---

(1) Hallar la solución[1] de la ecuación de Laplace dentro de un rectángulo $0 \le x \le L$, $0 \le y \le H$ con las siguientes condiciones de borde:

$$u_x(0,y)=0, \quad u_x(L,y)=0, \quad u(x,0)=0, \quad u(x,H)=f(x), \qquad 0 \le x \le L,\ 0 \le y \le H.$$

---

(2) Supongamos que $u(x,y)$ es la solución de la ecuación de Laplace dentro del rectángulo $0 \le x \le L$, $0 \le y \le H$ con las condiciones de borde:

$$u_x(0,y)=0, \quad u_x(L,y)=0, \quad u_y(x,0)=0, \quad u_y(x,H)=f(x), \qquad 0 \le x \le L,\ 0 \le y \le H.$$

(a) *Sin* resolver el problema, explicar la condición de compatibilidad (sobre la función f) para que este problema tenga solución. Interpretar físicamente.

(b) Resolver el problema por el método de separación de variables. Mostrar que el método sólo funciona bajo la condición de la parte **(a)**.

(c) Considerar la ecuación del calor dependiente del tiempo $v_t = k(v_{xx}+v_{yy})$ con condición inicial $v(x,y,0) = g(x,y)$ y condiciones de borde

$$v_x(0,y,t)=0, \quad v_x(L,y,t)=0, \quad v_y(x,0,t)=0, \quad v_y(x,H,t)=f(x), \qquad 0 \le x \le L,\ 0 \le y \le H, \quad t \ge 0,$$

(las mismas que u). Demostrar que si v es una solución C^2, entonces la energía

$$E(t) = \int_0^L \int_0^H v(x,y,t)\,dy\,dx$$

se mantiene constantemente igual a $\int_0^L \int_0^H g(x,y)\,dy\,dx$.

(d) La solución del ítem **(b)** tiene una constante arbitraria que queda sin determinar. Determinarla considerando que $u(x,y)$ es el estado estacionario de la ecuación (del calor) dependiente del tiempo del ítem **(c)**. Es decir, suponer que

$$u(x,y) = \lim_{t\to\infty} v(x,y,t). \qquad \text{(límite uniforme)}$$

(Ayuda: la constante a determinar tiene que ver con la condición inicial $g(x,y)$.)

---

(3) Resolver la ecuación de Laplace dentro de un cuarto de círculo de radio 1 ($0 \le \theta \le \pi/2$, $0 \le r \le 1$), sujeto a las condiciones de borde

$$u_\theta(r,0)=0, \quad u_\theta\left(r,\frac{\pi}{2}\right)=0, \quad u(1,\theta)=f(\theta), \qquad 0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}.$$

---

(4) Resolver la ecuación de Laplace *fuera* de un círculo de radio a sujeto a la condición de borde (en coord. polares) $u(a,\theta) = f(\theta)$ (para $-\pi \le \theta \le \pi$). Para este problema hace falta imponer que $u(r,\theta)$ permanece acotado cuando $r \to \infty$.

---

(5) Consideremos el núcleo de Poisson para el disco D_1 de centro $(0,0)$ y radio 1: $P(r,\varphi) = \dfrac{1}{2\pi}\dfrac{1-r^2}{1-2r\cos\varphi + r^2}$.

(a) Graficar con ayuda de una computadora $P(r,\varphi)$ como función de φ, en $-\pi \le \varphi \le \pi$ para $r=0$, $r=0{,}5$, $r=0{,}8$, $r=0{,}95$.

(b) Graficar $P(r,\varphi)$ como función de r, en $0 \le r \le 1$ para $\varphi=3$, $\varphi=2$, $\varphi=1$, $\varphi=0{,}5$, $\varphi=0{,}1$, $\varphi=0$.

[1]En todos los casos en que se pide *hallar la solución* o *resolver*, nos referimos a hallar la *solución formal* por el método de separación de variables, indicando las fórmulas que deben utilizarse para determinar los *coeficientes* de la serie.

(c) Utilizando el núcleo de Poisson y sus propiedades descritas en clase determinar la solución de

$$\nabla^2 u = 0, \quad \text{en } D_1, \qquad u = 1 \quad \text{en } \partial D_1.$$

(d) Demostrar que $P(r,\varphi) \geq 0$, $0 \leq r < 1$, $-\pi \leq \varphi \leq \pi$ y que $\int_{-\pi}^{\pi} P(r,\varphi)\, d\varphi = 1$, $0 \leq r < 1$.

