Segundo Mini Parcial *Matemática Aplicada*
2017 *Ecuaciones en Derivadas Parciales*

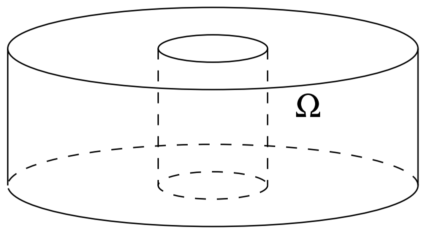
---

(1) Recordemos que en coordenadas cilíndricas

$$q_1 = \rho \qquad q_2 = \theta \qquad q_3 = z$$
$$h_1 = 1 \qquad h_2 = \rho \qquad h_3 = 1$$
$$\overline{\nabla} u = \frac{\partial u}{\partial \rho}\,\overline{a}_1 + \frac{1}{\rho}\frac{\partial u}{\partial \theta}\,\overline{a}_2 + \frac{\partial u}{\partial z}\,\overline{a}_3$$
$$\overline{\nabla}^2 u = \frac{1}{\rho}\left\{ \frac{\partial}{\partial \rho}\left(\rho \frac{\partial u}{\partial \rho}\right) + \frac{\partial}{\partial \theta}\left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial u}{\partial \theta}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\rho \frac{\partial u}{\partial z}\right)\right\}.$$

(a) Halle la solución que depende sólo de la variable ρ de la ecuación de Laplace

$$\overline{\nabla}^2 u = 0, \qquad \text{en} \quad \Omega: \quad 20 \le \rho \le 100, \quad 0 \le z \le 70.$$



y que cumple las condiciones de borde

$$u = 60 \qquad \text{en } \rho = 20$$
$$u = 0 \qquad \text{en } \rho = 100$$

(b) ¿Cuánto vale $\dfrac{\partial u}{\partial z}$ en las caras superior ($z = 70$) e inferior ($z = 0$) del dominio?

(c) Interprete físicamente las condiciones de borde que cumple la temperatura u en cada cara del borde de la región

$$\Omega: \quad 20 \le \rho \le 100, \quad 0 \le z \le 70 \qquad \text{(ver la figura).}$$

Las caras son cuatro:

(I) La cara superior plana ($z = 70$) [use (b)]
(II) La cara inferior plana ($z = 0$) [use (b)]
(III) La cara curva exterior ($\rho = 100$) [use (a)]
(IV) La cara curva interior ($\rho = 20$) [use (a)]

Para los ítems que siguen utilice los siguientes valores de constantes físicas:

capacidad calórica o calor específico: $c = 1{,}6\ [J/(^\circ\mathrm{C}\, g)]$
densidad de masa: $\rho = 1{,}8\ [g/cm^3]$
conductividad térmica: $K = 2{,}5\ [J/(s\, ^\circ\mathrm{C}\, cm)]$
ρ y z se miden en cm y la temperatura u en °C

(d) Calcule el flujo de calor saliente de Ω a través de la cara superior ($z = 70$) e inferior ($z = 0$).

(e) Calcule el flujo de calor saliente de Ω a través de la cara lateral curva $\rho = 100$.

(f) Sin calcular ninguna integral más, diga cuál es el flujo saliente de Ω a través de la cara lateral curva $\rho = 20$. Justificar. (Pensar en el teorema de la divergencia y recordar que $\nabla^2 u = \overline{\nabla} \cdot \overline{\nabla} u = 0$ en Ω.)

---

(2)
Consideremos la ecuación diferencial siguiente:

$$5u_x + 3u_y + 6u = 0, \qquad u = u(x, y). \tag{1}$$

(a) Halle la solución general de (1), y diga cuáles son las curvas características.

En cada uno de los siguientes casos halle (si es posible) una solución de la ecuación (1) que cumpla la condición lateral indicada. Si no hay, indique por qué. Si hay más de una, indique tres soluciones diferentes.

(b) $u(x, x) = \mathrm{sen}(x) e^{-2x}$, **(c)** $u(\frac{x}{3}, \frac{x}{5} + 1) = 1$, **(d)** $u(5t, 3t - 2) = e^{-6t}$.