

Introducción al Cálculo Científico - 2002

Trabajo Práctico Nro. 4 - Fecha de entrega: martes 26/11

1. Problema 6.1.5.
2. Problema 6.3.3.
3. Problema 6.3.5.
4. En este problema vamos a comparar diferentes formas de obtener la solución del mismo problema lineal. Sea $n = 10$ y definamos la matriz A de $n \times n$, y el vector b de $n \times 1$ por medio de las instrucciones

```
>> n = 10;  
>> A = diag(2*ones(1,n)) - diag(ones(1,n-1),1) - diag(ones(1,n-1),-1)  
>> b = [0:1:n/2-1 n/2-1:-1:0]'
```

Esta matriz A es sólo un ejemplo. La estructura tridiagonal de A no es importante en este problema.

Queremos resolver $A^5 x = b$. Existen al menos tres modos de hacerlo:

- (a) La forma inmediata es la siguiente

```
>> x = (A^5)\b
```

- (b) Resolver $A^5 x = b$ es equivalente a resolver $A(A(A(A(Ax)))) = b$, y la sucesión de resoluciones $Ax_1 = b$, $Ax_2 = x_1$, $Ax_3 = x_2$, $Ax_4 = x_3$, $Ax_5 = x_4$ dará la solución. Podemos resolver cada uno de estos cinco sistemas lineales con el comando `\` de MATLAB/OCTAVE.
- (c) La tercera forma de hacer esto es descomponer A en L y U usando la función `lu` una sola vez y luego utilizar `LTriSol` y `UTriSol` para resolver los 5 sistemas lineales del ítem (b).

Resolver el sistema $A^5 x = b$ de las tres formas y comparar el tiempo necesario por cada una de las tres. Tomar $n = 50$ y repetir la comparación. Explicar qué ocurre (hacer conteo manual de operaciones para una matriz A genérica, utilizar lo que ya se sabe de `lu`, `LTriSol`, `UTriSol` y `\`.)

5. Sea $D = \text{diag}(d_1, \dots, d_n)$ una matriz diagonal con entradas $\{d_i\}_{i=1}^n$. Sea $\|\cdot\|$ una norma para matrices subordinada a cualquier norma vectorial $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ ó $\|\cdot\|_\infty$. Mostrar que

$$\|D\| = \max_{1 \leq i \leq n} |d_i|$$

Determinar $\|D^{-1}\|$ en el caso en que D es no singular.

6. Recordemos que si A es inversible, entonces su inversa A^{-1} satisface $A \cdot A^{-1} = I$, donde I es la matriz identidad. Demostrar las siguientes afirmaciones:
- (a) Si U es triangular superior e inversible, entonces U^{-1} también es triangular superior.
 - (b) La inversa de una matriz triangular inferior unitaria L es también triangular inferior unitaria. (Unitaria quiere decir que los elementos de la diagonal son todos unos.)
 - (c) El producto de dos matrices triangulares superiores (inferiores) es otra matriz triangular superior (inferior.)