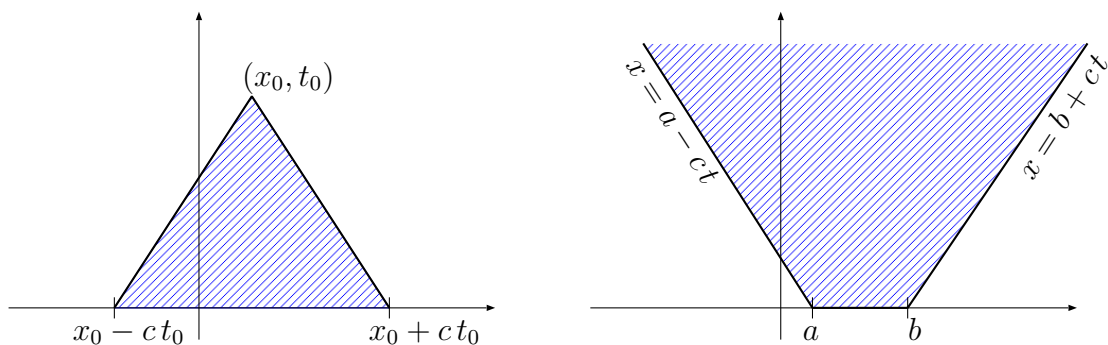


Figura 11.1: Dominio de dependencia y de influencia para la ecuación de ondas.

El valor de  $u(x_0, t_0)$  depende de los datos iniciales en  $[x_0 - ct_0, x_0 + ct_0]$ . El intervalo  $[x_0 - ct_0, x_0 + ct_0]$  se denomina dominio de *dependencia* de la solución en  $(x_0, t_0)$ .

Por otro lado, los valores de los datos iniciales  $f(x)$  y  $g(x)$  sobre el intervalo  $[a, b]$  solo influirán sobre los puntos  $(x, t)$  que estén sobre el cono de influencia:

$$\mathcal{C}_{[a,b]} = \{(x, t) : a - ct \leq x \leq b + ct, t > 0\}.$$

## 11.2. Cuerda vibrante con extremos fijos

Planteamos ahora la ecuación de ondas en un intervalo, que modela el desplazamiento vertical de una cuerda elástica de longitud  $L$ , sujeta en ambos extremos, como la cuerda de una guitarra:

$$\begin{aligned} u_{tt}(x, t) &= c^2 u_{xx}(x, t), & 0 < x < L, & \quad t > 0, \\ u(0, t) &= 0, & t > 0, \\ u(L, t) &= 0, & t > 0, \\ u(x, 0) &= f(x), & 0 < x < L, & \quad (t = 0), \\ u_t(x, 0) &= g(x), & 0 < x < L, & \quad (t = 0). \end{aligned} \tag{11.2}$$

Intentamos resolverla por el método de separación de variables. Para ello, ignoramos momentáneamente las condiciones iniciales y buscamos soluciones de la forma  $u(x, t) = \phi(x)h(t)$ . La ecuación diferencial  $u_{tt} = c^2 u_{xx}$  implica

$$\phi(x)h''(t) = c^2 \phi''(x)h(t),$$

que es equivalente a

$$\frac{1}{c^2} \frac{h''(t)}{h(t)} = \frac{\phi''(x)}{\phi(x)} = -\lambda,$$

y se cumple siempre que ambos lados sean iguales a la misma constante  $-\lambda$ . Las condiciones de borde  $u(0, t) = 0$  y  $u(L, t) = 0$  implican que  $\phi(0) = 0$ , y  $\phi(L) = 0$  pues queremos soluciones no triviales.

Los autovalores  $\lambda$  se determinan hallando todas las soluciones no triviales de

$$\phi''(x) = -\lambda \phi(x), \quad 0 < x < L, \quad \phi(0) = 0, \quad \phi(L) = 0.$$

Ya hemos resuelto este problema de autovalores antes, y hemos hallado que

$$\lambda_n = \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2, \quad \phi_n(x) = \text{sen} \frac{n\pi x}{L}, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Debemos ahora hallar las funciones  $h_n(t)$  correspondientes a cada  $\lambda_n$ . La ecuación que debe resolver  $h_n(t)$  es

$$h_n''(t) = -\lambda_n c^2 h_n(t),$$

o, reemplazando el valor de  $\lambda_n$ ,

$$h_n''(t) = -\left(\frac{n\pi c}{L}\right)^2 h_n(t),$$

cuya solución general es

$$h_n(t) = a_n \cos \frac{n\pi ct}{L} + b_n \text{sen} \frac{n\pi ct}{L}.$$

Las soluciones de variables separables son entonces

$$u_n(x, t) = \text{sen} \frac{n\pi x}{L} \left( a_n \cos \frac{n\pi ct}{L} + b_n \text{sen} \frac{n\pi ct}{L} \right), \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Superponiendo soluciones obtenemos la solución más general

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \text{sen} \frac{n\pi x}{L} \left( a_n \cos \frac{n\pi ct}{L} + b_n \text{sen} \frac{n\pi ct}{L} \right).$$

Observamos ahora que a diferencia de la ecuación de difusión, las soluciones son ahora *oscilantes*, y dados los coeficientes  $a_n, b_n$ , nunca existirá  $\lim_{t \rightarrow \infty} u(x, t)$ .

Al imponer las condiciones iniciales quedarán determinados los coeficientes  $a_n, b_n$ , dependiendo del desplazamiento inicial  $f(x)$  y de la velocidad inicial  $g(x)$ . Por un lado,

$$u(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} \text{sen} \frac{n\pi x}{L} \left( \underbrace{a_n \cos \frac{n\pi c 0}{L}}_1 + \underbrace{b_n \text{sen} \frac{n\pi c 0}{L}}_0 \right) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{sen} \frac{n\pi x}{L}.$$

Por lo tanto, debe cumplirse que

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{sen} \frac{n\pi x}{L},$$

lo que se logra tomando  $a_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \text{sen} \frac{n\pi x}{L}$ . Por otro lado,

$$u_t(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \text{sen} \frac{n\pi x}{L} \left( -a_n n\pi c \text{sen} \frac{n\pi ct}{L} + b_n n\pi c \cos \frac{n\pi ct}{L} \right),$$

y entonces

$$u_t(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} \left( -a_n \frac{n\pi c}{L} \underbrace{\operatorname{sen} \frac{n\pi c t_0}{L}}_0 + b_n \frac{n\pi c}{L} \underbrace{\cos \frac{n\pi c t_0}{L}}_1 \right) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \frac{n\pi c}{L} \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L}.$$

La segunda condición inicial se cumple entonces cuando

$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \frac{n\pi c}{L} \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L},$$

y esto se logra tomando

$$b_n \frac{n\pi c}{L} = \frac{2}{L} \int_0^L g(x) \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} dx,$$

o, lo que es lo mismo

$$b_n = \frac{2}{n\pi c} \int_0^L g(x) \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} dx, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Resumiendo:

La solución de (11.2) es

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} \left( a_n \cos \frac{n\pi c t}{L} + b_n \operatorname{sen} \frac{n\pi c t}{L} \right).$$

con

$$a_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L}, \quad b_n = \frac{2}{n\pi c} \int_0^L g(x) \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} dx, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

**Observación 11.1.** Las frecuencias de oscilación  $\frac{n\pi c}{L}$ ,  $n = 1, 2, \dots$ , se llaman *modos* de vibración de la cuerda. La primera frecuencia de oscilación (que se obtiene con  $n = 1$ ) es

$$\frac{\pi c}{L} = \frac{\pi}{L} \sqrt{\frac{T_0}{\rho}},$$

y se llama *modo principal de vibración* de la cuerda. En el caso de una cuerda *amortiguada* como las reales de una guitarra por ejemplo, este primer modo de vibración es muy aproximado a la frecuencia de vibración que más perdura en el tiempo.

Notemos que el modo principal de vibración aumenta cuando aumenta la tensión  $T_0$ , lo que equivale a un sonido más agudo de una cuerda de guitarra al aumentar la tensión por medio de las clavijas.

También se escucha un sonido más agudo cuando se disminuye la longitud de las cuerdas por ejemplo apoyando los dedos en los trastes de la guitarra, esto equivale a disminuir  $L$ , lo que también aumenta el modo principal de vibración.

En una guitarra, la densidad de las cuerdas es mayor cuanto más arriba se encuentran, vemos que el modo principal de vibración disminuye al aumentar la densidad. Esto se corresponde con un sonido más grave de las cuerdas superiores.

## 11.3. Ejercicios

11.1. Considerar la ecuación de ondas

$$u_{tt}(x, t) = c^2 u_{xx}(x, t), \quad x \in \mathbb{R}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

(a) Mostrar que si  $F$  y  $G$  son funciones  $C^2$  definidas en  $\mathbb{R}$ , entonces

$$u(x, t) = F(x + ct) + G(x - ct), \quad x \in \mathbb{R}, \quad t \in \mathbb{R},$$

es solución. Se dice entonces que  $u(x, t)$  es una superposición de *ondas viajeras*. ¿Por qué?

(b) Hallar fórmulas para  $F$  y  $G$  para que la solución  $u(x, t)$  cumpla con las condiciones iniciales

$$u(x, 0) = e^{-x^2} \quad u_t(x, 0) = 0, \quad x \in \mathbb{R}.$$

(c) Para  $c = 3$ , graficar aproximadamente la solución  $u(x, t)$  como función de  $x$  para  $t = 1$ ,  $t = 2$  y  $t = 3$ .

(d) ¿Qué diferencia se observaría en los gráficos si  $c$  fuera 6 en lugar de 3?

11.2. Consideremos una cuerda vibrante levemente *amortiguada* que satisface

$$\rho u_{tt} = T_0 u_{xx} - \beta u_t, \quad 0 \leq x \leq L, \quad t \geq 0,$$

con  $\beta$  el parámetro de rozamiento suficientemente pequeño (que cumple  $0 < \beta^2 < 4\rho T_0 \pi^2 / L^2$ ). Hallar la solución que satisface las siguientes condiciones de borde y condiciones iniciales

$$u(0, t) = 0 \quad u(L, t) = 0, \quad t \geq 0, \quad u(x, 0) = f(x), \quad u_t(x, 0) = g(x), \quad 0 < x < L.$$

Ayuda: Al proponer la solución por variables separadas se obtiene

$$\frac{\rho h''(t) + \beta h'(t)}{T_0 h(t)} = \frac{\phi''(x)}{\phi(x)}.$$

Las autofunciones  $\phi_n(x)$  y los autovalores  $\lambda_n$  son los mismos que antes, y las soluciones  $h$  deben satisfacer

$$\rho h''(t) + \beta h'(t) = -\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 T_0 h(t).$$

Resolver esta ecuación ordinaria proponiendo  $h(t) = e^{rt}$ . La condición dada sobre  $\beta$  en el enunciado implicará que las soluciones  $r_1, r_2$  de la ecuación característica son complejas.

## Bibliografía complementaria

[Haberman 1998] Haberman, R., *Elementary Applied Partial Differential Equations*, Prentice Hall, Upper Saddle River, NJ, 1998.

[Weinberger 1995] Weinberger, H.F., *A First Course in Partial Differential Equations: with Complex Variables and Transform Methods*, Dover Publications Inc., 1995.

# Capítulo 12

## Ecuaciones en más variables independientes.

### 12.1. Difusión en dos dimensiones

La ecuación de difusión en un dominio bidimensional  $\Omega$  (de forma arbitraria) es

$$\begin{aligned} (ED) \quad & u_t(x, y; t) = k \bar{\nabla}^2 u(x, y; t) & (x, y) \in \Omega, \quad t > 0 \\ (CB) \quad & u(x, y; t) = 0 & (x, y) \in \partial\Omega, \quad t > 0 \\ (CI) \quad & u(x, y; 0) = f(x, y) & (x, y) \in \Omega, \quad (t = 0). \end{aligned} \quad (12.1)$$

Hemos considerado aquí condiciones de borde (CB) de tipo Dirichlet o de valor prescrito, y recordemos que  $\bar{\nabla}^2 u(x, y; t) = u_{xx}(x, y; t) + u_{yy}(x, y; t)$ .

**Separación de la variable tiempo.** Si procedemos con el método de separación, pero solo separando la variable tiempo, dejando las variables espaciales en una misma función, proponemos una solución de la siguiente forma:

$$u(x, y; t) = h(t) \phi(x, y).$$

Si esta  $u(x, y; t)$  es solución de la ecuación de difusión (12.1), entonces debe ocurrir que

$$h'(t) \phi(x, y) = k h(t) \bar{\nabla}^2 \phi(x, y) \quad \implies \quad \frac{1}{k} \frac{h'(t)}{h(t)} = \frac{\bar{\nabla}^2 \phi(x, y)}{\phi(x, y)}.$$

Como los miembros izquierdo y derecho de la última igualdad dependen de diferentes variables independientes, deben igualar a una misma constante  $-\lambda$ . Es decir

$$h'(t) = -k \lambda h(t), \quad \bar{\nabla}^2 \phi(x, y) = -\lambda \phi(x, y).$$

Para que  $u(x, y; t)$  cumpla la condición de borde (CB) y no sea la solución trivial, debe cumplirse que

$$h(t) \phi(x, y) = 0, \quad (x, y) \in \partial\Omega, \quad t > 0 \quad \implies \quad \phi(x, y) = 0, \quad (x, y) \in \partial\Omega.$$

Arribamos entonces al siguiente problema de autovalores para el Laplaciano:

Hallar  $\lambda \in \mathbb{R}$  y  $\phi(x, y) \not\equiv 0$  tal que

$$\begin{aligned} \nabla^2 \phi &= -\lambda \phi, & \text{en } \Omega, \\ \phi &= 0 & \text{en } \partial\Omega. \end{aligned}$$

En las siguientes secciones resolveremos este problema de autovalores para algunas formas concretas simples. Lo que se cumple en general para geometrías arbitrarias (con borde suave a trozos) es el siguiente teorema, cuya demostración queda fuera del alcance de este curso.

**Teorema 12.1.** *Dado un dominio  $\Omega$ , existe una sucesión de autovalores*

$$0 < \lambda_1 < \lambda_2 \leq \lambda_3 \leq \lambda_4 \leq \dots \rightarrow \infty,$$

*y correspondientes autofunciones*

$$\phi_1, \phi_2, \phi_3, \phi_4, \dots,$$

*que satisfacen lo siguiente:*

- $\iint_{\Omega} \phi_n \phi_m dA = \begin{cases} 0, & \text{si } n \neq m, \\ \|\phi_n\|^2 \neq 0, & \text{si } n = m, \end{cases} \quad n, m = 1, 2, 3, \dots$
- *Para cada  $f$  continua en  $\Omega$  y  $C^1$  a trozos sobre  $\Omega$ , se cumple que*

$$f(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \phi_n(x, y),$$

$$\text{si } a_n = \frac{1}{\|\phi_n\|^2} \iint_{\Omega} f(x, y) \phi_n(x, y) dA, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

En el teorema anterior hemos usado la notación  $\|\phi_n\|^2 = \iint_{\Omega} [\phi_n(x)]^2 dA$ .

**Observación 12.2.** En el caso unidimensional  $\Omega = (0, L)$ , las autofunciones  $\phi_n(x)$  y los autovalores  $\lambda_n$  son

$$\lambda_n = \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2, \quad \phi_n(x) = \text{sen} \frac{n\pi x}{L}, \quad n = 1, 2, \dots$$

En este caso sencillo, sabemos que  $\|\phi_n\|^2 = \frac{L}{2}$ , y por eso la fórmula para el cálculo de los coeficientes de Fourier de senos es  $a_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \text{sen} \frac{n\pi x}{L} dx$ .

