Trabajo Práctico 1 *Matemática Aplicada*

---

(1) Dar ejemplos de funciones continuas que no sean idénticamente nulas en el dominio indicado, y cuyas integrales den cero.

(a) Intervalo $[0,1]$ de $\mathbb{R}$.

(b) Cuadrado $[0,1]\times[0,1]$ de $\mathbb{R}^2$.

(c) Cubo $[0,1]\times[0,1]\times[0,1]$ de $\mathbb{R}^3$.

---

(2) Calcular los siguientes límites para $f(x,y,z) = 2x + y - z^2$
(**NO calcular ninguna integral**, usar los teoremas del capítulo 1 del apunte).

(a) $\displaystyle \lim_{h\to 0} \frac{1}{h^3} \int_1^{1+h} \int_1^{1+h} \int_1^{1+h} f(x,y,z)\, dz\, dy\, dx$

(b) $\displaystyle \lim_{h\to 0} \frac{1}{h^3} \int_{1-h}^{1+h} \int_{1-h}^{1+h} \int_{1-h}^{1+h} f(x,y,z)\, dz\, dy\, dx$

(c) $\displaystyle \lim_{h\to 0} \frac{1}{h^2} \int_1^{1+h} \int_1^{1+h} \int_1^{1+h} f(x,y,z)\, dz\, dy\, dx$

(d) $\displaystyle \lim_{h\to 0} \frac{1}{h^3} \int_{2+h}^{2+2h} \int_{-1-h}^{-1+h} \int_0^{h} f(x,y,z)\, dz\, dy\, dx$

(e) $\displaystyle \lim_{h\to 0} \frac{1}{h^2} \int_{-1}^{-1+h} \int_4^{4+h} f(x,y,0)\, dy\, dx$

(f) $\displaystyle \lim_{h\to 0} \frac{1}{h^2} \int_{-1}^{-1+h} \int_4^{4+h} f(x,y,2)\, dy\, dx$

(g) $\displaystyle \lim_{r\to 0} \frac{1}{r^3} \iiint_{B\left((-1,0,1),r\right)} f\, d\mathrm{vol}$

(h) $\displaystyle \lim_{r\to 0} \frac{1}{r} \int_{C_r} f\, ds$, donde C_r denota la circunferencia de radio r y centro $(1,1,0)$ contenida en el plano xy.

---

(3) Demostrar que si f y g son dos funciones continuas en $\mathbb{R}^3$ y

$$\int_R f\, d\mathrm{vol} = \int_R g\, d\mathrm{vol},$$

para toda región R del espacio $\mathbb{R}^3$, entonces $f(\overline{x}) = g(\overline{x})$ para todo $\overline{x} \in \mathbb{R}^3$.
