---

(1) Verificar que si w está dado por la fórmula (2), u_1 y u_2 son soluciones de (6a) y (6b) respectivamente (de la sección 3.4 del libro de Bleecker-Csordas), entonces

$$u(x,t) = w(x,t) + u_1(x,t) + u_2(x,t)$$

es solución del problema (1) de la misma sección.

---

(2) Considerar el problema siguiente:

$$\begin{aligned} &u_t = k u_{xx}, \qquad 0 \le x \le L, \quad t \ge 0, \\ &u_x(0,t) = a(t), \quad u_x(L,t) = b(t), \qquad t \ge 0, \\ &u(x,0) = f(x), \qquad 0 \le x \le L. \end{aligned} \tag{1}$$

(a) ¿Qué situación física representa?

(b) Dar una fórmula para una función $w(x,t)$ que cumpla las condiciones de borde.

(c) ¿Qué problema debe resolver $v(x,t)$ para que $u(x,t) = v(x,t) + w(x,t)$ sea solución de (1)?

(d) Realizar una descomposición del problema descripto en el ítem anterior en dos subproblemas más sencillos, análogos a (6a) y (6b). Dar las fórmulas precisas para los datos no-homogéneos de los problemas resultantes ($g(x)$ y $h(x,t)$ de (6a) y (6b) respectivamente).

(e) Demostrar que la suma de $w(x,t)$ y las soluciones $u_1(x,t)$, $u_2(x,t)$ de los subproblemas del ítem anterior, es solución del problema original.

---

(3) Repetir los cinco ítems el problema anterior para la siguiente situación:

$$\begin{aligned} &u_t = k u_{xx} + q(x,t), \qquad 0 \le x \le L, \quad t \ge 0, \\ &u_x(0,t) = a(t), \quad u_x(L,t) + Hu(L,t) = Hb(t), \qquad t \ge 0, \\ &u(x,0) = f(x), \qquad 0 \le x \le L. \end{aligned}$$

---

(4) Usando la fórmula de Green

$$\int_a^b f''(x)g(x)\,dx - \int_a^b f(x)g''(x)\,dx = \left[f'(x)g(x) - f(x)g'(x)\right]\Big|_a^b,$$

hallar fórmulas (sencillas) para las siguientes integrales. Para los casos $n = m$ usar alguna de las dos identidades trigonométricas siguientes:

$$\operatorname{sen}^2(\alpha) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos(2\alpha), \qquad \cos^2(\alpha) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos(2\alpha).$$

(a) $\displaystyle\int_0^L \operatorname{sen}(\frac{n\pi x}{L})\operatorname{sen}(\frac{m\pi x}{L})\,dx,$ para $n, m = 1, 2, 3, \ldots$.

(b) $\displaystyle\int_0^L \cos(\frac{n\pi x}{L})\cos(\frac{m\pi x}{L})\,dx,$ para $n, m = 0, 1, 2, 3, \ldots$.

(c) $\displaystyle\int_0^L \operatorname{sen}(\frac{(n-\frac{1}{2})\pi x}{L})\operatorname{sen}(\frac{(m-\frac{1}{2})\pi x}{L})\,dx,$ para $n, m = 1, 2, 3, \ldots$.

(d) $\displaystyle\int_0^L \cos(\frac{(n-\frac{1}{2})\pi x}{L})\cos(\frac{(m-\frac{1}{2})\pi x}{L})\,dx,$ para $n, m = 1, 2, 3, \ldots$.

(5) En base al problema anterior, decir cómo deben calcularse los coeficientes a_n, b_n (en términos de f) si se sabe que se cumplen las igualdades siguientes para f definida en $[0, L]$:

(a) $f(x) = \sum_{n=1}^{N} b_n \operatorname{sen}(\frac{n\pi x}{L})$.

(b) $f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{N} a_n \cos(\frac{n\pi x}{L})$.

(c) $f(x) = \sum_{n=1}^{N} c_n \operatorname{sen}(\frac{(n-\frac{1}{2})\pi x}{L})$.

(d) $f(x) = \sum_{n=1}^{N} d_n \cos(\frac{(n-\frac{1}{2})\pi x}{L})$.

---

(6) En cada caso, llamamos $f_5(x)$ a la aproximación de $f(x)$ que se obtiene al hallar los coeficientes a_n, b_n para $n \le 5$ y sumar los términos de la serie de Fourier correspondientes. En cada caso, graficar $f(x)$ y $f_5(x)$ en un mismo par de ejes (usando la computadora). En ambos los casos considerar $L = 1$.

(a) $f(x) = \begin{cases} x & \text{si } 0 \le x \le \frac{1}{2} \\ (1-x) & \text{si } \frac{1}{2} \le x \le 1 \end{cases}$
serie de senos
en $[0, 1]$

(b) $f(x) = 0{,}5 + 10x^2(1-x)^2$
serie de cosenos
en $[0, 1]$

---

(7) Utilizando la función f_5 del problema anterior, calcular la $u_5(x,t)$ que resuelve el problema del calor correspondiente, y graficarla para $t = 0$; $0{,}005$; $0{,}01$; $0{,}015$; $0{,}02$; $0{,}025$.