El teorema garantiza la existencia de autovalores y autofunciones para el Laplaciano. Además, cualquier función continua y  $C^1$  a trozos se puede aproximar por combinaciones



lineales de autofunciones. En las siguientes secciones veremos ejemplos de autovalores y autofunciones para diferentes geometrías. Ahora continuemos con la ecuación de difusión.

Para cada autovalor  $\lambda_n$  deberemos luego resolver la ecuación

$$h'_n(t) = -\lambda_n k h_n(t), \quad t > 0.$$

Las soluciones de este problema son

$$h_n(t) = a_n e^{-k\lambda_n t}.$$

Así, aunque no conozcamos los autovalores  $\lambda_n$  y sus autofunciones  $\phi_n$  sabemos que las soluciones de variables separables son

$$u_n(x, y; t) = a_n \phi_n(x, y) e^{-k\lambda_n t}, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Una solución más general se obtiene sumando las de variables separables, es decir

$$u(x, y; t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \phi_n(x, y) e^{-k\lambda_n t}.$$

La condición inicial  $u(x, y; 0) = f(x, y)$  equivale a

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \phi_n(x, y) = f(x, y), \quad (x, y) \in \Omega,$$

que acorde al Teorema 12.1 se cumplirá si elegimos  $a_n = \frac{1}{\|\phi_n\|^2} \iint_{\Omega} f(x, y) \phi_n(x, y) dA$ ,  $n = 1, 2, 3, \dots$

Resumiendo:

La solución de (12.1) es

$$u(x, y; t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \phi_n(x, y) e^{-k\lambda_n t}.$$

$$\text{con } a_n = \frac{1}{\|\phi_n\|^2} \iint_{\Omega} f(x, y) \phi_n(x, y) dA, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

## 12.2. Ondas en dos dimensiones

La ecuación de ondas en un dominio bidimensional  $\Omega$  (de forma arbitraria) es

$$\begin{aligned} (ED) \quad & u_{tt}(x, y; t) = c^2 \nabla^2 u(x, y; t) & (x, y) \in \Omega, \quad t > 0 \\ (CB) \quad & u(x, y; t) = 0 & (x, y) \in \partial\Omega, \quad t > 0 \\ (CI_1) \quad & u(x, y; 0) = f(x, y) & (x, y) \in \Omega, \quad (t = 0). \\ (CI_2) \quad & u_t(x, y; 0) = g(x, y) & (x, y) \in \Omega, \quad (t = 0). \end{aligned} \tag{12.2}$$

Esta ecuación modela por ejemplo la vibración de una membrana en posición horizontal (alineada con el plano  $xy$ ), donde  $u(x, y; t)$  denota el desplazamiento vertical (en dirección al eje  $z$ ).

**Separación de la variable tiempo** Si procedemos—como en la sección anterior—con el método de separación, pero solo separando la variable tiempo, dejando las variables espaciales en una misma función, proponemos una solución  $u(x, y; t) = h(t) \phi(x, y)$  para la ecuación de ondas (12.2). Entonces debe ocurrir que

$$h''(t) \phi(x, y) = c^2 h(t) \bar{\nabla}^2(x, y) \quad \Longrightarrow \quad \frac{1}{c^2} \frac{h''(t)}{h(t)} = \frac{\bar{\nabla}^2 \phi(x, y)}{\phi(x, y)}.$$

Como los miembros izquierdo y derecho de la igualdad anterior dependen de diferentes variables independientes, deben igualar ambos a una misma constante  $-\lambda$ . Es decir

$$h''(t) = -c^2 \lambda h(t), \quad \bar{\nabla}^2 \phi(x, y) = -\lambda \phi(x, y).$$

Para que  $u(x, y; t)$  cumpla la condición de borde (CB) y no sea la solución trivial, debe cumplirse que

$$h(t)\phi(x, y) = 0, \quad (x, y) \in \partial\Omega, \quad t > 0 \quad \Longrightarrow \quad \phi(x, y) = 0, \quad (x, y) \in \partial\Omega.$$

Arribamos entonces al siguiente problema de autovalores para el Laplaciano:

Hallar  $\lambda \in \mathbb{R}$  y  $\phi(x, y) \not\equiv 0$  tal que

$$\begin{aligned} \bar{\nabla}^2 \phi &= -\lambda \phi, & \text{en } \Omega, \\ \phi &= 0 & \text{en } \partial\Omega. \end{aligned}$$

Este es el mismo problema de autovalores al que llegamos en la sección anterior, y por lo tanto sigue valiendo el Teorema 12.1

Para cada autovalor  $\lambda_n$  deberemos luego resolver la ecuación

$$h_n''(t) = -\lambda_n c^2 h_n(t), \quad t > 0.$$

Como los autovalores  $\lambda_n$  son todos positivos, las soluciones de este problema son

$$h_n(t) = a_n \cos(c\sqrt{\lambda_n}t) + b_n \operatorname{sen}(c\sqrt{\lambda_n}t).$$

Así, aunque no conozcamos los autovalores  $\lambda_n$  y sus autofunciones  $\phi_n$  sabemos que las soluciones de variables separables son

$$u_n(x, y; t) = \phi_n(x, y) \left( a_n \cos(c\sqrt{\lambda_n}t) + b_n \operatorname{sen}(c\sqrt{\lambda_n}t) \right), \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Obtenemos una solución más general sumando las de variables separables, es decir

$$u(x, y; t) = \sum_{n=1}^{\infty} \phi_n(x, y) \left( a_n \cos(c\sqrt{\lambda_n}t) + b_n \operatorname{sen}(c\sqrt{\lambda_n}t) \right).$$

La ecuación de ondas tiene dos condiciones iniciales:

$$u(x, y; 0) = f(x, y) \quad \text{y} \quad u_t(x, y; 0) = g(x, y).$$

Al imponer la primera, recordando que  $\cos 0 = 1$  y que  $\sin 0 = 0$ , obtenemos

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \phi_n(x, y) = f(x, y), \quad (x, y) \in \Omega,$$

que acorde al Teorema 12.1 se cumplirá si elegimos  $a_n = \frac{1}{\|\phi_n\|^2} \iint_{\Omega} f(x, y) \phi_n(x, y) dA$ ,  $n = 1, 2, 3, \dots$

Para imponer la segunda necesitamos primero calcular  $u_t(x, y; t)$

$$u_t(x, y; t) = \sum_{n=1}^{\infty} \phi_n(x, y) \left( -a_n c \sqrt{\lambda_n} \sin(c \sqrt{\lambda_n} t) + b_n c \sqrt{\lambda_n} \cos(c \sqrt{\lambda_n} t) \right).$$

Ahora sí, la condición inicial  $u(x, y; 0) = g(x, y)$  se lee

$$\sum_{n=1}^{\infty} \phi_n(x, y) b_n c \sqrt{\lambda_n} = g(x, y), \quad (x, y) \in \Omega,$$

que acorde al Teorema 12.1 se cumplirá si elegimos  $b_n = \frac{1}{\|\phi_n\|^2} \frac{1}{c \sqrt{\lambda_n}} \iint_{\Omega} g(x, y) \phi_n(x, y) dA$ ,  $n = 1, 2, 3, \dots$

Resumiendo:

La solución de (12.2) es

$$u(x, y; t) = \sum_{n=1}^{\infty} \phi_n(x, y) \left( a_n \cos(c \sqrt{\lambda_n} t) + b_n \sin(c \sqrt{\lambda_n} t) \right),$$

con

$$a_n = \frac{1}{\|\phi_n\|^2} \iint_{\Omega} f(x, y) \phi_n(x, y) dA \quad \text{y} \quad b_n = \frac{1}{\|\phi_n\|^2} \frac{1}{c \sqrt{\lambda_n}} \iint_{\Omega} g(x, y) \phi_n(x, y) dA,$$

$n = 1, 2, 3, \dots$

### 12.3. Problema de autovalores en un rectángulo

Consideremos en esta sección el problema de autovalores que apareció en las secciones anteriores, pero considerando el dominio concreto y simple  $\Omega = (0, L) \times (0, H)$ . Es decir, consideramos el problema de hallar  $\lambda \in \mathbb{R}$  y  $\phi(x, y)$  no trivial que satisfagan

$$\begin{aligned} \phi_{xx} + \phi_{yy} &= -\lambda \phi, & 0 < x < L, & \quad 0 < y < H, \\ \phi(0, y) &= 0, & 0 < y < H, & \\ \phi(L, y) &= 0, & 0 < y < H, & \\ \phi(x, 0) &= 0, & 0 < x < L, & \\ \phi(x, H) &= 0, & 0 < x < L. & \end{aligned} \tag{12.3}$$

Recordemos que tanto  $\lambda$  como  $\phi(x, y)$  son incógnitas de este problema, y dada la simplicidad de las condiciones de borde, tratemos de encontrar soluciones con  $\phi(x, y)$  de variables separables. Es decir, buscamos soluciones de la forma

$$\phi(x, y) = f(x)g(y).$$

Como  $\nabla^2 \phi(x, y) = \phi_{xx}(x, y) + \phi_{yy}(x, y) = f''(x)g(y) + f(x)g''(y)$ , resulta que queremos hallar  $f(x)$ ,  $g(y)$  no triviales y  $\lambda \in \mathbb{R}$  que satisfagan

$$f''(x)g(y) + f(x)g''(y) = -\lambda f(x)g(y),$$

es decir,

$$\frac{f''(x)}{f(x)} + \frac{g''(y)}{g(y)} = -\lambda, \quad \implies \quad \frac{f''(x)}{f(x)} = -\lambda - \frac{g''(y)}{g(y)}.$$

Los miembros derecho e izquierdo de la última igualdad son funciones de diferentes variables, y por lo tanto, ambos miembros deben ser iguales a una misma constante de separación que llamaremos  $-\mu$ . Por otro lado, las condiciones de borde implican que  $f(0) = f(L) = 0$  y  $g(0) = g(H) = 0$ . El problema de hallar autovalores y autofunciones de variables separables para el rectángulo  $(0, L) \times (0, H)$  resulta entonces:

Hallar funciones  $f(x)$ ,  $g(y)$  y valores  $\lambda \in \mathbb{R}$ , y  $\mu \in \mathbb{R}$  que satisfagan:

$$\begin{aligned} \frac{f''(x)}{f(x)} &= -\mu, & 0 < x < L, & & f(0) = f(L) = 0, \\ \frac{g''(y)}{g(y)} &= -(\lambda - \mu), & 0 < y < H, & & g(0) = g(H) = 0. \end{aligned} \tag{12.4}$$

La ecuación para  $f(x)$  resulta

$$f''(x) = -\mu f(x), \quad 0 < x < L, \quad f(0) = f(L) = 0,$$

que tiene solución no trivial  $f(x) = \sin \frac{n\pi x}{L}$  para  $\mu = \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2$ ,  $n = 1, 2, \dots$

Para cada uno de estos valores de  $\mu_n = \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2$  debemos hallar todos los números  $\lambda$  y funciones no nulas  $g(y)$  tales que

$$g''(y) = -\left[\lambda - \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2\right] g(y), \quad 0 < y < H, \quad g(0) = g(H) = 0.$$

Este problema es del mismo tipo que el anterior, y tendrá solución no trivial  $g_m(y) = \sin \frac{m\pi y}{H}$  siempre que

$$\left[\lambda - \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2\right] = \left(\frac{m\pi}{H}\right)^2, \quad m = 1, 2, \dots$$

Por lo tanto, los valores  $\lambda$  para los que el problema (12.3) tiene solución no trivial  $\phi(x, y) = f(x)g(y)$  son los de la forma

$$\lambda_{nm} = \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 + \left(\frac{m\pi}{H}\right)^2, \quad n, m = 1, 2, 3, \dots,$$

y sus correspondientes autofunciones son

$$\phi_{nm}(x, y) = \text{sen} \frac{n\pi x}{L} \text{sen} \frac{m\pi y}{H}.$$

Es fácil ver que

$$\iint_{\Omega} \phi_{nm}(x, y) \phi_{k\ell}(x, y) dA = \begin{cases} \|\phi_{nm}\|^2 = \frac{L}{2} \frac{H}{2} & \text{si } k = n \text{ y } \ell = m, \\ 0 & \text{en c.o.c.} \end{cases}$$

A diferencia del Teorema 12.1 los autovalores están *indexados* por dos índices  $n$  y  $m$ , en lugar de uno. Podríamos ordenarlos y numerarlos con un solo índice de ser necesario, pero esto no hace falta en la práctica, además el orden dependerá de cuánto valgan  $L$  y  $H$ . Veamos lo que ocurre en el problema de difusión y en el de ondas.

**Difusión en una placa rectangular.** Si consideramos el problema (12.1) en  $\Omega = (0, L) \times (0, H)$ , lo visto en la sección anterior nos permite decir que la solución es

$$u(x, y; t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} a_{nm} \text{sen} \frac{n\pi x}{L} \text{sen} \frac{m\pi y}{H} e^{-k[(\frac{n\pi}{L})^2 + (\frac{m\pi}{H})^2]t}$$

con

$$a_{nm} = \frac{4}{LH} \int_0^L \int_0^H f(x, y) \text{sen} \frac{n\pi x}{L} \text{sen} \frac{m\pi y}{H} dy dx, \quad n, m = 1, 2, \dots$$

**Vibración de una membrana rectangular.** Si consideramos el problema (12.2) en  $\Omega = (0, L) \times (0, H)$ , lo visto en la sección anterior nos permite decir que la solución es

$$u(x, y; t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \text{sen} \frac{n\pi x}{L} \text{sen} \frac{m\pi y}{H} [a_{nm} \cos(c\omega_{nm} t) + b_{nm} \text{sen}(c\omega_{nm} t)]$$

con  $\omega_{nm} = \sqrt{\lambda_{nm}} = \sqrt{(\frac{n\pi}{L})^2 + (\frac{m\pi}{H})^2}$ ,

$$a_{nm} = \frac{4}{LH} \int_0^L \int_0^H f(x, y) \text{sen} \frac{n\pi x}{L} \text{sen} \frac{m\pi y}{H} dy dx,$$

y

$$b_{nm} = \frac{1}{c\omega_{nm}} \frac{4}{LH} \int_0^L \int_0^H g(x, y) \text{sen} \frac{n\pi x}{L} \text{sen} \frac{m\pi y}{H} dy dx,$$

para  $n, m = 1, 2, \dots$

## 12.4. Problema de autovalores en el disco. Funciones de Bessel

### 12.4.1. El caso general

Consideremos en esta sección el problema de autovalores para el Laplaciano con condiciones de borde Dirichlet en el círculo de radio  $R$ . Si utilizamos coordenadas polares  $(r, \theta)$ , el problema resulta: Hallar  $\lambda \in \mathbb{R}$  y  $\phi(r, \theta)$  no trivial que satisfagan

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \theta^2} &= -\lambda \phi, & 0 < r < R, & \quad -\pi < \theta < \pi, \\ \phi(r, -\pi) &= \phi(r, \pi) & 0 < r < R, \\ \frac{\partial \phi}{\partial \theta}(r, -\pi) &= \frac{\partial \phi}{\partial \theta}(r, \pi) & 0 < r < R, \\ \phi(R, \theta) &= 0 & -\pi < \theta < \pi, \\ |\phi(0, \theta)| &< \infty & -\pi < \theta < \pi. \end{aligned} \tag{12.5}$$

Busquemos nuevamente autofunciones de variables separables  $\phi(r, \theta) = f(r)g(\theta)$ . Deseamos entonces hallar funciones no triviales  $f(r)$ ,  $g(\theta)$  y números  $\lambda$  que satisfagan:

$$f''(r)g(\theta) + \frac{1}{r}f'(r)g(\theta) + \frac{1}{r^2}f(r)g''(\theta) = -\lambda f(r)g(\theta).$$

