Calificación: **Apellido, Nombre:**

Segundo Examen Parcial
27/07/2011

Matemática Aplicada

---

(1) ________/20 pts

Considerar el problema

$$\begin{array}{ll} u_t = k u_{xx}, & 0 < x < L, \quad t > 0, \\ u_x(0,t) = a(t), \quad u_x(L,t) = a(t) & t > 0, \\ u(x,0) = f(x), & 0 < x < L, \end{array}$$

con $a(t)$ una función suave conocida.

(a) Demostrar (sin hallar la solución), que si u es una solución C^2 de este problema, entonces para todo $t \geq 0$,

$$\int_0^L u(x,t)\,dx = \int_0^L f(x)\,dx. \qquad (*)$$

(Ayuda: Definir $F(t) = \int_0^L u(x,t)\,dx$ y hallar la derivada de $F(t)$.)

(b) Interpretar físicamente la igualdad (*).

---

(2) ________/15 pts

Considerar una función $f : [0,L] \to \mathbb{R}$.

(a) Definir la serie de Fourier de senos de f.

(b) Si f es C^1 a trozos en $[0,L]$. ¿A qué converge la serie de Fourier de senos de f en el intervalo $[-L,L]$?

(c) ¿Bajo qué hipótesis puede asegurarse que la serie de Fourier de senos de f converge *uniformemente* a f en $[0,L]$?

---

(3) ________/25 pts

Hallar la solución de la ecuación de Laplace $\overline{\nabla}^2 u = 0$ en el rectángulo $0 < x < L$, $0 < y < H$ con condiciones de borde

$$u(0,y) = 0, \quad u_x(L,y) = 0, \quad u_y(x,0) = 0, \quad u_y(x,H) = f(x).$$

¿Hace falta imponer alguna condición de compatibilidad sobre f para que el problema tenga solución?

(4) **________/20 pts**

Hallar la solución de la siguiente ecuación de difusión en el disco unitario D:

$$\begin{cases} u_t = \overline{\nabla}^2 u & \text{en } D, \text{ para } t > 0, \\ u = 0 & \text{en } \partial D, \text{ para } t > 0, \\ u = f & \text{en } D, \text{ para } t = 0. \end{cases}$$

Suponer que el dato inicial f y también la solución u dependen sólo de la distancia al origen, es decir, $f = f(r)$ no depende del ángulo θ y $u = u(r;t)$ depende de r y de t, pero no de θ.
Desarrollar la resolución por separación de variables partiendo de $u = u(r;t)$. Recordemos que el Laplaciano en coordenadas polares es:

$$\overline{\nabla}^2 \phi(r,\theta) = \frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial \phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 \phi}{\partial \theta^2}.$$

---

(5) **________/30 pts**

Consideremos el siguiente problema de autovalores para el laplaciano (Ω un dominio en $\mathbb{R}^2$):

$$\begin{aligned} \overline{\nabla}^2 \phi = -\lambda \phi, &\qquad (x,y) \in \Omega \\ \phi = 0, &\qquad (x,y) \in \partial\Omega. \end{aligned}$$

El Teorema 12.1 enunciado en clase afirma que este problema tiene una sucesión infinita de autovalores λ_n y correspondientes autofunciones ϕ^n que satisfacen:

$$0 < \lambda_1 < \lambda_2 \leq \lambda_3 \leq \lambda_4 \leq \cdots \leq \lambda_n \leq \ldots \longrightarrow +\infty$$

$$\begin{aligned} \overline{\nabla}^2 \phi^n = -\lambda_n \phi^n, &\qquad (x,y) \in \Omega \\ \phi^n = 0, &\qquad (x,y) \in \partial\Omega, \end{aligned}$$

$$\iint_\Omega \phi^n \, \phi^m \, dx \, dy = 0, \quad \text{si } n \neq m, \quad n, m \in \mathbb{N}.$$

Además, toda f suficientemente suave en Ω puede aproximarse tanto como se desee por combinaciones lineales de estas autofunciones.

(a) Explique brevemente para qué sirve saber esto en relación con la ecuación del calor y la ecuación de ondas (decir cómo son las soluciones de estas ecuaciones).

(b) Explique muy brevemente, a partir de las fórmulas escritas en el ítem anterior, diferencias cualitativas entre las soluciones de la ecuación del calor y la ecuación de ondas.

(c) Explicar brevemente qué ocurre cuando modificamos la ecuación de ondas

$$u_{tt} = c^2 \overline{\nabla}^2 u$$

por la ecuación de ondas *amortiguada*

$$u_{tt} = c^2 \overline{\nabla}^2 u - \beta u_t,$$

con $\beta > 0$ pequeño.