

(1) La ley de Torricelly dice que (bajo ciertas circunstancias ideales) un recipiente cilíndrico perderá fluido por un agujero en la base, a una tasa proporcional a la raíz cuadrada de la altura de la superficie del fluido. Supongamos que un contenedor cilíndrico está inicialmente lleno a una altura de 25cm. Si le lleva un minuto *perder* tres cuartos del total. ¿Cuánto le llevará perder el total del fluido?

(2) Resolver las siguientes ecuaciones lineales de primer orden, sujetas a las condiciones iniciales indicadas

$$(a) \quad y'(x) + 2y(x) = e^x, \quad y(0) = 1, \quad (b) \quad x'(t) + x(t) \cos(t) = 0, \quad x(\pi) = 100.$$

(3) Hallar la solución general $y(x)$ de las siguientes EDO homogéneas de segundo orden

$$\begin{array}{ll} (a) & y'' = 0 \\ (b) & y'' + 36y = 0 \\ (c) & y'' - 36y = 0 \\ (d) & y'' + 5y' + 4y = 0 \\ (e) & y'' + 4y' + \frac{25}{4}y = 0 \end{array}$$

(4) Hallar la solución particular que cumple las condiciones dadas:

$$\begin{array}{ll} (a) & y'' = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0 \\ (b) & y'' + 36y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1 \\ (c) & y'' - 36y = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 1 \\ (d) & y'' + 5y' + 4y = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0 \\ (e) & y'' + 4y' + \frac{25}{4}y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1 \end{array}$$

(5) Hallar la solución particular que cumple las condiciones (homogéneas) dadas:

$$\begin{array}{ll} (a) & y'' = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0 \\ (b) & y'' + 36y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0 \\ (c) & y'' - 36y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0 \\ (d) & y'' + 5y' + 4y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0 \\ (e) & y'' + 4y' + \frac{25}{4}y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0 \end{array}$$

(6) Hallar todas las soluciones que cumplen las condiciones dadas:

$$\begin{array}{ll} (a) & y'' = 0, \quad y(0) = 0, \quad y(\pi) = 0 \\ (b) & y'' + 36y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y(\pi) = 0 \\ (c) & y'' - 36y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y(\pi) = 0 \\ (d) & y'' + 5y' + 4y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y(\pi) = 0 \\ (e) & y'' + 4y' + \frac{25}{4}y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y(\pi) = 0 \end{array}$$

(7) Resolver el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias

$$\begin{array}{ll} x'(t) = x(t) - 4y(t) & x(0) = 1 \\ y'(t) = x(t) + y(t) & y(0) = 1 \end{array}$$

(8) Para $x \in \mathbb{R}$ se definen el seno y coseno hiperbólico de la siguiente manera

$$\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \quad \cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

(a) Graficar ambas funciones y determinar el valor de $\cosh(0)$, $\sinh(0)$, $\cosh'(0)$ y $\sinh'(0)$.

(b) Determinar todos los valores de x para los que $\cosh(x) = 0$, y también aquellos para los que $\sinh(x) = 0$.

(c) Verificar que $\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

(d) Mostrar que $\frac{d}{dx} \sinh(x) = \cosh(x)$ y que $\frac{d}{dx} \cosh(x) = \sinh(x)$.

(e) Mostrar que dado un par de números A, B , existe un par de números $\tilde{A}, \tilde{B}$ tal que

$$A e^x + B e^{-x} = \tilde{A} \cosh(x) + \tilde{B} \sinh(x), \quad \text{para todo } x \in \mathbb{R}.$$

(f) Mostrar que si $\lambda > 0$ entonces toda solución de $y'' - \lambda y = 0$ se puede escribir

$$\tilde{A} \cosh(\sqrt{\lambda} x) + \tilde{B} \sinh(\sqrt{\lambda} x)$$

(g) Mostrar que si $H \in \mathbb{R}$ está dado (fijo), y $\lambda > 0$ entonces toda solución de $y'' - \lambda y = 0$ se puede escribir

$$y(x) = \tilde{\tilde{A}} \cosh(\sqrt{\lambda} x - H) + \tilde{\tilde{B}} \sinh(\sqrt{\lambda} x - H)$$

(9) Dado $\lambda > 0$ fijo, hallar todas las soluciones de $y'' - \lambda y = 0$ que cumplan

$$(a) \ y(0) = 0 \qquad (b) \ y'(0) = 0 \qquad (c) \ y(3) = 0 \qquad (d) \ y'(3) = 0$$

Ayuda: usar el problema anterior para hallar la fórmula más sencilla posible.

(10) Mostrar que para los siguientes operadores $\mathcal{L}$ se cumple que

$$\mathcal{L}[c_1 u_1 + c_2 u_2] = c_1 \mathcal{L}[u_1] + c_2 \mathcal{L}[u_2]$$

para todo par de constantes c_1, c_2 y funciones suaves u_1, u_2 .

$$\begin{array}{ll} (a) \quad \mathcal{L}[u] = u_t - k u_{xx}, & u = u(x, t) \\ (b) \quad \mathcal{L}[u] = u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}, & u = u(x, y, z) \end{array} \qquad \begin{array}{ll} (c) \quad \mathcal{L}[u] = (3 + 2x)u_{xx} + u_{yy}, & u = u(x, y) \\ (d) \quad \mathcal{L}[u] = u_{tt} - \left(e^{-x^2} u_x\right)_x, & u = u(x, t) \end{array}$$

(11) Encontrar la solución general de cada una de las siguientes ecuaciones lineales de primer orden con coeficientes constantes:

$$(a) \quad 2u_x - 3u_y = x \qquad (b) \quad u_x + u_y - u = 0.$$

(12) ¿Qué forma debe tener la función $g(x)$ para que el siguiente problema tenga solución?

$$\begin{cases} u_x + 3u_y - u = 1 & (x, y) \in \mathbb{R}^2 \\ u(x, 3x) = g(x) & x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Si g cumple tal condición. ¿Tiene el problema solución única?

(13) Consideremos la ecuación diferencial siguiente: $5u_x - u_y + u = 0$, $u = u(x, y)$.

(a) Hallar la solución general, y decir cuáles son las curvas características.

En cada uno de los siguientes casos hallar (si es posible) una solución de la ecuación resuelta en (a) que cumpla la condición lateral indicada. Si no hay, indicar por qué. Si hay más de una, indicar tres soluciones diferentes.

$$(b) \ u(-5x, x) = 3e^x, \qquad (c) \ u(x, \frac{-x+5}{5}) = x(1-x), \qquad (d) \ u(x, x) = x^2.$$

(14) Encontrar la solución general, en los dominios indicados, de cada una de las siguientes ecuaciones lineales de primer orden con coeficientes variables:

$$(a) \ x u_x + 2y u_y = 0, \ x > 0, \ y > 0.$$

$$(b) \ y u_x - 4x u_y = 2xy, \ (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

(15) Encontrar la forma paramétrica de la solución de cada uno de los siguientes problemas:

$$(a) \ \begin{cases} x u_x + 2y u_y = 0, & x > 0, \ y > 0 \\ u(s, e^{-s}) = \sin s, & s > 0. \end{cases} \qquad (b) \ \begin{cases} y u_x - 4x u_y = 2xy, & (x, y) \in \mathbb{R}^2 \\ u(s, s^3) = 1, & s \in \mathbb{R} \end{cases}$$