Multiplicando por  $\frac{r^2}{f(r)g(\theta)}$ , obtenemos

$$\frac{r^2 f''(r) + r f'(r)}{f(r)} + \frac{g''(\theta)}{g(\theta)} = -\lambda r^2, \quad \implies \quad \frac{r^2 f''(r) + r f'(r) + \lambda r^2 f(r)}{f(r)} = -\frac{g''(\theta)}{g(\theta)}.$$

Los miembros derecho e izquierdo de la última igualdad son funciones de diferentes variables, y por lo tanto, ambos miembros deben ser iguales a una misma constante de separación que llamaremos  $\mu$ . Por otro lado, las condiciones de borde implican que  $|f(0)| < \infty$ ,  $f(R) = 0$ ,  $g(-\pi) = g(\pi)$  y  $g'(-\pi) = g'(\pi)$ . El problema de hallar autovalores y autofunciones de variables separables para el disco de radio  $R$  resulta entonces:

Hallar funciones no nulas  $f(r)$ ,  $g(\theta)$  y valores  $\lambda \in \mathbb{R}$ , y  $\mu \in \mathbb{R}$  que satisfagan:

$$\begin{aligned} \frac{r^2 f''(r) + r f'(r) + \lambda r^2 f(r)}{f(r)} &= \mu, & 0 < r < R, & \quad |f(0)| < \infty, \quad f(R) = 0, \\ \frac{g''(\theta)}{g(\theta)} &= -\mu, & -\pi < \theta < \pi, & \quad g(-\pi) = g(\pi) \quad g'(-\pi) = g'(\pi). \end{aligned}$$

Una de estas ecuaciones ya hemos resuelto anteriormente, y es la ecuación para  $g(\theta)$ , que determina los valores  $\mu = n^2$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$  con correspondientes autofunciones

$$g_0(\theta) = 1, \quad g_n^1(\theta) = \cos n\theta, \quad g_n^2(\theta) = \sen n\theta, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Para cada valor de  $\mu = n^2$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$ , debemos hallar todos los valores  $\lambda \in \mathbb{R}$  y funciones no nulas  $f(r)$  tales que

$$r^2 f''(r) + r f'(r) + \lambda r^2 f(r) = \mu f(r), \quad 0 < r < R, \quad |f(0)| < \infty, \quad f(R) = 0,$$

o bien, reemplazando  $\mu$  por  $n^2$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$ ,

$$r^2 f''(r) + r f'(r) + (\lambda r^2 - n^2) f(r) = 0, \quad 0 < r < R, \quad |f(0)| < \infty, \quad f(R) = 0. \quad (12.6)$$

Para resolver este problema a valores de borde hacemos el cambio de variables  $z = \sqrt{\lambda} r$  y la identificación  $F(z) = f(r)$ , o sea  $F(z) = F(\sqrt{\lambda} r)$  y  $f(r) = f(r/\sqrt{\lambda})$ , entonces

$$f'(r) = f_r(r) = F_z(z) z_r = F'(z) \sqrt{\lambda}, \quad \text{y análogamente} \quad f''(r) = \lambda F''(z).$$

Luego, la ecuación para  $f(r)$  se transforma en

$$z^2 F''(z) + z F'(z) + (z^2 - n^2) F(z) = 0, \quad (12.7)$$

que se conoce como *Ecuación Diferencial de Bessel de orden  $n$* . Las soluciones de esta ecuación se llaman *funciones de Bessel*, y se describen a continuación.

**Funciones de Bessel.** La ecuación de Bessel de orden  $n$  es una ecuación de segundo grado, y para cada  $n = 0, 1, 2, \dots$  tiene dos soluciones linealmente independientes, usualmente denotadas por  $J_n(z)$  y  $Y_n(z)$ . La función  $J_n(z)$  se denomina función de Bessel *de primera especie* de orden  $n$ , y la función  $Y_n(z)$  se denomina función de Bessel *de segunda especie* de orden  $n$ . Hay varias definiciones equivalentes, pero a efectos de conocerlas un poco escribimos las siguientes, válidas para  $n = 0, 1, 2, \dots$ :

$$\begin{aligned} J_n(z) &= \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos(nt - z \operatorname{sen} t) dt, \\ Y_n(z) &= \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \operatorname{sen}(z \operatorname{sen} t - nt) dt - \frac{1}{\pi} \int_0^\infty [e^{nt} + (-1)^n e^{-nt}] e^{-z \operatorname{senh} t} dt. \end{aligned} \quad (12.8)$$

Su definición precisa no es tan importante para este curso, dado que vienen implementadas en diferentes bibliotecas de software<sup>1</sup>. Lo importante es saber algunas de sus propiedades:

- $\lim_{z \rightarrow 0^+} J_n(z) = \begin{cases} 1, & \text{si } n = 0, \\ 0, & \text{si } n = 1, 2, \dots \end{cases}$
- $\lim_{z \rightarrow 0^+} Y_n(z) = -\infty, \quad n = 0, 1, 2, \dots$
- $\lim_{z \rightarrow +\infty} J_n(z) = \lim_{z \rightarrow +\infty} Y_n(z) = 0, \quad n = 0, 1, 2, \dots$
- $J_n(z)$  y  $Y_n(z)$  son funciones oscilatorias, y oscilan indefinidamente a medida que  $z$  crece (ver Figura 12.1).

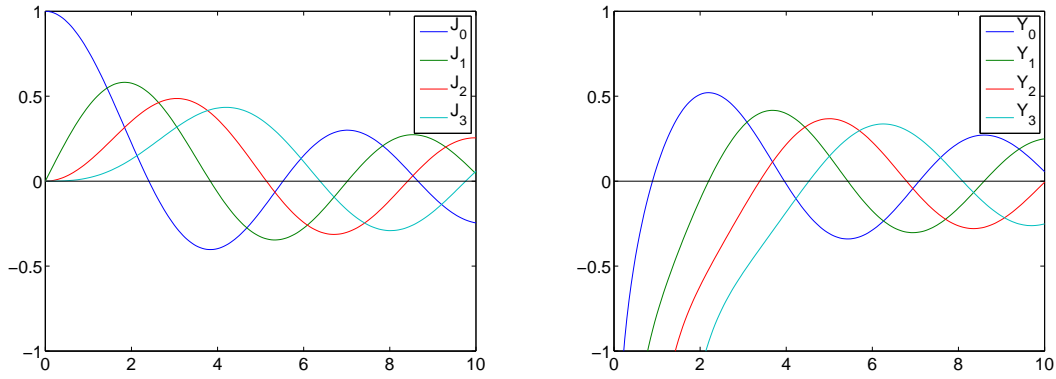


Figura 12.1: Gráfico de las funciones de Bessel de primera especie  $J_n(z)$  (izquierda) y de segunda especie  $Y_n(z)$  (derecha) para  $n = 0, 1, 2, 3$ .

Teniendo las funciones de Bessel de primera y segunda especie, llegamos a que la solución general de la ecuación de Bessel de orden  $n$  (12.7) es

$$F(z) = a J_n(z) + b Y_n(z), \quad 0 < z < \infty,$$

con  $a, b$  constantes arbitrarias. Luego, la solución general de la ecuación diferencial en (12.6) es

$$f(r) = a J_n(\sqrt{\lambda} r) + b Y_n(\sqrt{\lambda} r).$$

La condición de borde  $|f(0)| < \infty$  implica  $b = 0$  pues  $\lim_{r \rightarrow 0^+} Y_n(\sqrt{\lambda} r) = -\infty$ . Luego la solución de (12.6) que cumple la condición de borde  $|f(0)| < \infty$  es

$$f(r) = a J_n(\sqrt{\lambda} r),$$

y la condición de borde  $f(R) = 0$  se cumplirá (con solución no trivial) siempre que

$$J_n(\sqrt{\lambda} R) = 0,$$

es decir, siempre que  $\sqrt{\lambda} R$  sea un cero de  $J_n(z)$ . Para escribir lo que sigue más precisamente, denotemos con  $z_{nm}$  al  $m$ -ésimo cero positivo de la función de Bessel  $J_n$ , que acorde a lo que dijimos anteriormente son infinitos (ver Figura 12.2). Entonces para cada  $n = 0, 1, 2, \dots$  existen infinitos autovalores  $\lambda_{nm}$ , que son

$$\lambda_{nm} = \left( \frac{z_{nm}}{R} \right)^2,$$

con correspondientes autofunciones

$$f_{nm}(r) = J_n\left(\frac{z_{nm}}{R} r\right), \quad m = 1, 2, \dots \quad (12.9)$$

<sup>1</sup>En MATLAB y en *Mathematica* se llaman `besselj` y `bessely`; en wxMaxima se llaman `bessel_j` y `bessel_y`.



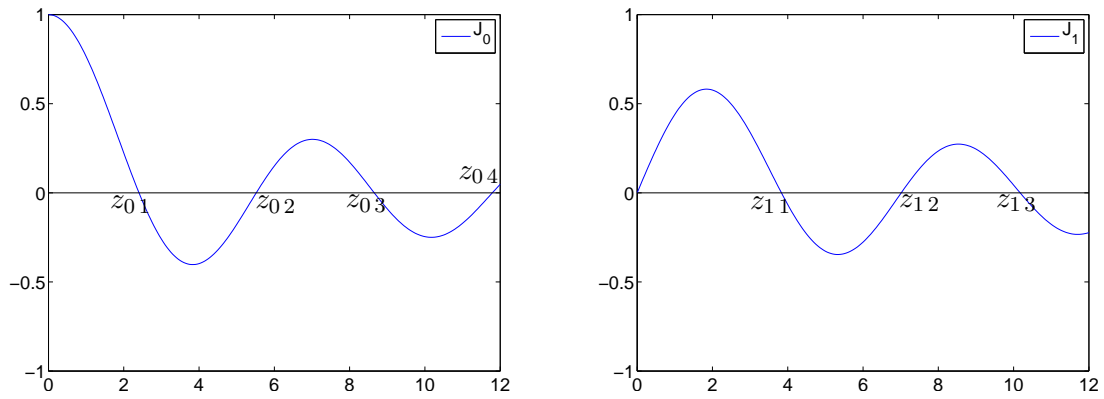


Figura 12.2: Gráfico de las funciones de Bessel de primera especie  $J_0(z)$  (izquierda) y  $J_1(z)$  (derecha) y de los ceros  $z_{0m}, z_{1m}, m = 1, 2, \dots$

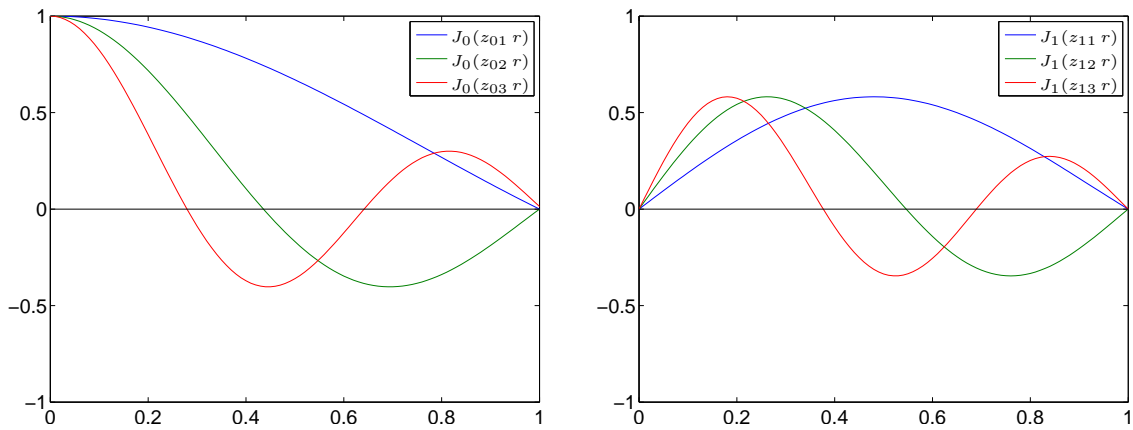


Figura 12.3: Gráfico de funciones de Bessel de primera especie *escaladas*  $f_{0m}(r) = J_0(z_{0m}r)$  (izquierda) y  $f_{1m}(r) = J_1(z_{1m}r)$  (derecha) para  $m = 1, 2, 3$ , tomando  $R = 1$ .

Es importante destacar que fijado el  $n$ , las funciones  $f_{nm}$  resultan ortogonales con el peso  $r$  sobre el intervalo  $[0, R]$ , más precisamente (ver Ejercicio 12.5)

$$\int_0^R f_{nm_1}(r) f_{nm_2}(r) r dr = 0, \quad \text{si } m_1 \neq m_2. \quad (12.10)$$

Resumiendo, tenemos el siguiente resultado:

Los autovalores y las autofunciones de (12.5) están dados por

■  $n = 0$ :

$$\lambda_{0m} = \left(\frac{z_{0m}}{R}\right)^2, \quad \phi_{0m} = J_0\left(\frac{z_{0m}}{R}r\right), \quad m = 1, 2, 3, \dots$$

■  $n = 1, 2, 3, \dots$ :

$$\begin{aligned} \lambda_{nm} &= \left(\frac{z_{nm}}{R}\right)^2, \\ \phi_{nm}^1(r, \theta) &= J_n\left(\frac{z_{nm}}{R}r\right) \cos n\theta, \\ \phi_{nm}^2(r, \theta) &= J_n\left(\frac{z_{nm}}{R}r\right) \sin n\theta, \quad m = 1, 2, 3, \dots, \end{aligned}$$

donde  $J_n$  es la función de Bessel de orden  $n$  de primera especie, y  $z_{nm}$  es el  $m$ -ésimo cero positivo de  $J_n$ .

Como consecuencia de la ortogonalidad que ya conocemos de los senos y cosenos, y la ortogonalidad de las funciones de Bessel (12.10) obtenemos la ortogonalidad de las autofunciones de (12.5) (ver ejercicio 12.6)

$$\iint_{D_R} \phi_{nm}^i \phi_{k\ell}^j dA = \int_{-\pi}^{\pi} \int_0^R \phi_{nm}^i(r, \theta) \phi_{k\ell}^j(r, \theta) r dr d\theta = 0, \quad \text{si } i \neq j \text{ ó } n \neq k \text{ ó } m \neq \ell. \quad (12.11)$$

**Difusión en el disco.** Si consideramos el problema (12.1) en  $\Omega = D_R$ , lo visto en la sección anterior nos permite decir que la solución es

$$\begin{aligned} u(r, \theta; t) &= \sum_{m=1}^{\infty} a_{0m} J_0\left(\frac{z_{0m}}{R}r\right) e^{-\left(\frac{z_{0m}}{R}\right)^2 kt} \\ &\quad + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} J_n\left(\frac{z_{nm}}{R}r\right) (a_{nm} \cos n\theta + b_{nm} \sin n\theta) e^{-\left(\frac{z_{nm}}{R}\right)^2 kt}, \end{aligned}$$

con

$$a_{0m} = \frac{\iint_{D_R} f(r, \theta) J_n\left(\frac{z_{0m}}{R} r\right) dA}{\iint_{D_R} \left[J_n\left(\frac{z_{0m}}{R} r\right)\right]^2 dA}, \quad m = 1, 2, \dots,$$

$$a_{nm} = \frac{\iint_{D_R} f(r, \theta) J_n\left(\frac{z_{nm}}{R} r\right) \cos n\theta dA}{\iint_{D_R} \left[J_n\left(\frac{z_{nm}}{R} r\right) \cos n\theta\right]^2 dA}, \quad n = 1, 2, \dots, m = 1, 2, \dots,$$

$$b_{nm} = \frac{\iint_{D_R} f(r, \theta) J_n\left(\frac{z_{nm}}{R} r\right) \operatorname{sen} n\theta dA}{\iint_{D_R} \left[J_n\left(\frac{z_{nm}}{R} r\right) \operatorname{sen} n\theta\right]^2 dA} \quad n = 1, 2, \dots, m = 1, 2, \dots$$

Para simplificar, suele denotarse con  $\lambda = (n, m, i)$  en el conjunto de índices

$$\Lambda = \{(0, m, 0) : m = 1, 2, \dots\} \cup \{(n, m, i) : n = 1, \dots, m = 1, 2, \dots, i = 1, 2\},$$

y para  $\lambda = (n, m, i)$

$$\phi_\lambda(r, \theta) = \phi_{nm}^i(r, \theta) = \begin{cases} J_0\left(\frac{z_\lambda}{R} r\right), & \text{si } n = 0, \\ J_n\left(\frac{z_\lambda}{R} r\right) \cos n\theta, & \text{si } n > 0 \text{ e } i = 1, \\ J_n\left(\frac{z_\lambda}{R} r\right) \operatorname{sen} n\theta, & \text{si } n > 0 \text{ e } i = 2, \end{cases}$$

con  $z_\lambda = z_{nm}$ .

