Ecuaciones Diferenciales Ordinarias
1er semestre 2003

Práctica 3

- (1) Encontrar soluciones generales para las siguientes ecuaciones diferenciales (las primas denotan derivadas con respecto a x)

(a) $(x + y)y' = x - y$

(b) $xy' = y + 2(xy)^{1/2}$

(c) $xy^2y' = x^3 + y^3$

(d) $(x^2 - y^2)y' = 2xy$

(e) $(x + y)y' = 1$

(f) $y^2y' + 2xy^3 = 6x$

(g) $x^2y' + 2xy = 5y^4$

(h) $y^2(xy' + y)(1 + x^4)^{1/2} = x$

(i) $(2x \operatorname{sen} y \cos y)y' = 4x^2 + 3 \operatorname{sen}^2 y$

(j) $(x + e^y)y' = xe^{-y} - 1$

- (2) Mostrar que la sustitución $v = \ln y$ transforma la ecuación diferencial $y' + P(x)y = Q(x)y \ln y$ en la ecuación lineal $v' + P = Qv$.

- (3) Utilizar el método del problema anterior para resolver la ecuación $xy' - 4x^2y + 2y \ln y = 0$.

- (4) Resolver la ecuación diferencial

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x - y - 1}{x + y + 3}.$$

Para ello, encontrar h y k de modo tal que las sustituciones $x = u + h$, $y = v + k$ transformen la ecuación dada en la ecuación homogénea

$$\frac{dv}{du} = \frac{u - v}{u + v}.$$

- (5) Realizar una sustitución apropiada para encontrar una solución general de la ecuación $y' = \operatorname{sen}(x - y)$. ¿Contiene esta expresión a la solución $y = x - \pi/2$?

- (6) La ecuación

$$\frac{dy}{dx} = A(x)y^2 + B(x)y + C(x)$$

se denomina *ecuación de Ricatti*. Suponer que se conoce una solución y_1 de la misma. Demostrar que la sustitución

$$y = y_1 + \frac{1}{v}$$

la transforma en la ecuación *lineal*

$$\frac{dv}{dx} + (B + 2Ay_1)v = -A.$$

(7) Utilizar el método del problema anterior para resolver las ecuaciones siguientes, utilizando el hecho que $y_1 = x$ es solución.

(a) $y' + y^2 = 1 + x^2$

(b) $y' + 2xy = 1 + x^2 + y^2$

(8) Verificar que cada una de las siguientes ecuaciones es exacta y resolver

(a) $(4x - y) dx + (6y - x) dy = 0$

(b) $(2xy^2 + 3x^2) dx + (2x^2y + 4y^3) dy = 0$

(c) $(1 + ye^{xy}) dx + (2y + xe^{xy}) dy = 0$

(d) $(3x^2y^3 + y^4) dx + (3x^3y^2 + y^4 + 4xy^3) dy = 0$

(e) $\frac{2x^{5/2} - 3y^{5/3}}{2x^{5/2}y^{2/3}} dx + \frac{3y^{5/3} - 2x^{5/2}}{3x^{3/2}y^{5/3}} dy = 0$

(9) Resolver cada una de las siguientes ecuaciones diferenciales utilizando un factor integrante que depende de una sola variable

(a) $4y dx + x dy = 0$

(b) $2xy dx + (y^2 - x^2) dy = 0$

(c) $(4xy^2 + y) dx + (6y^3 - x) dy = 0$

(10) Resolver la ecuación $(7x^4y - 3y^8) dx + (2x^5 - 9xy^7) dy = 0$, sabiendo que existe un factor integrante de la forma $x^m y^n$.

(11) Utilizar la técnica sugerida en el problema anterior para resolver la ecuación

$$(3y^2 + 10xy) dx + (5xy + 12x^2) dy = 0.$$

(12) Utilizar la observación siguiente:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[\tan^{-1} \frac{x}{y} \right] = \frac{y dx - x dy}{x^2 + y^2},$$

para resolver la siguiente ecuación diferencial:

$$\left(y + \frac{x}{x^2 + y^2} \right) dx + \left(\frac{y}{x^2 + y^2} - x \right) dy = 0.$$

(13) Resolver la ecuación lineal $y' + P(x)y = Q(x)$ del siguiente modo: Primero reescribirla en la forma $M dx + N dy = 0$; Luego mostrar que esta ecuación tiene un factor integrante de la forma $\rho(x)$, y utilizarlo para derivar la solución

$$y(x) = e^{-\int P(x) dx} \left[C + \int Q(x) e^{\int P(x) dx} dx \right].$$