

(1) Hallar los autovalores y autofunciones de los siguientes problemas.

(a) $y'' + \lambda y = 0; \quad y'(0) = 0, \quad y(1) = 0.$

(b) $y'' + \lambda y = 0; \quad y'(0) = 0, \quad y'(\pi) = 0.$

(c) $y'' + \lambda y = 0; \quad y(-\pi) = 0, \quad y(\pi) = 0.$

(2) Considerar el problema de autovalores

$$y'' + \lambda y = 0; \quad y'(0) = 0, \quad y(1) + y'(1) = 0.$$

Todos los autovalores son no-negativos, por lo que conviene tomar $\lambda = \alpha^2$, con $\alpha \geq 0$.

(a) Mostrar que $\lambda = 0$ no es un autovalor.

(b) Mostrar que $y = A \cos \alpha x + B \sin \alpha x$ satisface las condiciones en los extremos si y sólo si $B = 0$ y α es una raíz positiva de $\tan z = 1/z$. Estas raíces $\{\alpha_n\}_{n=1}^{\infty}$ son las abcisas de los puntos de intersección de las curvas $y = \tan z$ e $y = 1/z$ (hacer el gráfico). Por lo tanto los autovalores y autofunciones de este problema son los números $\{\alpha_n^2\}_{n=1}^{\infty}$ y las funciones $\{\cos \alpha_n x\}_{n=1}^{\infty}$, respectivamente.

(3) Considerar el problema de autovalores

$$y'' + \lambda y = 0; \quad y(-\pi) = y(\pi), \quad y'(-\pi) = y'(\pi),$$

que no es de la clase de problemas considerados en clase, porque las condiciones en los extremos no son *separadas*.

(a) Mostrar que $\lambda = 0$ es un autovalor. ¿Cuál es la autofunción correspondiente?

(b) Mostrar que el n -ésimo autovalor positivo es n^2 , y que tiene dos autofunciones asociadas linealmente independientes.

(4) Considerar el problema de autovalores

$$y'' + 2y' + \lambda y = 0; \quad y(0) = y(1) = 0.$$

(a) Mostrar que $\lambda = 1$ no es un autovalor.

(b) Mostrar que no hay ningún autovalor λ tal que $\lambda < 1$

(c) Mostrar que el n -ésimo autovalor positivo es $\lambda_n = 1 + n^2\pi^2$, con autofunción asociada $y_n(x) = e^{-x} \sin(n\pi x)$

(5) Considerar el problema de autovalores

$$x^2 y'' + x y' + \lambda y = 0; \quad y(1) = 0, \quad y(e) = 0.$$

Mostrar que los autovalores son todos positivos, donde el n -ésimo está dado por $\lambda_n = n^2\pi^2$, con autofunción asociada $y_n(x) = \sin(n\pi \ln x)$.