Luego, la solución del problema de difusión puede escribirse simplificada de la siguiente manera:

$$u(r, \theta; t) = \sum_{\lambda \in \Lambda} a_\lambda \phi_\lambda(r, \theta) e^{-\left(\frac{z_\lambda}{R}\right)^2 kt},$$

con

$$a_\lambda = \frac{\iint_{D_R} f \phi_\lambda dA}{\iint_{D_R} [\phi_\lambda]^2 dA}.$$

**Vibración de una membrana circular.** Si consideramos el problema (12.2) en  $\Omega = D_R$ , lo visto en la sección anterior nos permite decir que la solución es

$$u(r, \theta; t) = \sum_{\lambda \in \Lambda} \phi_\lambda(r, \theta) \left( a_\lambda \cos\left(\frac{z_\lambda}{R} ct\right) + b_\lambda \operatorname{sen}\left(\frac{z_\lambda}{R} ct\right) \right)$$

con

$$a_\lambda = \frac{\iint_{D_R} f \phi_\lambda dA}{\iint_{D_R} \phi_\lambda^2 dA},$$

y

$$b_\lambda = \frac{R}{c z_\lambda} \frac{\iint_{D_R} g \phi_\lambda dA}{\iint_{D_R} \phi_\lambda^2 dA}.$$

### 12.4.2. El caso con simetría radial

Cuando las funciones dato de las condiciones iniciales tienen simetría radial,  $f = f(r)$  y  $g = g(r)$ , todas las integrales de los numeradores que definen  $a_{nm}$  y  $b_{nm}$  para  $n =$

1, 2, ... dan cero, y solo sobreviven los coeficientes con índice  $n = 0$ . Por lo tanto, la solución de la ecuación de difusión resulta

$$u(r, t) = \sum_{m=1}^{\infty} a_{0m} J_0\left(\frac{z_{0m}}{R} r\right) e^{-\left(\frac{z_{0m}}{R}\right)^2 kt},$$

con

$$a_{0m} = \frac{\int_0^R f(r) J_0\left(\frac{z_{0m}}{R} r\right) r dr}{\int_0^R \left[J_0\left(\frac{z_{0m}}{R} r\right)\right]^2 r dr}, \quad m = 1, 2, 3, \dots$$

Por otro lado, la solución de la ecuación de ondas, bajo la hipótesis de simetría radial, resulta

$$u(r, t) = \sum_{m=1}^{\infty} J_0\left(\frac{z_{0m}}{R} r\right) \left[ a_{0m} \cos\left(\frac{z_{0m}}{R} ct\right) + b_{0m} \operatorname{sen}\left(\frac{z_{0m}}{R} ct\right) \right],$$

con

$$a_{0m} = \frac{\int_0^R f(r) J_0\left(\frac{z_{0m}}{R} r\right) r dr}{\int_0^R \left[J_0\left(\frac{z_{0m}}{R} r\right)\right]^2 r dr}, \quad y \quad b_{0m} = \frac{R}{c z_{0m}} \frac{\int_0^R g(r) J_0\left(\frac{z_{0m}}{R} r\right) r dr}{\int_0^R \left[J_0\left(\frac{z_{0m}}{R} r\right)\right]^2 r dr}, \quad m = 1, 2, 3, \dots$$

## 12.5. Ecuación de Laplace en un cilindro circular. Funciones de Bessel modificadas

Como ya hemos visto, la ecuación de Laplace  $\nabla^2 u = 0$  modela el estado estacionario de la ecuación de difusión en ausencia de términos fuente. Hemos resuelto la ecuación de Laplace en un rectángulo y en un círculo. La ecuación de Laplace en un prisma rectangular también puede resolverse por el método de separación de variables (ver Ejercicio 12.7). Como puede verse en los ejercicios al final del capítulo, las tres variables independientes dan dos problemas de autovalores con soluciones oscilatorias, y el restante problema tiene soluciones no-oscilatorias.

Un problema más desafiante presenta la ecuación de Laplace en un cilindro de radio  $R$  y altura  $H$ . Utilizando las coordenadas cilíndricas

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \operatorname{sen} \theta, \quad z = z,$$

el dominio tridimensional  $\Omega$  se describe por

$$\Omega : 0 \leq r < R, \quad -\pi \leq \theta \leq \pi, \quad 0 < z < H,$$

y la ecuación de Laplace es:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0, \quad u = u(r, \theta, z).$$

Para fijar ideas imponemos condiciones de borde de tipo Dirichlet, en las tres caras del cilindro:

$$\begin{aligned} (\text{cara plana inferior}) \quad & u(r, \theta, 0) = \alpha(r, \theta), \quad 0 < r < R, \quad -\pi < \theta < \pi, \\ (\text{cara plana superior}) \quad & u(r, \theta, H) = \beta(r, \theta), \quad 0 < r < R, \quad -\pi < \theta < \pi, \\ (\text{cara curva lateral}) \quad & u(R, \theta, z) = \gamma(\theta, z), \quad -\pi < \theta < \pi, \quad 0 < z < H. \end{aligned}$$

En la frontera *artificial*  $\theta = -\pi$ ,  $\theta = \pi$  tenemos las condiciones de borde *periódicas* ya vistas:

$$u(r, -\pi, z) = u(r, \pi, z), \quad u_\theta(r, -\pi, z) = u_\theta(r, \pi, z), \quad 0 < r < R, \quad 0 < z < H. \quad (12.12)$$

Nos encontramos frente a tres condiciones de borde no homogéneas. Como antes, podemos dividir este problema en tres subproblemas, cada uno de los cuales involucra resolver la ecuación de Laplace, pero tiene condición de borde no-homogénea en una cara, y homogénea en las otras dos. Más precisamente,

$$u = u_1 + u_2 + u_3,$$

con

$$\begin{cases} \bar{\nabla}^2 u_1 = 0 \\ u_1(r, \theta, 0) = \alpha(r, \theta), \\ u_1(r, \theta, H) = 0, \\ u_1(R, \theta, z) = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} \bar{\nabla}^2 u_2 = 0 \\ u_2(r, \theta, 0) = 0, \\ u_2(r, \theta, H) = \beta(r, \theta), \\ u_2(R, \theta, z) = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} \bar{\nabla}^2 u_3 = 0 \\ u_3(r, \theta, 0) = 0, \\ u_3(r, \theta, H) = 0, \\ u_3(R, \theta, z) = \gamma(\theta, z), \end{cases}$$

además de las condiciones de periodicidad (12.12).

A continuación, comenzamos a resolver por el método de separación de variables una sola vez, y luego tratamos los diferentes casos individualmente.

**Separación de variables.** Buscamos soluciones de la ecuación de Laplace  $\bar{\nabla}^2 u = 0$  de la forma  $u(r, \theta, z) = f(r)g(\theta)h(z)$ . Entonces  $f(r)$ ,  $g(\theta)$  y  $h(z)$  deben satisfacer

$$f''(r)g(\theta)h(z) + \frac{1}{r}f'(r)g(\theta)h(z) + \frac{1}{r^2}f(r)g''(\theta)h(z) + f(r)g(\theta)h''(z) = 0.$$

Dividiendo por  $f(r)g(\theta)h(z)$  obtenemos

$$\frac{f''(r)}{f(r)} + \frac{f'(r)}{r f(r)} + \frac{g''(\theta)}{r^2 g(\theta)} + \frac{h''(z)}{h(z)} = 0.$$

La suma de los tres primeros términos depende de las variables  $r$ ,  $\theta$  y el cuarto término depende solo de  $z$ , por lo que concluimos que para alguna constante de separación  $\lambda$ ,

$$\frac{h''(z)}{h(z)} = \lambda, \quad \frac{f''(r)}{f(r)} + \frac{f'(r)}{r f(r)} + \frac{g''(\theta)}{r^2 g(\theta)} = -\lambda.$$

Multiplicando la segunda de estas ecuaciones por  $r^2$  obtenemos que

$$\frac{r^2 f''(r)}{f(r)} + \frac{r f'(r)}{f(r)} + \lambda r^2 = -\frac{g''(\theta)}{g(\theta)},$$

que a su vez implica que

$$\frac{r^2 f''(r)}{f(r)} + \frac{r f'(r)}{f(r)} + \lambda r^2 = \mu, \quad -\frac{g''(\theta)}{g(\theta)} = \mu.$$

Las condiciones de borde periódicas (12.12) deben cumplirse en los tres casos, y se traducen en  $g(-\pi) = g(\pi)$ ,  $g'(-\pi) = g'(\pi)$ . Esto implica que los autovalores  $\mu$  son  $n^2$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$ , con autofunciones:

$$\begin{aligned} n = 0 & & g(\theta) &= 1, \\ n = 1, 2, 3, \dots & & g(\theta) &= \cos n\theta, \quad \text{sen } n\theta. \end{aligned}$$

Para cada  $n = 0, 1, 2, 3, \dots$  deberemos hallar los valores de  $\lambda$  para los cuales las siguientes funciones tienen solución no trivial, y satisfacen las CB correspondientes (en cada caso):

$$\frac{h''(z)}{h(z)} = \lambda, \quad r^2 f''(r) + r f'(r) + (\lambda r^2 - n^2)f(r) = 0.$$

Para saber cuál de estas dos ecuaciones determina los autovalores  $\lambda$ , hace falta considerar las condiciones de borde homogéneas. Éstas dependen de si estamos buscando  $u_1$ ,  $u_2$  ó  $u_3$ .

**Valor prescrito en la cara plana inferior  $z = 0$ .** Consideremos el problema

$$\begin{aligned} \bar{\nabla}^2 u_1 &= 0 \\ u_1(r, \theta, 0) &= \alpha(r, \theta), \\ u_1(r, \theta, H) &= 0, \\ u_1(R, \theta, z) &= 0. \end{aligned}$$

La condición de borde  $u_1(r, \theta, H) = 0$  en la cara plana superior  $z = H$  implica

$$h(H) = 0,$$

y la condición de borde  $u_1(R, \theta, 0) = 0$  en la cara curva lateral  $r = R$  implica

$$f(R) = 0.$$

Una condición de borde que debemos considerar se debe a la singularidad creada por el cambio de variables en  $r = 0$ , que como en el caso de coordenadas polares debemos imponer

$$|f(0)| < \infty.$$

Los autovalores  $\lambda$  estarán determinados por el problema que tiene dos condiciones de borde homogéneas, que en este caso es el siguiente:

$$r^2 f''(r) + r f'(r) + (\lambda r^2 - n^2)f(r) = 0, \quad 0 < r < R, \quad |f(0)| < \infty, \quad f(R) = 0.$$

Las autofunciones de este problema están dadas por las funciones de Bessel de primera especie, y resultan, para cada  $n = 0, 1, 2, \dots$ , las funciones (ver Figuras 12.2–12.3)

$$f_{nm}(r) = J_n\left(\frac{z_{nm}}{R}r\right), \quad \text{donde } z_{nm} \text{ es el } m\text{-ésimo cero positivo de } J_n, \quad m = 1, 2, 3, \dots,$$

y los autovalores son  $\lambda_{nm} = \left(\frac{z_{nm}}{R}\right)^2$ . Ahora, para estos valores de  $\lambda_{nm}$  debemos hallar las funciones  $h(z)$  correspondientes. Como  $\lambda_{nm} = \left(\frac{z_{nm}}{R}\right)^2 > 0$  resulta que  $h(z) =$

$C_1 \cosh \frac{z_{nm}}{R} z + C_2 \sinh \frac{z_{nm}}{R} z$ . Para imponer la condición inicial conviene trasladar las funciones en  $H$ , escribiendo

$$h(z) = C_1 \cosh \frac{z_{nm}}{R} (z - H) + C_2 \sinh \frac{z_{nm}}{R} (z - H).$$

Así  $h(H) = 0$  implica  $C_1 = 0$  y luego  $h(z) = C_2 \sinh \frac{z_{nm}}{R} (z - H)$ .

Resumiendo, las soluciones de variables separables que cumplen las mismas condiciones de borde homogéneas que  $u_1$  son:

$$\begin{aligned} n = 0, & \quad a_{0m} f_{0m}(r) \sinh\left(\frac{z_{0m}}{R}(z - H)\right), & m = 1, 2, \dots, \\ n = 1, 2, \dots, & \quad f_{nm}(r) \sinh\left(\frac{z_{nm}}{R}(z - H)\right) (a_{nm} \cos n\theta + b_{nm} \sin n\theta), & m = 1, 2, \dots, \end{aligned}$$

y una solución más general se obtiene sumándolas:

$$\begin{aligned} u_1(r, \theta, z) = & \sum_{m=1}^{\infty} a_{0m} f_{0m}(r) \sinh\left(\frac{z_{0m}}{R}(z - H)\right) \\ & + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} f_{nm}(r) \sinh\left(\frac{z_{nm}}{R}(z - H)\right) (a_{nm} \cos n\theta + b_{nm} \sin n\theta). \end{aligned}$$

Al imponer la condición de borde  $u_1(r, \theta, 0) = \alpha(r, \theta)$  se requiere que

$$\begin{aligned} \alpha(r, \theta) = & \sum_{m=1}^{\infty} a_{0m} f_{0m}(r) \sinh\left(\frac{z_{0m}}{R}(-H)\right) \\ & + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} f_{nm}(r) \sinh\left(\frac{z_{nm}}{R}(-H)\right) (a_{nm} \cos n\theta + b_{nm} \sin n\theta), \end{aligned}$$

y acorde a lo visto en la sección anterior esto se logra eligiendo

$$\begin{aligned} a_{0m} = & \frac{\iint_{D_R} \alpha(r, \theta) f_{0,m}(r) dA}{-\sinh\left(\frac{z_{0m}}{R} H\right) \iint_{D_R} [f_{0,m}(r)]^2 dA}, & m = 1, 2, \dots, \\ a_{nm} = & \frac{\iint_{D_R} \alpha(r, \theta) f_{nm}(r) \cos n\theta dA}{-\sinh\left(\frac{z_{nm}}{R} H\right) \iint_{D_R} [f_{nm}(r) \cos n\theta]^2 dA}, & n = 1, 2, \dots, \quad m = 1, 2, \dots, \\ b_{nm} = & \frac{\iint_{D_R} \alpha(r, \theta) f_{nm}(r) \sin n\theta dA}{-\sinh\left(\frac{z_{nm}}{R} H\right) \iint_{D_R} [f_{nm}(r) \sin n\theta]^2 dA}, & n = 1, 2, \dots, \quad m = 1, 2, \dots. \end{aligned}$$

Usando que  $\iint_{D_R} v(r, \theta) dA = \int_0^R \int_{-\pi}^{\pi} v(r, \theta) r d\theta dr$  y que además

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 n\theta d\theta = \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 n\theta d\theta = \pi, \quad n = 1, 2, \dots$$

obtenemos las fórmulas más precisas siguientes

$$\begin{aligned}
 a_{0m} &= -\frac{\int_{-\pi}^{\pi} \int_0^R \alpha(r, \theta) f_{0,m}(r) r dr d\theta}{2\pi \sinh\left(\frac{z_{0m}}{R} H\right) \int_0^R [f_{0,m}(r)]^2 r dr}, & m = 1, 2, \dots, \\
 a_{nm} &= -\frac{\int_{-\pi}^{\pi} \int_0^R \alpha(r, \theta) f_{nm}(r) \cos n\theta r dr d\theta}{\pi \sinh\left(\frac{z_{nm}}{R} H\right) \int_0^R [f_{nm}(r)]^2 r dr}, & n = 1, 2, \dots, \quad m = 1, 2, \dots, \\
 b_{nm} &= -\frac{\int_{-\pi}^{\pi} \int_0^R \alpha(r, \theta) f_{nm}(r) \sen n\theta r dr d\theta}{\pi \sinh\left(\frac{z_{nm}}{R} H\right) \int_0^R [f_{nm}(r)]^2 r dr}, & n = 1, 2, \dots, \quad m = 1, 2, \dots.
 \end{aligned}$$

**Valor prescrito en la cara plana superior  $z = H$ .** El cálculo de  $u_2$ , solución de

$$\begin{aligned}
 \bar{\nabla}^2 u_2 &= 0 \\
 u_2(r, \theta, 0) &= 0, \\
 u_2(r, \theta, H) &= \beta(r, \theta), \\
 u_2(R, \theta, z) &= 0,
 \end{aligned}$$

es similar al de  $u_1$  y se deja como ejercicio (ver Ejercicio 12.9).

