Calificación: **Apellido, Nombre:**

Primer Examen Parcial
18/05/2011

Matemática Aplicada

---

(1) ________/**40 pts**

Recordemos que en coordenadas esféricas

$$
\begin{aligned}
&q_1 = r \qquad q_2 = \theta \qquad q_3 = \varphi \\
&h_1 = 1 \qquad h_2 = r \operatorname{sen}\varphi \qquad h_3 = r \\
\overline{\nabla} u &= \frac{\partial u}{\partial r}\,\overline{a}_1 + \frac{1}{r \operatorname{sen}\varphi}\frac{\partial u}{\partial \theta}\,\overline{a}_2 + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \varphi}\,\overline{a}_3 \\
\overline{\nabla}^2 u &= \frac{1}{r^2 \operatorname{sen}\varphi}\left\{ \frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \operatorname{sen}\varphi \frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{\partial}{\partial \theta}\left(\frac{1}{\operatorname{sen}\varphi}\frac{\partial u}{\partial \theta}\right) + \frac{\partial}{\partial \varphi}\left(\operatorname{sen}\varphi \frac{\partial u}{\partial \varphi}\right)\right\}.
\end{aligned}
$$

(a) Hallar la solución de la ecuación de Laplace

$$\overline{\nabla}^2 u = 0, \qquad \text{en} \quad \Omega: \quad 50 < r < 100, \quad \varphi > \pi/2.$$

que cumple las condiciones de borde

$$
\begin{aligned}
u &= 60 \qquad \text{en } r = 50 \\
u &= 0 \qquad \text{en } r = 100 \\
\frac{\partial u}{\partial \varphi} &= 0 \qquad \text{en } \varphi = \pi/2
\end{aligned}
$$

(Ayuda: tal solución depende sólo de la variable r.)

(b) ¿En qué situación o estado es la función u hallada en el ítem anterior una solución de la ecuación del calor $c\rho u_t - K_0 \overline{\nabla}^2 u = 0$?

(c) Interpretar físicamente las condiciones de borde que cumple la temperatura u en cada cara del borde de la región

$$\Omega: \quad 50 < r < 100, \quad \varphi > \pi/2.$$

Graficar la región Ω.

Para los ítems que siguen utilizar los siguientes valores de constantes físicas:

capacidad calórica o calor específico: $c = 1{,}6\ [J/(°\mathrm{C}\, g)]$
densidad de masa: $\rho = 1{,}8\ [g/cm^3]$
conductividad térmica: $K = 2{,}5\ [J/(s\, °\mathrm{C}\, cm)]$.

(d) Calcular el flujo de calor saliente de Ω a través de la cara plana superior ($\varphi = \pi/2$).

(e) Calcular el flujo de calor *saliente* de Ω a través de la cara curva inferior $r = 100$.

(f) Sin calcular. ¿Puede decir cuál es el flujo *entrante* a Ω a través de la cara curva superior $r = 50$? Justificar.

(2) __________/**30 pts**

Consideremos la ecuación diferencial siguiente:

$$3u_x + 5u_y = 16x, \qquad u = u(x,y). \tag{1}$$

(a) Hallar la solución general de (1), y decir cuáles son las curvas características.

(b) Hallar la solución que cumple la siguiente condición lateral

$$u(t, 3t) = e^{-4t}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

(c) ¿Qué forma tiene que tener $g(t)$ para que exista una solución de (1) que cumpla la siguiente condición lateral?

$$u(\frac{t}{5} - 1, \frac{t}{3}) = g(t), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Si $g(t)$ cumple esa condición. ¿Hay solución única?

---

(3) __________/**30 pts**

Hallar las soluciones de variables separadas de

$$\begin{aligned} &u_t = k u_{xx}, \qquad 0 < x < L, \quad t > 0, \\ &u(0,t) = 0, \quad u_x(L,t) = 0, \qquad t > 0. \end{aligned}$$