(a) $\begin{cases} u_t = u_{xx}, & 0 \le x \le 1, t \ge 0 \\ u(0,t) = 0, \quad u(1,t) = 0, & t \ge 0 \\ u(x,0) = f_5(x), & 0 \le x \le 1 \end{cases}$

(b) $\begin{cases} u_t = u_{xx}, & 0 \le x \le 1, t \ge 0 \\ u_x(0,t) = 0, \quad u_x(1,t) = 0, & t \ge 0 \\ u(x,0) = f_5(x), & 0 \le x \le 1 \end{cases}$

---

(8) Verificar (demostrar) las siguientes afirmaciones:

(a) El producto de dos funciones pares es par.

(b) El producto de dos funciones impares es par.

(c) El producto de una función par y una impar es impar.

(d) Si $f(x)$ es impar ($-L \le x \le L$), entonces $\int_{-L}^{L} f(x)\,dx = 0$.

(e) Si $f(x)$ es par ($-L \le x \le L$), entonces $\int_{-L}^{L} f(x)\,dx = 2\int_0^L f(x)\,dx$.

---

(9) Mostrar que cualquier función $f(x)$ definida en $[-L, L]$ se puede escribir como suma de una función par y una impar. Ayuda: $f(x) = \dfrac{f(x)+f(-x)}{2} + \dfrac{f(x)-f(-x)}{2}$.

---

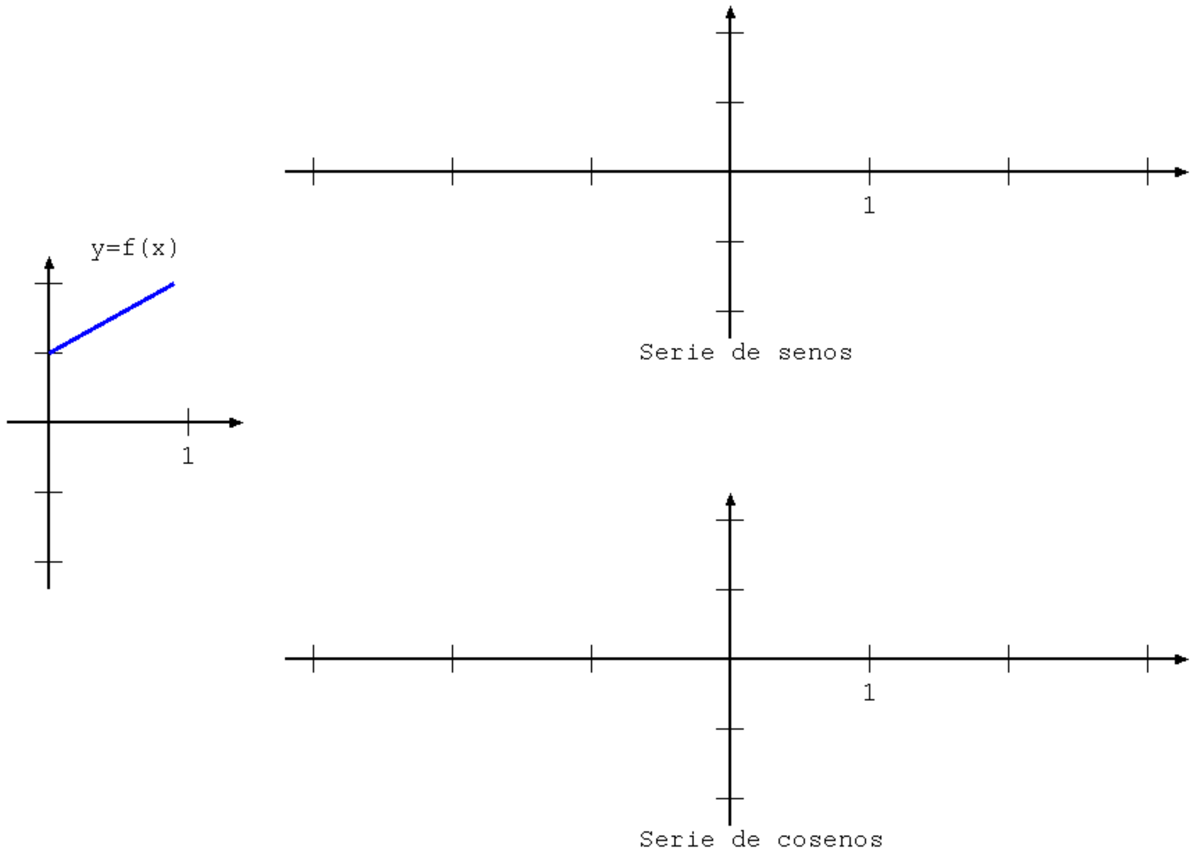
(10) Hallar la solución formal de cada uno de los siguientes problemas (decir también cómo se calculan —en términos de f— los coeficientes a_n y/o b_n de la fórmula resultante).

(a) $\begin{cases} u_t = k u_{xx}, & 0 \le x \le L, \quad t \ge 0, \\ u_x(0,t) = 0, \quad u_x(L,t) = 0, & t \ge 0. \\ u(x,0) = f(x) & \end{cases}$

(b) $\begin{cases} u_t = k u_{xx}, & 0 \le x \le L, \quad t \ge 0, \\ u(0,t) = 0, \quad u_x(L,t) = 0, & t \ge 0. \\ u(x,0) = f(x) & \end{cases}$

(11) Consideremos la función $f(x)$ definida sobre el intervalo $[0,1]$ cuyo gráfico es el de la figura de la izquierda. Graficar sobre el intervalo $[-3,3]$ el límite de la serie de Fourier de senos y el de la serie de Fourier de cosenos de f.

(a)



(b)