**Valor prescrito en la cara lateral  $r = R$ .** Consideremos ahora el problema para  $u_3$ :

$$\begin{aligned}
 \bar{\nabla}^2 u_3 &= 0 \\
 u_3(r, \theta, 0) &= 0, \\
 u_3(r, \theta, H) &= 0, \\
 u_3(R, \theta, z) &= \gamma(\theta, z).
 \end{aligned}$$

Las condiciones de borde homogéneas implican que los autovalores  $\lambda$  estarán determinados por el problema

$$h''(z) = \lambda h(z), \quad 0 < z < H, \quad h(0) = 0, \quad h(H) = 0.$$

Ya tenemos experiencia con este problema de autovalores y sabemos que las soluciones son:

$$\lambda = -\left(\frac{m\pi}{H}\right)^2, \quad h(z) = \sen \frac{m\pi z}{H}, \quad m = 1, 2, 3, \dots$$

Ahora bien, para cada  $n = 0, 1, 2, \dots$ , y  $m = 1, 2, 3, \dots$  debemos resolver la siguiente ecuación para  $f(r)$ :

$$r^2 f''(r) + r f'(r) + \left[-\left(\frac{m\pi}{H}\right)^2 r^2 - n^2\right] f(r) = 0, \quad 0 < r < R, \quad |f(0)| < \infty. \quad (12.13)$$

Para resolver este problema hacemos el cambio de variables  $w = \frac{m\pi}{H}r$  y la identificación  $F(w) = f(r)$ , entonces:

$$w^2 F''(w) + w F'(w) + [-w^2 - n^2] F(w) = 0, \quad (12.14)$$

que es similar a (12.7), pero con un signo cambiado. Esta ecuación (12.14) se llama *ecuación de Bessel modificada* de orden  $n$  y los pares de soluciones canónicas se llaman *funciones de Bessel modificadas* y se describen a continuación.



**Funciones de Bessel modificadas.** La ecuación de Bessel modificada de orden  $n$  presentada en (12.14) es una ecuación de segundo grado, y para cada  $n = 0, 1, 2, \dots$  tiene dos soluciones linealmente independientes denotadas por  $I_n(w)$  y  $K_n(w)$ . La función  $I_n(w)$  se denomina función de Bessel modificada de orden  $n$  de primera especie, y la función  $K_n(w)$  se denomina función de Bessel modificada de orden  $n$  de segunda especie. Su definición precisa no es necesaria en este contexto, dado que vienen implementadas en diferentes bibliotecas de software<sup>2</sup>. Lo importante es saber algunas de sus propiedades:

- $\lim_{w \rightarrow 0^+} I_n(w) = \begin{cases} 1, & \text{si } n = 0, \\ 0, & \text{si } n = 1, 2, \dots \end{cases}$
- $\lim_{w \rightarrow 0^+} K_n(w) = \infty, n = 0, 1, 2, \dots$
- $\lim_{w \rightarrow +\infty} I_n(w) = +\infty, n = 0, 1, 2, \dots$
- $\lim_{w \rightarrow +\infty} K_n(w) = 0, n = 0, 1, 2, \dots$
- $I_n(w)$  y  $K_n(w)$  son funciones que **no oscilan** y más aún, son positivas para todo  $w > 0$ ; ver Figura 12.4.

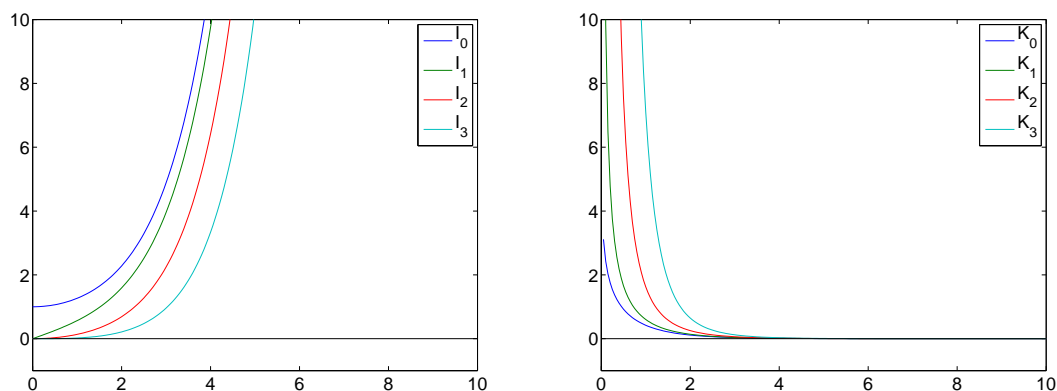


Figura 12.4: Gráfico de las funciones de Bessel modificadas de primera especie  $I_n(w)$  (izquierda) y de segunda especie  $K_n(w)$  (derecha) para  $n = 0, 1, 2, 3$ .

Teniendo las funciones de Bessel modificadas de primera y segunda especie, llegamos a que la solución general de la ecuación de Bessel modificada de orden  $n$  (12.14) es

$$F(w) = aI_n(w) + bK_n(w), \quad 0 < w < \infty,$$

con  $a, b$  constantes arbitrarias. Luego, la solución general de la ecuación diferencial en (12.13) es

$$f(r) = aI_n\left(\frac{m\pi}{H}r\right) + bK_n\left(\frac{m\pi}{H}r\right).$$

<sup>2</sup>En MATLAB y en Mathematica se llaman `besseli` y `besselk`; en wxMaxima se llaman `bessel_i` y `bessel_k`.

La condición de borde  $|f(0)| < \infty$  implica  $b = 0$  pues  $\lim_{r \rightarrow 0^+} K_n\left(\frac{m\pi}{H} r\right) = +\infty$ . Luego la solución de (12.13) que cumple la condición de borde  $|f(0)| < \infty$  es

$$f(r) = a I_n\left(\frac{m\pi}{H} r\right).$$

Resumiendo, las soluciones de variables separables que cumplen las mismas condiciones de borde homogéneas que  $u_3$  son:

$$\begin{aligned} n = 0, & & a_{0m} I_0\left(\frac{m\pi}{H} r\right) \operatorname{sen} \frac{m\pi z}{H}, & & m = 1, 2, \dots, \\ n = 1, 2, \dots, & & I_n\left(\frac{m\pi}{H} r\right) \operatorname{sen} \frac{m\pi z}{H} (a_{nm} \cos n\theta + b_{nm} \operatorname{sen} n\theta), & & m = 1, 2, \dots, \end{aligned}$$

y una solución más general se obtiene sumándolas:

$$\begin{aligned} u_3(r, \theta, z) = & \sum_{m=1}^{\infty} a_{0m} I_0\left(\frac{m\pi}{H} r\right) \operatorname{sen} \frac{m\pi z}{H} \\ & + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} I_n\left(\frac{m\pi}{H} r\right) \operatorname{sen} \frac{m\pi z}{H} (a_{nm} \cos n\theta + b_{nm} \operatorname{sen} n\theta). \end{aligned}$$

Al imponer la condición de borde  $u_3(R, \theta, z) = \gamma(\theta, z)$  se requiere que

$$\begin{aligned} \gamma(\theta, z) = & \sum_{m=1}^{\infty} a_{0m} I_0\left(\frac{m\pi}{H} R\right) \operatorname{sen} \frac{m\pi z}{H} \\ & + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} I_n\left(\frac{m\pi}{H} R\right) \operatorname{sen} \frac{m\pi z}{H} (a_{nm} \cos n\theta + b_{nm} \operatorname{sen} n\theta). \end{aligned} \quad (12.15)$$

Si llamamos  $C_R$  a la pared curva lateral del cilindro, resulta la siguiente propiedad de ortogonalidad (ver ejercicio 12.8):

$$\begin{aligned} \iint_{C_R} \operatorname{sen} \frac{m\pi z}{H} \cos n\theta \operatorname{sen} \frac{k\pi z}{H} \cos \ell\theta \, dA &= 0 & \text{si } m \neq k \text{ ó } n \neq \ell, \\ \iint_{C_R} \operatorname{sen} \frac{m\pi z}{H} \operatorname{sen} n\theta \operatorname{sen} \frac{k\pi z}{H} \operatorname{sen} \ell\theta \, dA &= 0 & \text{si } m \neq k \text{ ó } n \neq \ell, \end{aligned} \quad (12.16)$$

para  $m, k = 1, 2, \dots$  y  $n, \ell = 0, 1, 2, \dots$ . Por lo tanto, la condición de borde (12.15) se logra eligiendo:

$$\begin{aligned} a_{0m} &= \frac{\iint_{C_R} \gamma(\theta, z) \operatorname{sen} \frac{m\pi z}{H} \, dA}{I_0\left(\frac{m\pi}{H} R\right) \iint_{C_R} \left[\operatorname{sen} \frac{m\pi z}{H}\right]^2 \, dA}, & m = 1, 2, \dots, \\ a_{nm} &= \frac{\iint_{C_R} \gamma(\theta, z) \operatorname{sen} \frac{m\pi z}{H} \cos n\theta \, dA}{I_n\left(\frac{m\pi}{H} R\right) \iint_{C_R} \left[\operatorname{sen} \frac{m\pi z}{H} \cos n\theta\right]^2 \, dA}, & n = 1, 2, \dots, m = 1, 2, \dots, \\ b_{nm} &= \frac{\iint_{C_R} \gamma(\theta, z) \operatorname{sen} \frac{m\pi z}{H} \operatorname{sen} n\theta \, dA}{I_n\left(\frac{m\pi}{H} R\right) \iint_{C_R} \left[\operatorname{sen} \frac{m\pi z}{H} \operatorname{sen} n\theta\right]^2 \, dA}, & n = 1, 2, \dots, m = 1, 2, \dots \end{aligned}$$

Usando que  $\iint_{C_R} v(\theta, z) dA = \int_{-\pi}^{\pi} \int_0^H v(\theta, z) R dz d\theta$ , y que entonces

$$\begin{aligned} \iint_{C_R} \left[ \operatorname{sen} \frac{m\pi z}{H} \right]^2 dA &= R \int_{-\pi}^{\pi} d\theta \int_0^H \operatorname{sen}^2 \frac{m\pi z}{H} dz = R 2\pi \frac{H}{2} = R\pi H, \\ \iint_{C_R} \left[ \operatorname{sen} \frac{m\pi z}{H} \cos n\theta \right]^2 dA &= R \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 n\theta d\theta \int_0^H \operatorname{sen}^2 \frac{m\pi z}{H} dz = \frac{R\pi H}{2}, \\ \iint_{C_R} \left[ \operatorname{sen} \frac{m\pi z}{H} \operatorname{sen} n\theta \right]^2 dA &= \int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen}^2 n\theta d\theta \int_0^H \operatorname{sen}^2 \frac{m\pi z}{H} dz = \frac{R\pi H}{2}, \end{aligned}$$

obtenemos las fórmulas más precisas siguientes

$$\begin{aligned} a_{0m} &= \frac{\int_{-\pi}^{\pi} \int_0^H \gamma(\theta, z) \operatorname{sen} \frac{m\pi z}{H} dz d\theta}{I_0\left(\frac{m\pi}{H}R\right)\pi H}, & m = 1, 2, \dots, \\ a_{nm} &= \frac{2 \int_{-\pi}^{\pi} \int_0^H \gamma(\theta, z) \operatorname{sen} \frac{m\pi z}{H} \cos n\theta dz d\theta}{I_n\left(\frac{m\pi}{H}R\right)\pi H}, & n = 1, 2, \dots, m = 1, 2, \dots, \\ b_{nm} &= \frac{2 \int_{-\pi}^{\pi} \int_0^H \gamma(\theta, z) \operatorname{sen} \frac{m\pi z}{H} \operatorname{sen} n\theta dz d\theta}{I_n\left(\frac{m\pi}{H}R\right)\pi H}, & n = 1, 2, \dots, m = 1, 2, \dots \end{aligned}$$

## 12.6. Ejercicios

**12.1.** Consideremos una *membrana* vibrante de forma genérica  $\Omega$  levemente amortiguada que satisface

$$\begin{aligned} \rho u_{tt} &= T_0(u_{xx} + u_{yy}) - \beta u_t, & (x, y) \in \Omega, \quad t > 0, \\ u &= 0, & (x, y) \in \partial\Omega, \quad t > 0, \\ u(x, y, 0) &= f(x, y), & (x, y) \in \Omega, \\ u_t(x, y, 0) &= 0, & (x, y) \in \Omega. \end{aligned}$$

Hallar la solución (separando solo la variable tiempo) suponiendo  $0 < \beta < 2\sqrt{\rho T_0 \lambda_1}$ , con  $\lambda_1$  el primer autovalor del Laplaciano en  $\Omega$ . Dicha solución debe quedar expresada en términos de las funciones  $\phi_n(x, y)$  aludidas en el Teorema 12.1.

**12.2.** Demostrar que para  $\phi_{nm}(x, y) = \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} \operatorname{sen} \frac{m\pi y}{H}$ , y  $\Omega = (0, L) \times (0, H)$  se cumple que

$$\iint_{\Omega} \phi_{nm}(x, y) \phi_{k\ell}(x, y) dA = \begin{cases} \frac{L}{2} \frac{H}{2} & \text{si } k = n \text{ y } \ell = m, \\ 0 & \text{en c.o.c.,} \end{cases}$$

si  $n, m, j, \ell \in \mathbb{N}$ .

