
(1) Sea $f(\bar{r}) = \frac{1}{r}$ el potencial Newtoniano (Notación: $\bar{r} = x_1\bar{i} + x_2\bar{j} + x_3\bar{k}$ y $r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$), cuyo dominio es $\mathbb{R}^3 \setminus \{\bar{0}\}$. (a) Calcular el gradiente de f . (b) Calcular el Laplaciano de f .

(2) Calcular el flujo del campo de Newton

$$\bar{V}(\bar{r}) = -\frac{\bar{r}}{r^3},$$

a través de una superficie esférica centrada en $(1, 1, 1)$ y de radio uno. (Usar Teorema de Gauss).
¿Cuál es el flujo a través de cualquier superficie cerrada que no deje el origen en el interior?

(3) Sea $\bar{V}(\bar{r}) = -\frac{\bar{r}}{r^3}$.

(a) Calcular el flujo de $\bar{V}$ a través de la *superficie esférica* centrada en $\bar{0} = (0, 0, 0)$ y radio unitario.

(b) Calcular el flujo de $\bar{V}$ a través de la superficie esférica centrada en $\bar{0} = (0, 0, 0)$ y radio R .

(c) Calcular el flujo de $\bar{V}$ a través de cualquier superficie cerrada que contenga a $\bar{0}$ en su interior.

(4) Sea S una superficie cerrada y suave en el espacio, y sea n_i la i -ésima componente del vector normal exterior a S . Demostrar que entonces

$$\iint_S n_i d\sigma = 0.$$

(5) Demostrar que el gradiente de cualquier función escalar φ que tiene derivadas de segundo orden continuas, es un campo vectorial irrotacional. Más precisamente, demostrar que

$$\bar{\nabla} \times \bar{\nabla} \varphi = \bar{0},$$

para cualquier función escalar φ con derivadas de segundo orden continuas.

(6) Sea $\varphi(x_1, x_2, x_3) = \ln(x_1^2 + x_2^2)$. Determinar su dominio y el de su gradiente $\bar{V} = \bar{\nabla} \varphi$. ¿Es $\bar{V}$ conservativo? ¿Es incompresible? ¿Es φ armónico?

(7) Considerar las coordenadas esféricas y cilíndricas. Para cada caso:

- Describir $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, \mathcal{F}_3$;
- Calcular h_1, h_2, h_3 ;
- Calcular $d\sigma_{12}, d\sigma_{13}, d\sigma_{23}$, y $d\text{vol}$;
- Describir los vectores normales $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \bar{a}_3$.

(8) Sea $\vec{V}(x_1, x_2, x_3) = \omega_0(-x_2 \vec{i} + x_1 \vec{j})$ con ω_0 una constante (velocidad angular). Sea

$$C_R = \{(R \cos t, R \sin t, 0) : t \in [0, 2\pi)\}, \quad R > 0.$$

(a) Calcular la circulación de $\vec{V}$ a lo largo de C_R .

(b) Calcular el rotor de $\vec{V}$.

(c) Calcular directamente la integral de superficie $\iint_S \vec{\nabla} \times \vec{V} \cdot \vec{n} d\sigma$ sobre un hemisferio S con *ecuador* en la curva C_R y $\vec{n}$ con tercera coordenada positiva.

(d) Calcular la integral del ítem (c) usando el teorema de Stokes.

(9) Escribir gradiente, divergencia, rotor y Laplaciano en coordenadas esféricas y cilíndricas.

(10) Estudiar las soluciones de $\vec{\nabla}^2 \varphi = 0$ que sólo dependen de una de las coordenadas generalizadas q_i en coordenadas cartesianas, cilíndricas y esféricas.