(e) Demostrar que para $\delta > 0$ fijo, $P(r,\varphi) \to 0$ uniformemente para $\delta \leq |\varphi| \leq \pi$, cuando $r \to 1$, .

(f) Demostrar que si f es acotada en $[-\pi,\pi]$ entonces $u(r,\varphi) := \int_{-\pi}^{\pi} f(\varphi)P(r,\varphi)\, d\varphi$ es armónica.

(g) Demostrar que si $\varphi_0 \in (-\pi,\pi)$ es un punto de continuidad de f, entonces $\lim_{r\to 1} u(r,\varphi_0) = f(\varphi_0)$.

(h) Demostrar que si $f(\pi^-) = f(-\pi^+)$ entonces $\lim_{r\to 1} u(r,\pi) = \lim_{r\to 1} u(r,-\pi) = f(\pi^-) = f(-\pi^+)$.

---

(6) Considerar la ecuación de ondas

$$u_{tt}(x,t) = c^2 u_{xx}(x,t), \quad x \in \mathbb{R},\ t \in \mathbb{R}.$$

(a) Mostrar que si R y S son funciones C^2 definidas en $\mathbb{R}$, entonces

$$u(x,t) = R(x+ct) + S(x-ct), \quad x \in \mathbb{R},\ t \in \mathbb{R},$$

es solución. Se dice entonces que $u(x,t)$ es una superposición de *ondas viajeras*. ¿Por qué?

(b) Hallar fórmulas para R y S para que la solución $u(x,t)$ cumpla con las condiciones iniciales

$$u(x,0) = e^{-x^2} \qquad u_t(x,0) = 0, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

(c) Para $c = 3$, graficar aproximadamente la solución $u(x,t)$ como función de x para $t = 1$, $t = 2$ y $t = 3$.

(d) ¿Qué diferencia se observaría en los gráficos si c fuera 6 en lugar de 3?

---

(7) Consideremos una cuerda vibrante levemente *amortiguada* que satisface

$$\rho_0\, u_{tt} = T_0 u_{xx} - \beta u_t, \quad 0 \leq x \leq L, \quad t \geq 0,$$

con β el parámetro de rozamiento suficientemente pequeño (que cumple $0 < \beta^2 < 4\rho_0 T_0 \pi^2/L^2$). Hallar la solución que satisface las siguientes condiciones de borde y condiciones iniciales

$$u(0,t) = 0 \quad u(L,t) = 0, \quad t \geq 0, \qquad\qquad u(x,0) = f(x), \quad u_t(x,0) = g(x), \quad 0 \leq x \leq L.$$

Interpretar físicamente el efecto de la constante β.

---

(8) Consideremos una *membrana* vibrante levemente amortiguada que satisface

$$\begin{aligned}
\rho_0\, u_{tt} &= T_0(u_{xx} + u_{yy}) - \beta u_t, && (x,y) \in \Omega, \quad t \geq 0,\\
u &= 0, && (x,y) \in \partial\Omega, \quad t \geq 0,\\
u(x,y,0) &= f(x,y), && (x,y) \in \Omega,\\
u_t(x,y,0) &= 0, && (x,y) \in \Omega.
\end{aligned}$$

En este ejercicio utilizaremos el resultado matemático (abstracto) que dice que el problema de autovalores para el Laplaciano siguiente:

$$\phi_{xx} + \phi_{yy} = -\lambda\phi, \quad (x,y) \in \Omega \qquad\qquad \phi = 0, \quad (x,y) \in \partial\Omega.$$

Tiene una sucesión infinita de autovalores λ_n y correspondientes autofunciones ϕ^n que satisfacen:

$$0 < \lambda_1 < \lambda_2 \leq \lambda_3 \leq \lambda_4 \leq \cdots \leq \lambda_n \leq \ldots \longrightarrow +\infty$$

$$\begin{gathered}
\phi^n_{xx} + \phi^n_{yy} = -\lambda_n \phi_n, \quad (x,y) \in \Omega\\
\phi^n = 0, \quad (x,y) \in \partial\Omega.
\end{gathered}$$

$$\iint_\Omega \phi^n\, \phi^m\, dx\, dy = \delta_{nm}, \quad n,m \in \mathbb{N}.$$

Por lo tanto, las soluciones en series quedarán expresadas en términos de ϕ^n.
Hallar la solución (separando sólo la variable tiempo) suponiendo $0 < \beta^2 < 4\rho_0 T_0 \lambda_1$.