**12.3.** Decir cuáles son los primeros 6 autovalores del Laplaciano y sus correspondientes autofunciones en  $\Omega = (0, \pi) \times (0, 2\pi)$  ( $L = \pi$ ,  $H = 2\pi$ ). Notar que algunos autovalores se repiten con autofunciones ortogonales. Decir cuáles son las 6 frecuencias principales de vibración de una membrana elástica (con  $T_0 = 2$  y  $\rho = 1$ ) que ocupa el rectángulo  $\Omega = (0, \pi) \times (0, 2\pi)$ .

**12.4.** Decir cuáles son (aproximadamente) los primeros 6 autovalores del Laplaciano y sus correspondientes autofunciones en  $\Omega = D_1$  es decir, el disco de radio 1. Notar que algunos autovalores se repiten con autofunciones ortogonales. Decir cuáles son las 6 frecuencias principales de vibración de una membrana elástica (con  $T_0 = 2$  y  $\rho = 1$ ) que ocupa el disco unitario  $\Omega = D_1$ . Para este ejercicio deberá hallar de manera aproximada el valor de los ceros de las primeras funciones de Bessel de primera especie. Puede hacerlo, por ejemplo, mediante la aplicación de zoom en los gráficos de las funciones de Bessel, o buscando en alguna tabla. Puede resultarle útil saber que  $z_{n_1 1} < z_{n_2 1}$  siempre que  $n_1 < n_2$ .

\* **12.5.** Demostrar que si  $n = 0, 1, 2, \dots$ ,  $m = 1, 2, \dots$  y  $f_{nm}(r) = J_n\left(\frac{z_{nm}}{R}r\right)$  entonces vale (12.10), es decir

$$\int_0^R f_{nm_1}(r)f_{nm_2}(r)r dr = 0, \quad \text{si } m_1 \neq m_2.$$

Ayuda: Usar que  $r^2 f''_{nm}(r) + r f'_{nm}(r) + (\lambda_{nm} r^2 - n^2) f_{nm} = 0$ , para  $\lambda_{nm} = \left(\frac{z_{nm}}{R}\right)^2$ , y demostrar que

$$\lambda_{nm} f_{nm}(r)r = \frac{n^2}{r} f_{nm}(r) - (r f'_{nm}(r))'.$$

Multiplicar esta igualdad para  $m = m_1$  por  $f_{nm_2}$ , integrar por partes dos veces, usar la condición de borde  $f_{nm}(R) = 0$  para arribar a

$$\lambda_{nm_1} \int_0^R f_{nm_1}(r)f_{nm_2}(r)r dr = \lambda_{nm_2} \int_0^R f_{nm_1}(r)f_{nm_2}(r)r dr.$$

**12.6.** Demostrar la propiedad de ortogonalidad (12.11). (Ayuda: usar la propiedad de ortogonalidad (12.10)).

**12.7.** Hallar la solución de la ecuación de Laplace  $\nabla^2 u = 0$  en el prisma  $(0, L) \times (0, H) \times (0, W)$  con las siguientes condiciones de borde:

(a)

$$\begin{aligned} u(x, y, 0) &= 0, & u(x, y, W) &= 0, & 0 < x < L, & 0 < y < H, \\ u(x, 0, z) &= f(x, z), & u(x, H, z) &= 0, & 0 < x < L, & 0 < z < W, \\ u(0, y, z) &= 0, & u(L, y, z) &= 0 & 0 < y < H, & 0 < z < W. \end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned} u(x, y, 0) &= 0, & u(x, y, W) &= 0, & 0 < x < L, & 0 < y < H, \\ u_y(x, 0, z) &= 0, & u_y(x, H, z) &= 0, & 0 < x < L, & 0 < z < W, \\ u(0, y, z) &= 0, & u(L, y, z) &= f(y, z) & 0 < y < H, & 0 < z < W. \end{aligned}$$

(c) ¿Cómo resulta la solución del item anterior si  $f(y, z)$  solo depende de  $z$ , es decir  $f(y, z) = f(z)$ ?

**12.8.** Demostrar la propiedad de ortogonalidad (12.16).

**12.9.** Calcular la solución de la ecuación de Laplace  $\nabla^2 u$  en el cilindro de radio  $R$  y altura  $H$  con las siguientes condiciones de borde:

(a)

$$\begin{aligned}u(r, \theta, 0) &= 0, & 0 < r < R, \quad -\pi < \theta < \pi, \\u(r, \theta, H) &= \beta(r, \theta), & 0 < r < R, \quad -\pi < \theta < \pi, \\u(R, \theta, z) &= 0, & -\pi < \theta < \pi, \quad 0 < z < H.\end{aligned}$$

(b) (Notar que las condiciones de borde son de tipo Neumann sobre las caras planas)

$$\begin{aligned}u_z(r, \theta, 0) &= 0, & 0 < r < R, \quad -\pi < \theta < \pi, \\u_z(r, \theta, H) &= 0, & 0 < r < R, \quad -\pi < \theta < \pi, \\u(R, \theta, z) &= f(\theta, z), & -\pi < \theta < \pi, \quad 0 < z < H.\end{aligned}$$

(c) ¿Cómo resulta la solución del ítem anterior si  $f(\theta, z)$  solo depende de  $\theta$ , es decir  $f(\theta, z) = f(\theta)$ ? ¿Qué relación guarda con la solución del problema de Laplace en el disco?

## Bibliografía complementaria

- [Bleecker-Csordas 1996] Bleecker, D., Csordas, G., *Basic Partial Differential Equations*, International Press, Cambridge, Massachusetts, 1996.
- [Haberman 1998] Haberman, R., *Elementary Applied Partial Differential Equations*, Prentice Hall, Upper Saddle River, NJ, 1998.

# Capítulo 13

## Métodos numéricos para difusión unidimensional

### 13.1. Diferencias finitas

#### 13.1.1. Problema estacionario (Poisson)

Recordemos el problema de difusión en una dimensión

$$u_t - ku_{xx} = f, \quad u = u(x, t), \quad 0 \leq x \leq L, \quad t \geq 0.$$

Al considerar el *estado estacionario* en que la variable  $u(x, t)$  no cambia con respecto al tiempo  $t$ , tenemos  $u_t = 0$  y obtenemos la ecuación de Poisson

$$-ku_{xx} = f, \quad u = u(x), \quad 0 \leq x \leq L.$$

En la siguiente sección vemos cómo se discretiza el problema de Poisson unidimensional con condiciones de borde de tipo Dirichlet.

#### Condiciones de borde Dirichlet

Consideremos el problema

$$\begin{cases} -ku_{xx} = f, & 0 \leq x \leq L, \\ u(0) = a, \\ u(L) = b. \end{cases} \quad (13.1)$$

**Idea:** La idea principal del método de diferencias finitas consiste en reemplazar derivadas por cocientes de diferencias.

Recordando que  $\frac{dg}{dx}(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h}$ , la idea es tomar  $h$  pequeño y aproximar  $\frac{dg}{dx}(x)$  por  $\frac{g(x+h) - g(x)}{h}$ , o alguna variante:

Diferencia	Fórmula	Error: $\left  \text{fórmula} - \frac{dg}{dx} \right $
Adelantada:	$\frac{dg}{dx}(x) \approx \frac{g(x+h) - g(x)}{h}$	$O(h)$ si $g \in C^2$
Atrasada:	$\frac{dg}{dx}(x) \approx \frac{g(x) - g(x-h)}{h}$	$O(h)$ si $g \in C^2$
Centrada:	$\frac{dg}{dx}(x) \approx \frac{g(x+\frac{h}{2}) - g(x-\frac{h}{2})}{h}$	$O(h^2)$ si $g \in C^3$

Las acotaciones del error se obtienen utilizando el Teorema de Taylor. Recordemos que en la ecuación de Poisson aparece  $u_{xx} = \frac{d^2u}{dx^2}$ . Para derivadas segundas hacemos lo siguiente, utilizando diferencias centradas:

$$\begin{aligned} \frac{d^2u}{dx^2}(x) &= \frac{d}{dx} \left( \frac{du}{dx} \right) (x) \approx \frac{\frac{du}{dx}(x+\frac{h}{2}) - \frac{du}{dx}(x-\frac{h}{2})}{h} \\ &\approx \frac{\frac{u(x+\frac{h}{2}+\frac{h}{2}) - u(x+\frac{h}{2}-\frac{h}{2})}{h} - \frac{u(x-\frac{h}{2}+\frac{h}{2}) - u(x-\frac{h}{2}-\frac{h}{2})}{h}}{h} \\ &= \frac{\frac{u(x+h) - u(x)}{h} - \frac{u(x) - u(x-h)}{h}}{h} \\ &= \frac{u(x+h) - 2u(x) + u(x-h)}{h^2} \end{aligned}$$

Para esta aproximación de la derivada segunda tenemos el siguiente resultado:

**Proposición 13.1.** Si  $u \in C^4$  entonces

$$\frac{d^2u}{dx^2}(x) = \frac{u(x+h) - 2u(x) + u(x-h)}{h^2} + O(h^2).$$

Más precisamente, si  $M = \max_{[x-h, x+h]} |u^{IV}|$ , entonces

$$\left| \frac{d^2u}{dx^2}(x) - \frac{u(x+h) - 2u(x) + u(x-h)}{h^2} \right| \leq \frac{M}{12} h^2. \quad (13.2)$$

*Demostración.* Observemos que por el teorema de Taylor, como  $u \in C^4$ , resulta

$$\begin{aligned} u(x+h) &= u(x) + hu'(x) + \frac{h^2}{2}u''(x) + \frac{h^3}{3!}u'''(x) + \frac{h^4}{4!}u^{IV}(\xi_1) \\ u(x-h) &= u(x) - hu'(x) + \frac{h^2}{2}u''(x) - \frac{h^3}{3!}u'''(x) + \frac{h^4}{4!}u^{IV}(\xi_2), \end{aligned}$$

con  $x-h < \xi_2 < x < \xi_1 < x+h$ . Luego, sumando ambas igualdades, obtenemos

$$u(x+h) - 2u(x) + u(x-h) = h^2u''(x) + \frac{h^4}{12} \frac{u^{IV}(\xi_1) + u^{IV}(\xi_2)}{2}.$$

Como  $u^{IV}$  es continua,  $\frac{u^{IV}(\xi_1) + u^{IV}(\xi_2)}{2} = u^{IV}(\eta)$  para algún  $x-h < \eta < x+h$ , y luego

$$\frac{u(x+h) - 2u(x) + u(x-h)}{h^2} = u''(x) + \frac{h^2}{12}u^{IV}(\eta),$$

que implica la afirmación de la proposición. □

Para obtener un método numérico, tomamos  $N \in \mathbb{N}$  y  $h = \frac{L}{N}$ . Ahora definimos la partición

$$0 = x_1 < x_2 = h < x_3 = 2h < \dots < x_N = L - h < x_{N+1} = L.$$

y reemplazamos  $u_{xx}(x_i)$  en la ecuación por  $\frac{u(x_i+h) - 2u(x_i) + u(x_i-h))}{h^2}$ , para  $i = 2, 3, \dots, N$ . Recordando que  $u(x_1) = a$  y  $u(x_{N+1}) = b$ , llegamos al siguiente sistema de ecuaciones para  $U_i \approx u(x_i)$ :

$$\begin{cases} U_1 = a, \\ -U_{i+1} + 2U_i - U_{i-1} = \frac{h^2}{k} f(x_i), & i = 2, 3, \dots, N, \\ U_{N+1} = b. \end{cases}$$

Este sistema de ecuaciones tiene  $N + 1$  ecuaciones y  $N + 1$  incógnitas  $U_1, U_2, \dots, U_{N+1}$ . Vemos que los valores de  $U_1$  y  $U_{N+1}$  ya están establecidos. Si reemplazamos  $U_2$  por  $a$  y  $U_{N+1}$  por  $b$  obtenemos el siguiente sistema de  $N - 1$  ecuaciones con  $N - 1$  incógnitas:

$$\begin{cases} 2U_2 - U_3 & = \frac{h^2}{k} f_2 + a \\ -U_2 + 2U_3 - U_4 & = \frac{h^2}{k} f_3 \\ -U_3 + 2U_4 - U_5 & = \frac{h^2}{k} f_4 \\ \vdots & \vdots \\ -U_{N-2} + 2U_{N-1} - U_N & = \frac{h^2}{k} f_{N-1} \\ -U_{N-1} + 2U_N & = \frac{h^2}{k} f_N + b, \end{cases}$$

donde hemos denotado  $f_i = f(x_i)$ . En forma matricial resulta

$$k \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & \dots & \dots & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_2 \\ U_3 \\ U_4 \\ \vdots \\ U_{N-1} \\ U_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h^2 f_2 + ka \\ h^2 f_3 \\ h^2 f_4 \\ \vdots \\ h^2 f_{N-1} \\ h^2 f_N + kb \end{bmatrix}.$$

La implementación computacional consiste en escribir un programa que ensamble el sistema y lo resuelva (el código [http://www.fiq.unl.edu.ar/depto-mate/pmorin/MA-2013/poisson\\_dir](http://www.fiq.unl.edu.ar/depto-mate/pmorin/MA-2013/poisson_dir) tiene implementado este método para MATLAB/OCTAVE).

Lo que puede demostrarse, a partir del error cometido por la fórmula en diferencias (13.2) es que

**Teorema 13.2.** *Si la solución exacta  $u(x)$  de (13.1) es  $C^4[0, L]$  entonces*

$$\max_{i=1,2,\dots,N+1} |u(x_i) - U_i| \leq Ch^2 M = ML^2 \frac{1}{N^2},$$



donde  $M = \max_{[0,L]} |u^{IV}|$  y  $C$  es una constante que depende de los parámetros  $k$ ,  $L$ , de la ecuación, pero es independiente de la función  $f(x)$ , y de los datos de borde  $a$ ,  $b$  y del parámetro de discretización  $h$ .

*Demostración.* La demostración de este teorema queda fuera del alcance de este curso. El lector interesado puede encontrarla en [Larsson-Thomé 2009, Ch. 4]  $\square$

## Otras Condiciones de Borde

En esta sección consideramos en el extremo derecho  $x = L$  una condición de borde diferente, que contiene a la de tipo Neumann y de tipo Robin.

Consideremos el problema

$$\begin{cases} -ku_{xx} = f, & 0 \leq x \leq L, \\ u(0) = a, \\ ku'(L) + H_1u(L) = H_2u_E. \end{cases} \quad (13.3)$$

Aquí los datos del problema son:  $k$ ,  $L$ ,  $f(x)$ ,  $a$ ,  $H_1$ ,  $H_2$  y  $u_E$ .

La diferencia esencial entre este problema y el tratado en la sección anterior radica en la derivada  $u'(L)$  que aparece en la condición de borde.

Para no perder precisión en el método, y mantener un error de orden  $O(h^2)$ , usaremos una diferencia centrada para la derivada:

$$u'(L) \approx \frac{u(L+h) - u(L-h)}{2h}.$$

Notamos que  $x_{N+2} = L+h$  es un punto que cae fuera del dominio  $[0, L]$  y por eso a  $x_{N+2}$  lo llamamos *nodo ficticio*. La condición de borde se reemplaza entonces por la ecuación

$$k \frac{U_{N+2} - U_N}{2h} + H_1U_{N+1} = H_2u_E.$$

Esta ecuación reemplaza a la ecuación  $U_{N+1} = b$  en el sistema del problema anterior. Observamos que seguimos teniendo  $N+1$  ecuaciones, pero ahora tenemos  $N+2$  incógnitas, por lo que nos falta una ecuación más. Lo que hacemos es considerar  $x_{N+1} = L$  como un *nodo interior*: imponemos la ecuación diferencial  $-ku'' = f$  en  $x = x_{N+1} = L$ . Es decir, agregamos al sistema la ecuación

$$k \frac{-U_N + 2U_{N+1} - U_{N+2}}{h^2} = f_{N+1}.$$

De esta manera, el sistema resulta

$$\left\{ \begin{array}{l} 2U_2 - U_3 \\ -U_2 + 2U_3 - U_4 \\ -U_3 + 2U_4 - U_5 \\ \vdots \\ -U_{N-1} + 2U_N - U_{N+1} \\ -U_N + 2U_{N+1} - U_{N+2} \\ -U_N + \frac{2hH_1}{k}U_{N+1} + U_{N+2} \end{array} \right. = \begin{array}{l} \frac{h^2}{k}f_2 + a \\ \frac{h^2}{k}f_3 \\ \frac{h^2}{k}f_4 \\ \vdots \\ \frac{h^2}{k}f_N \\ \frac{h^2}{k}f_{N+1} \\ \frac{2hH_2}{k}u_E, \end{array} \quad (13.4)$$

De forma matricial se escribe de la siguiente manera:

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & \dots & 0 & -1 & \frac{2hH_1}{k} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_2 \\ U_3 \\ U_4 \\ \vdots \\ U_N \\ U_{N+1} \\ U_{N+2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{h^2}{k}f_2 + a \\ \frac{h^2}{k}f_3 \\ \frac{h^2}{k}f_4 \\ \vdots \\ \frac{h^2}{k}f_N \\ \frac{h^2}{k}f_{N+1} \\ \frac{2hH_2}{k}u_E \end{bmatrix}.$$

La implementación computacional consiste en escribir un programa que ensamble el sistema y lo resuelva (el código [http://www.fiq.unl.edu.ar/depto-mate/pmorin/MA-2013/poisson\\_robot](http://www.fiq.unl.edu.ar/depto-mate/pmorin/MA-2013/poisson_robot) tiene implementado este método para MATLAB/OCTAVE).

También para este problema se tiene un resultado de estimación del error, cuya demostración escapa al alcance de este curso:

**Teorema 13.3.** *Si la solución exacta  $u(x)$  de (13.3) es  $C^4[0, L]$  entonces*

$$\max_{i=1,2,\dots,N+1} |u(x_i) - U_i| \leq Ch^2M = ML^2 \frac{1}{N^2},$$

donde  $M = \max_{[0,L]} |u^{IV}|$  y  $C$  es una constante que depende de los parámetros  $k$ ,  $L$ ,  $H_1$ ,  $H_2$  de la ecuación, pero es independiente de la función  $f(x)$ , del dato  $u_E$  y del parámetro de discretización  $h$ .

### 13.1.2. Difusión no estacionaria

Consideremos ahora el problema de difusión no estacionaria siguiente

$$\left\{ \begin{array}{l} u_t - ku_{xx} = f(x, t), \quad 0 \leq x \leq L, \quad 0 \leq t \leq T, \\ u(0, t) = a(t), \quad 0 \leq t \leq T, \\ ku_x(L, t) + H_1u(L, t) = H_2u_E(t), \quad 0 \leq t \leq T, \\ u(x, 0) = u_0(x), \quad 0 \leq x \leq L. \end{array} \right. \quad (13.5)$$

Aquí los datos del problema son:  $k, L, T, f(x, t), a(t), H_1, H_2, u_E(t)$  y  $u_0(x)$ .

Para resolver este problema consideramos la grilla de puntos  $(x_i, t_j)$  con  $x_i = (i - 1)h$  como antes y  $t_j = j\Delta t$ , donde  $\Delta t$  es el *parámetro de discretización temporal*.

### Método explícito

Si aproximamos  $u_t$  con una diferencia *adelantada*

$$u_t(x, t) \approx \frac{u(x, t + \Delta t) - u(x, t)}{\Delta t},$$

y  $u_{xx}$  como antes

$$u_{xx}(x, t) \approx \frac{u(x - h, t) - 2u(x, t) + u(x + h, t)}{h^2},$$

obtenemos que en cada punto del dominio se cumple

$$\frac{u(x, t + \Delta t) - u(x, t)}{\Delta t} - k \frac{u(x - h, t) - 2u(x, t) + u(x + h, t)}{h^2} \approx f(x, t).$$

Si nos centramos en  $(x, t) = (x_i, t_j)$ , observando que  $x_i \pm h = x_{i \pm 1}$ ,  $t_j + \Delta t = t_{j+1}$ , tenemos que

$$\frac{u(x_i, t_{j+1}) - u(x_i, t_j)}{\Delta t} - k \frac{u(x_{i-1}, t_j) - 2u(x_i, t_j) + u(x_{i+1}, t_j)}{h^2} \approx f(x_i, t_j).$$

Definimos las aproximaciones  $U_i^j$  de  $u(x_i, t_j)$  de la siguiente manera:

$$\frac{U_i^{j+1} - U_i^j}{\Delta t} - k \frac{U_{i-1}^j - 2U_i^j + U_{i+1}^j}{h^2} = f_i^j,$$

donde denotamos  $f_i^j = f(x_i, t_j)$ . Observamos que solo hay un supra-índice  $j + 1$  en la fórmula anterior, si despejamos el término  $U_i^{j+1}$  que lo contiene obtenemos, llamando  $\lambda = \frac{k\Delta t}{h^2}$ , la siguiente fórmula:

$$U_i^{j+1} = \Delta t f_i^j + [\lambda U_{i-1}^j + (1 - 2\lambda)U_i^j + \lambda U_{i+1}^j].$$

Esta fórmula será útil para calcular  $U$  en el interior de  $[0, L]$ , para  $t > 0$ .

En  $t = 0$  ( $j = 0$ ) usaremos la condición inicial  $u(x, 0) = u_0(x)$ , por lo que tomaremos  $U_i^0 = u_0(x_i)$ ,  $i = 1, 2, \dots, N + 1$ .

En  $x = 0$  usaremos la condición de borde  $u(0, t) = a(t)$  por lo que tomaremos  $U_1^j = a(t_j)$ .

En  $x = L$  tenemos la condición de borde  $ku_x(L, t) + H_1u(L, t) = H_2u_E(t)$ . Aproximando  $u_x(L, t) \approx \frac{u(L+h, t) - u(L-h, t)}{h}$  llegamos a la fórmula

$$k \frac{U_{N+2}^j - U_N^j}{2h} + H_1 U_{N+1}^j = H_2 u_E(t_j), \quad \implies \quad U_{N+2} = \frac{2h}{k} (H_2 u_E(t_{j+1}) - H_1 U_{N+1}^{j+1}) + U_N^{j+1}.$$

A partir de estas fórmulas, diseñamos el siguiente método numérico para la ecuación de difusión (13.5): Sean  $N, M \in \mathbb{N}$  y definamos  $h = L/N$ ,  $\Delta t = T/M$ ,  $\lambda = k\Delta t/h^2$

- $(j = 0) U_i^0 = u_0(x_i), i = 1, 2, \dots, N + 1;$
- $U_{N+2}^0 = (H_2 u_E(0) - H_1 U_{N+1}^0) \frac{2h}{k} + U_N^0;$
- Para  $j = 0, 2, \dots, M - 1$ 
  - $U_0^{j+1} = a(t_{j+1});$
  - $U_i^{j+1} = \Delta t f_i^j + [\lambda U_{i-1}^j + (1 - 2\lambda)U_i^j + \lambda U_{i+1}^j], i = 1, 2, \dots, N + 1;$
  - $U_{N+2}^{j+1} = \frac{2h}{k}(H_2 u_E(t_{j+1}) - H_1 U_{N+1}^{j+1}) + U_N^{j+1};$

La implementación de este método de resolución está en el archivo <http://www.fiq.unl.edu.ar/dej>

Este método tiene una restricción para resultar *estable*. Si observamos el término que multiplica  $U_i^j$  en la fórmula para  $U_i^{j+1}$  vemos que es  $1 - 2\lambda$  con  $\lambda = k\Delta t/h^2$ . Resulta que si  $\lambda \geq 1/2$ , de manera que  $1 - 2\lambda \leq 0$  se observa un fenómeno de *inestabilidad* (verificarlo con el código) que hace que las soluciones oscilen en cada paso de tiempo. Lo que ocurre es que pequeños errores de redondeo se magnifican exponencialmente.

Se recomienda, una vez elegido  $h$ , elegir  $\Delta t$  de manera que  $\lambda \leq 1/4$ , para que el algoritmo funcione correctamente.

También hay estimaciones del error, que resumimos en el siguiente Teorema.

**Teorema 13.4.** *Si la solución exacta  $u(x, t)$  de (13.5) es  $C^4[0, L]$  para la variable  $x$  y  $C^2[0, T]$  para la variable  $T$ , entonces, si  $\lambda = k\Delta t/h^2 < 1/2$ , resulta*

$$\max_{\substack{i=1,2,\dots,N+1 \\ j=1,2,\dots,M}} |u(x_i, t_j) - U_i^j| \leq C(h^2 + \Delta t)M,$$

donde  $M = \max_{[0,L] \times [0,T]} |u_{xxxx}| + |u_{tt}|$  y  $C$  es una constante que depende de los parámetros  $k, L, H_1, H_2$  de la ecuación, pero es independiente de la función  $f(x, t)$ , del dato inicial  $u_0(x)$ , de los datos de borde  $a(t), u_E(t)$  y de los parámetro de discretización  $h, \Delta t$ .

## Método implícito

Cuando los coeficientes son variables, o cuando queremos resolver problemas en dos o tres dimensiones espaciales, la condición de estabilidad puede ser más difícil de determinar. En esta sección veremos un método que es *incondicionalmente estable*, es decir, resulta estable sin importar la relación entre  $\Delta t$  y  $h$ .

La diferencia principal con el método obtenido anteriormente está en aproximar la derivada temporal  $u_t$  por una diferencia *atrasada* en lugar de *adelantada*. Es decir, consideraremos que

$$\frac{u(x_i, t_{j+1}) - u(x_i, t_j)}{\Delta t} \approx u_t(x_i, t_{j+1}).$$

Por lo tanto, vemos que

$$\frac{u(x_i, t_{j+1}) - u(x_i, t_j)}{\Delta t} - k \frac{u(x_{i-1}, t_{j+1}) - 2u(x_i, t_{j+1}) + u(x_{i+1}, t_{j+1}))}{h^2} \approx f(x_i, t_j).$$

Definimos entonces las aproximaciones  $U_i^j$  de  $u(x_i, t_j)$  de la siguiente manera:

$$\frac{U_i^{j+1} - U_i^j}{\Delta t} - k \frac{U_{i-1}^{j+1} - 2U_i^{j+1} + U_{i+1}^{j+1}}{h^2} = f_i^{j+1}.$$

Si ahora *despejamos* las incógnitas con supra-índice  $j + 1$  a la izquierda, nos queda

$$-\lambda U_{i-1}^{j+1} + (1 + 2\lambda)U_i^{j+1} - \lambda U_{i+1}^{j+1} = \Delta t f_i^{j+1} + U_i^j.$$

Vemos que no queda  $U_i^{j+1}$  *despejada* sola a la izquierda, sino que queda relacionada con  $U_{i-1}^{j+1}$  y con  $U_{i+1}^{j+1}$ . Por eso se dice que el método es *implícito*.

Por lo tanto, en cada paso de tiempo deberemos resolver un *sistema de ecuaciones*. Esto es un poco más costoso computacionalmente que lo que se hace en el caso *explícito*, pero se gana en estabilidad.

El método implícito resulta estable para cualquier  $\Delta t > 0$ .

Si incorporamos las condiciones de borde, vemos que, conocido  $U_i^j$ , para un  $j$  dado y para  $i = 1, 2, \dots, N + 2$ , los valores  $U_i^{j+1}$ ,  $i = 1, 2, \dots, N + 2$  deben satisfacer el siguiente sistema de  $N + 2$  ecuaciones

$$\begin{cases} U_1^{j+1} = a(t_{j+1}), \\ -\lambda U_{i-1}^{j+1} + (1 + 2\lambda)U_i^{j+1} - \lambda U_{i+1}^{j+1} = \Delta t f_i^{j+1} + U_i^j, & i = 2, 3, \dots, N + 1, \\ -U_N^{j+1} + \frac{2hH_1}{k}U_{N+1}^{j+1} + U_{N+2}^{j+1} = \frac{2hH_2}{k}u_E(t_{j+1}). \end{cases} \quad (13.6)$$

En forma matricial, el sistema a resolver en cada paso de tiempo resulta:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ -\lambda & 1 + 2\lambda & -\lambda & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 + 2\lambda & -\lambda & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & -\lambda & 1 + 2\lambda & -\lambda \\ 0 & \dots & 0 & -1 & \frac{2hH_1}{k} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1^{j+1} \\ U_2^{j+1} \\ U_3^{j+1} \\ \vdots \\ U_N^{j+1} \\ U_{N+1}^{j+1} \\ U_{N+2}^{j+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a(t_{j+1}) \\ U_2^j \\ U_3^j \\ \vdots \\ U_N^j \\ U_{N+1}^j \\ \frac{2hH_2}{k}u_E \end{bmatrix} + \Delta t \begin{bmatrix} 0 \\ f_2^{j+1} \\ f_3^{j+1} \\ \vdots \\ f_N^{j+1} \\ f_{N+1}^{j+1} \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Esto debe repetirse para  $j = 0, 1, 2, \dots, M$  luego de haber definido

$$U_i^0 = u_0(x_i), \quad i = 1, 2, \dots, N + 1 \quad \text{y} \quad U_{N+2}^0 = (H_2 u_E(0) - H_1 U_{N+1}^0) \frac{2h}{k} + U_N^0.$$

La implementación de este método de resolución está en el archivo <http://www.fiq.unl.edu.ar/dej>

También hay estimaciones del error, que resumimos en el siguiente Teorema.

**Teorema 13.5.** *Si la solución exacta  $u(x, t)$  de (13.5) es  $C^4[0, L]$  para la variable  $x$  y  $C^2[0, T]$  para la variable  $T$ , entonces resulta*

$$\max_{\substack{i=1,2,\dots,N+1 \\ j=1,2,\dots,M}} |u(x_i, t_j) - U_i^j| \leq C(h^2 + \Delta t)M,$$

donde  $M = \max_{[0,L] \times [0,T]} |u_{xxxx}| + |u_{tt}|$  y  $C$  es una constante que depende de los parámetros  $k, L, H_1, H_2$  de la ecuación, pero es independiente de la función  $f(x, t)$ , del dato inicial  $u_0(x)$ , de los datos de borde  $a(t), u_E(t)$  y de los parámetro de discretización  $h, \Delta t$ .

## 13.2. Elementos finitos

El método de elementos finitos es un método muy apropiado para resolver problemas en geometrías muy generales en 2 y 3 dimensiones. Para comprenderlo mejor comenzaremos con problemas unidimensionales.

### 13.2.1. Problema estacionario (Poisson)

Como antes, es más fácil ver primero el problema de Poisson estacionario. Consideremos el problema

$$\begin{cases} -\left(k(x)u_x\right)_x = f, & 0 \leq x \leq L, \\ u(0) = a, \\ k(L)u_x(L) + H_1u(L) = H_2u_E. \end{cases} \quad (13.7)$$

Si  $u$  es solución de este problema y  $v$  es suave con  $v(0) = 0$ , multiplicando la ecuación por  $v(x)$  e integrando

$$-\int_0^L \left(k(x)u_x(x)\right)_x v(x) dx = \int_0^L f(x)v(x) dx.$$

Integrando por partes resulta

$$\begin{aligned} -\int_0^L \left(k(x)u_x(x)\right)_x v(x) dx &= -k(x)u_x(x)v(x) \Big|_{x=0}^{x=L} + \int_0^L k(x)u_x(x)v_x(x) dx \\ &= -k(L)u_x(L)v(L) + k(0)u_x(0)v(0) + \int_0^L k(x)u_x(x)v_x(x) dx. \end{aligned}$$

Por las condiciones de borde  $v(0) = 0$  y  $k(L)u_x(L) = H_2u_E - H_1u(L)$  tenemos que

$$-\int_0^L \left(k(x)u_x(x)\right)_x v(x) dx = -H_2u_E + H_1u(L) + \int_0^L k(x)u_x(x)v_x(x) dx.$$

Por lo tanto, si  $u$  es solución de (13.7), satisface

$$\int_0^L k(x)u_x(x)v_x(x) dx + H_1u(L)v(L) = \int_0^L f(x)v(x) dx + H_2u_Ev(L),$$

para toda función  $v$  suave en  $[0, L]$  con  $v(0) = 0$ .

Para escribir un poco menos, definimos

$$\mathbb{V}^a = \left\{ v \in C[0, L] : v \text{ es } C^1 \text{ a trozos y } v(0) = a \right\},$$

y vemos que si  $u$  es solución de (13.7), también cumple

$$u \in \mathbb{V}^a : \int_0^L k(x)u_x(x)v_x(x) dx + H_1u(L)v(L) = \int_0^L f(x)v(x) dx + H_2u_Ev(L), \quad \forall v \in \mathbb{V}^0. \quad (13.8)$$

Esta última ecuación se llama *forma débil* de la ecuación (13.7).

A partir de esta forma débil definiremos las soluciones discretas de la siguiente manera. Consideramos una partición

$$0 = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{N-1} < x_N = L,$$

del intervalo  $[0, L]$  y definimos el espacio de funciones

$$\mathbb{V}_N^a = \left\{ v \in C[0, L] : v \text{ es lineal en } [x_{i-1}, x_i], i = 1, 2, \dots, N, \text{ y } v(0) = a \right\}.$$

Es decir,  $\mathbb{V}_N^a$  consiste de las funciones cuyas gráficas son poligonales, con *quiebres* en  $x = x_i$  y tales que en 0 valen  $a$ .

Los puntos  $x_i$  se denominan *nodos* o *vértices* y los intervalos  $[x_{i-1}, x_i]$  se denominan *elementos* de la partición. De ahí el nombre de *método de elementos finitos*. Hemos partido el dominio en un número *finito* de *elementos*.

Planteamos entonces el siguiente problema:

Hallar  $U \in \mathbb{V}_N^a$  tal que

$$\int_0^L k(x)U_x(x)V_x(x) dx + H_1U(L)V(L) = \int_0^L f(x)V(x) dx + H_2u_Ev(L), \quad (13.9)$$

para toda  $V \in \mathbb{V}_N^0$ .

Aunque no sea tan evidente, esto es un sistema de  $N + 1$  ecuaciones con  $N + 1$  incógnitas. Para ver esto, definimos una *base*  $\{\phi_0, \phi_1, \phi_2, \dots, \phi_N\}$  del espacio  $\mathbb{V}_N$  como sigue:

$$\phi_i \in \mathbb{V}_N^0, \quad \phi_i(x_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j, \\ 0 & \text{si } i \neq j, \end{cases} \quad i, j = 0, 1, 2, \dots, N.$$

Con estas funciones base, vemos que dada  $U \in \mathbb{V}_N^a$ , si llamamos  $U_j = U(x_j)$  resulta

$$U(x) = \sum_{j=0}^N U_j \phi_j(x).$$

Volviendo a (13.9). Observamos que si  $U(x) = \sum_{j=0}^N U_j \phi_j(x)$  satisface la fórmula (13.9) para toda  $V \in \mathbb{V}_N^0$  entonces debe satisfacerla para toda  $V = \phi_i$ ,  $i = 1, 2, 3, \dots, N$ . Notemos que no tomamos  $\phi_0$  pues no pertenece a  $\mathbb{V}_N^0$ .

Tenemos entonces que para cada  $i = 1, 2, \dots, N$  resulta

$$\int_0^L k(x) \left( \sum_{j=0}^N U_j \phi_j'(x) \right) \phi_i'(x) dx + H_1 U_N \phi_i(L) = \int_0^L f(x) \phi_i(x) dx + H_2 u_E \phi_i(L).$$

Además, observamos que

$$\int_0^L k(x) \left( \sum_{j=0}^N U_j \phi_j'(x) \right) \phi_i'(x) dx = \sum_{j=0}^N U_j \left( \int_0^L k(x) \phi_j'(x) \phi_i'(x) dx \right),$$

por lo que

$$\begin{aligned}
 U_0 &= a \\
 \sum_{j=0}^N U_j \left( \int_0^L k(x) \phi'_j(x) \phi'_i(x) dx \right) + H_1 U_N \phi_i(L) &= \int_0^L f(x) \phi_i(x) dx + H_2 u_E \phi_i(L), \\
 & \quad i = 1, 2, \dots, N.
 \end{aligned} \tag{13.10}$$

En forma matricial, resulta el sistema

$$A\bar{U} = \bar{F},$$

donde

$$\bar{U} = \begin{bmatrix} U_0 \\ U_1 \\ U_2 \\ \vdots \\ U_N \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} A_{00} & A_{01} & \dots & A_{0N} \\ A_{10} & A_{11} & \dots & A_{1N} \\ A_{20} & A_{21} & \dots & A_{2N} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ A_{N0} & \dots & A_{N(N-1)} & A_{NN} \end{bmatrix}, \quad \bar{F} = \begin{bmatrix} F_0 \\ F_1 \\ F_2 \\ \vdots \\ F_N \end{bmatrix},$$

con

$$F_0 = a, \quad F_i = \int_0^L f(x) \phi_i(x) dx, \quad i = 1, 2, \dots, N-1, \quad F_N = \int_0^L f(x) \phi_N(x) dx + H_2 u_E,$$

y

$$\begin{aligned}
 \text{fila}_0(A) &= [1 \quad 0 \quad \dots \quad 0] \\
 A_{ij} &= \int_0^L k(x) \phi'_j(x) \phi'_i(x) dx, \quad i = 1, 2, \dots, N, \quad j = 0, 1, 2, \dots, N, \\
 A_{NN} &= \int_0^L k(x) \phi'_N(x) \phi'_N(x) dx + H_1.
 \end{aligned}$$

A la hora de resolver, debemos armar la matriz  $A$ , el lado derecho  $\bar{F}$  y resolver para el vector  $\bar{U}$ .

Para armar la matriz  $A$ , observamos que debemos integrar la función producto  $k(x) \phi'_j(x) \phi'_i(x)$ . Además, vemos que

$$\phi_j(x) \neq 0 \quad \text{solo si} \quad x_{j-1} < x < x_{j+1}.$$

Entonces

$$\begin{aligned}
 \phi'_j(x) \phi'_i(x) \neq 0 &\iff x_{j-1} < x < x_{j+1} \text{ y } x_{i-1} < x < x_{i+1} \\
 &\iff x \in (x_{j-1}, x_{j+1}) \cap (x_{i-1}, x_{i+1}).
 \end{aligned}$$

Ahora bien,  $(x_{j-1}, x_{j+1}) \cap (x_{i-1}, x_{i+1}) = \emptyset$  si  $|i - j| > 1$ . Es decir,  $A_{ij} = 0$  si  $|i - j| > 1$ , y  $A$  resulta *tridiagonal*. Para ver la forma que toma la matriz  $A$ , supongamos que  $k$  es



constante, y que  $x_i = ih$ , con  $h = L/N$ . Entonces,

$$\begin{aligned} \text{si } |i - j| > 1, & \quad \int_0^L k\phi'_j\phi'_i dx = 0, \\ \text{si } i = j < N \ (|i - j| = 0), & \quad \int_0^L k\phi'_i\phi'_i dx = k \int_{x_{i-1}}^{x_i} (\phi'_i)^2 dx + k \int_{x_i}^{x_{i+1}} (\phi'_i)^2 dx \\ & \quad = k \int_{x_{i-1}}^{x_i} \left(\frac{1}{h}\right)^2 dx + k \int_{x_i}^{x_{i+1}} \left(\frac{1}{h}\right)^2 dx = 2kh\left(\frac{1}{h}\right)^2 \\ & \quad = \frac{2k}{h}, \\ \text{si } i = j = N \ (|i - j| = 0), & \quad \int_0^L k\phi'_i\phi'_i dx = k \int_{x_{N-1}}^{x_N} (\phi'_N)^2 dx \\ & \quad = k \int_{x_{N-1}}^{x_N} \left(\frac{1}{h}\right)^2 dx = kh\left(\frac{1}{h}\right)^2 = \frac{k}{h}, \\ \text{si } i = j - 1 \text{ o } i = j + 1 \ (|i - j| = 1), & \quad \int_0^L k\phi'_j\phi'_i dx = k\frac{1}{h}\left(-\frac{1}{h}\right)h = -\frac{k}{h}. \end{aligned}$$

De esta manera, la matriz  $A$  resulta

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ -\frac{k}{h} & \frac{2k}{h} & -\frac{k}{h} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -\frac{k}{h} & \frac{2k}{h} & -\frac{k}{h} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & -\frac{k}{h} & \frac{2k}{h} & -\frac{k}{h} \\ 0 & \dots & 0 & 0 & -\frac{k}{h} & \frac{k}{h} + H_1 \end{bmatrix}$$

Para el lado derecho debemos integrar, para  $i = 1, 2, \dots, N - 1$

$$\begin{aligned} F_i &= \int_0^L f\phi_i dx = \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)\phi_i(x) dx + \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\phi_i(x) dx \\ &\approx hf(x_{i-\frac{1}{2}}) \underbrace{\phi_i(x_{i-\frac{1}{2}})}_{1/2} + hf(x_{i+\frac{1}{2}}) \underbrace{\phi_i(x_{i+\frac{1}{2}})}_{1/2} = \frac{h}{2} \left( f(x_{i-\frac{1}{2}}) + f(x_{i+\frac{1}{2}}) \right) \approx hf(x_i). \end{aligned}$$

Para  $i = N$  tenemos

$$\begin{aligned} F_N &= \int_0^L f\phi_i dx = \int_{x_{N-1}}^{x_N} f(x)\phi_i(x) dx \\ &\approx hf(x_{N-\frac{1}{2}}) \underbrace{\phi_N(x_{N-\frac{1}{2}})}_{1/2} = \frac{h}{2} f(x_{N-\frac{1}{2}}). \end{aligned}$$

El sistema resulta

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ -\frac{k}{h} & 2\frac{k}{h} & -\frac{k}{h} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -\frac{k}{h} & 2\frac{k}{h} & -\frac{k}{h} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & -\frac{k}{h} & 2\frac{k}{h} & -\frac{k}{h} \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & -\frac{k}{h} & 2\frac{k}{h} + H_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_0 \\ U_1 \\ U_2 \\ \vdots \\ U_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ hf_1 \\ hf_2 \\ \vdots \\ \frac{h}{2}f_{N-\frac{1}{2}} + H_2u_E \end{bmatrix}.$$

### 13.3. Ejercicios

**13.1.** Demostrar que si  $u \in C^2$ , entonces

$$\left| u'(x) - \frac{u(x+h) - u(x)}{h} \right| \leq \frac{M_2}{2}h,$$

con  $M_2 = \max_{[x, x+h]} |u''|$ .

**13.2.** Demostrar que si  $u \in C^3$ , entonces

$$\left| u'(x) - \frac{u(x+\frac{h}{2}) - u(x-\frac{h}{2})}{h} \right| \leq \frac{M_3}{24}h^2,$$

con  $M_3 = \max_{[x-h, x+h]} |u'''|$ .

**13.3.** Escribir una discretización análoga a (13.4) para el problema

$$\begin{cases} -ku_{xx} = f, & 0 \leq x \leq L, \\ ku'(0) - H_1u(0) = -H_2u_E, \\ u(L) = b. \end{cases}$$

Expresar también en forma matricial.

**13.4.** Implementar en MATLAB la discretización del problema anterior y utilizarla para resolver los siguientes problemas

$$\text{(a)} \begin{cases} -u_{xx} = 200e^{\frac{(x-0,5)^2}{20}}, & 0 \leq x \leq 1, \\ u'(0) = 0 \\ u(1) = 0. \end{cases} \quad \text{(b)} \begin{cases} -u_{xx} = 200e^{\frac{(x-0,5)^2}{20}}, & 0 \leq x \leq 1, \\ u'(0) = u(0) \\ u(1) = 0. \end{cases}$$

Graficar las soluciones obtenidas con  $N = 100$  ( $h = 1/100$ ). ¿Se anima a dar una interpretación física de las soluciones obtenidas? Recordar que la ecuación estudiada corresponde al estado estacionario de la ecuación de difusión.

**13.5.** Utilizar el programa `difusion_robin_df_implicito.m` (con  $N = 40$  y  $\lambda = 1$ , o sea  $\Delta t = h^2$ ) para resolver los siguientes problemas:

$$\begin{aligned}
 \text{(a)} \quad & \begin{cases} u_t - 2u_{xx} = 0, & 0 \leq x \leq 1, \quad t \geq 0, \\ u(0, t) = 1, & t \geq 0, \\ u_x(1, t) = 0, & t \geq 0, \\ u(x, 0) = e^{-10x}, & 0 \leq x \leq 1. \end{cases} \\
 \text{(b)} \quad & \begin{cases} u_t - 6u_{xx} = 0, & 0 \leq x \leq 1, \quad t \geq 0, \\ u(0, t) = 1, & t \geq 0, \\ u_x(1, t) = 0, & t \geq 0, \\ u(x, 0) = e^{-10x}, & 0 \leq x \leq 1. \end{cases}
 \end{aligned}$$

Determinar en cada caso la solución estacionaria  $u_\infty(x)$  y el tiempo  $t$  para el cual se cumple

$$\max_{0 \leq x \leq 1} |u(x, t) - u_\infty(x)| \leq 0,01.$$

A partir de estos cálculos, deducir qué efecto tiene sobre la solución el cambio en el coeficiente de difusión.

**13.6.** Desarrollar un método de elementos finitos para resolver el problema estacionario de difusión y *reacción* siguiente:

$$\begin{cases} -(ku_x)_x + cu = f, & 0 \leq x \leq L, \\ ku'(0) - H_1u(0) = -H_2u_E, \\ u(L) = b. \end{cases}$$

Aquí  $k, c$  son las constantes positivas de difusión y reacción, respectivamente. Desarrollar el método consiste en hallar el sistema de ecuaciones a resolver, de manera análoga a lo realizado en la Sección 13.2

**13.7.** Implementar en MATLAB el método desarrollado en el ítem anterior y utilizarlo para resolver los siguientes problemas:

$$\begin{aligned}
 \text{(a)} \quad & \begin{cases} -u_{xx} + u = 200e^{\frac{(x-0,5)^2}{20}}, & 0 \leq x \leq 1, \\ u'(0) = 0 \\ u(1) = 0. \end{cases} & \text{(b)} \quad \begin{cases} -u_{xx} + u = 200e^{\frac{(x-0,5)^2}{20}}, & 0 \leq x \leq 1, \\ u'(0) = u(0) \\ u(1) = 0. \end{cases}
 \end{aligned}$$

¿Qué diferencias observa con las soluciones del problema 13.4?

## Bibliografía complementaria

[Larsson-Thomé 2009] Larsson, S., Thomé, V., *Partial Differential Equations with Numerical Methods*, Springer, 2009.