Matemática D - Segundo Semestre 2003
Trabajo Práctico sobre Diferencias Finitas
Segunda Parte

Introducción. La idea de este trabajo práctico es que el alumno se familiarice con un primer *método numérico* para resolver la ecuación del calor en una dimensión.

El método que consideraremos es el método de diferencias finitas *explícito*: Consideremos la ecuación del calor siguiente:

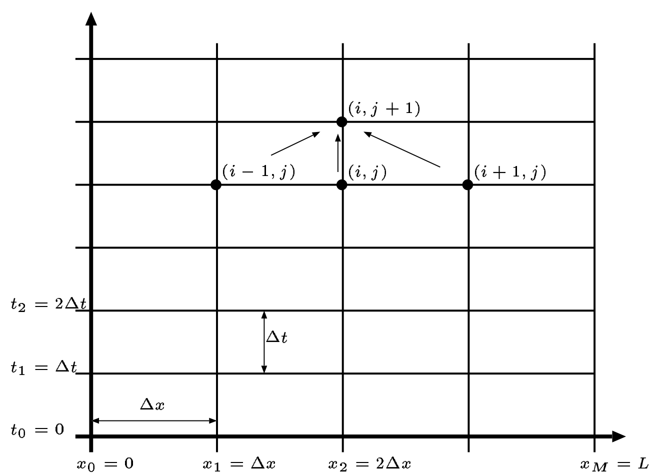
$$\frac{\partial u}{\partial t} = k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \qquad 0 < t < T, \quad 0 < x < L, \tag{1}$$

con condición inicial

$$u(x,0) = f(x), \qquad 0 \le x \le L. \tag{2}$$

Dejaremos la determinación de las condiciones de borde para más adelante.

Tomamos M y N números enteros positivos. Subdividimos la longitud L de la barra en M subintervalos de longitud $\Delta x = L/M$, y subdividimos el intervalo de tiempo en N subintervalos de longitud $\Delta t = T/N$. Llamamos $x_i = i\,\Delta x$, y $t_j = j\,\Delta t$. La variable $v_{i,j}$ denotará el valor de la solución aproximada en el punto (x_i, t_j).



Los valores de $v_{i,j}$ se calculan del siguiente modo:

Para $j = 0$, estamos considerando $t = 0$ y luego utilizamos la condición inicial $u(x,0) = f(x)$

$$v_{i,0} = f(x_i) = f(i\,\Delta x).$$

Al cambiar en la ecuación las derivadas por diferencias finitas, obtenemos la siguiente ecuación en diferencias para la solución aproximada $v_{i,j}$:

$$\frac{v_{i,j+1} - v_{i,j}}{\Delta t} = k\frac{v_{i+1,j} - 2v_{i,j} + v_{i-1,j}}{\Delta x^2}$$

Despejando el único término que tiene $j+1$, obtenemos

$$\begin{aligned} v_{i,j+1} &= v_{i,j} + k\frac{\Delta t}{\Delta x^2}\left[v_{i+1,j} - 2v_{i,j} + v_{i-1,j}\right] \\ &= k\frac{\Delta t}{\Delta x^2} v_{i+1,j} + \left(1 - 2k\frac{\Delta t}{\Delta x^2}\right) v_{i,j} + k\frac{\Delta t}{\Delta x^2} v_{i-1,j}. \end{aligned}$$

Si llamamos $\lambda = k\dfrac{\Delta t}{\Delta x^2}$, obtenemos la forma compacta

$$v_{i,j+1} = \lambda v_{i+1,j} + (1-2\lambda)v_{i,j} + \lambda v_{i-1,j}.$$

Esta fórmula nos presenta una manera sencilla y **explícita** de calcular, conociendo las aproximaciones de u para un tiempo t_j dado, las aproximaciones de u para el tiempo siguiente t_{j+1}.

Más concretamente, si conocemos $v_{i,0}$ para $i = 0, 1, 2, \ldots, M$ (dado por la condición inicial), podemos calcular $v_{i,1}$ para $i = 1, 2, \ldots, M-1$. ¿Qué pasa con $v_{0,1}$ y $v_{M,1}$? ¿Por qué no se pueden calcular estas cantidades con la fórmula dada? Para calcular $v_{0,1}$ necesitaríamos conocer $v_{-1,0}$ pero $v_{-1,0}$ corresponde a $x = -\Delta x$ que se encuentra *fuera de la barra.* Pareciera que aquí nos encontramos con un problema, pero no es tan así. Pues si observamos cuidadosamente, veremos que $v_{0,1}$ corresponde al punto $x = 0$, $t = \Delta t$ que se encuentra en un extremo de la barra, y análogamente, $v_{M,1}$ corresponde al punto $x = L$, $t = \Delta t$ que se encuentra en el otro extremo de la barra. Utilizaremos para calcular estas dos cantidades las condiciones de borde. Supongamos que las condiciones de borde son las siguientes:

$$u(0,t) = A(t) \qquad u(L,t) = B(t). \tag{3}$$

Es decir, tenemos condiciones de borde de temperatura prescripta en ambos extremos. Esta condición de borde nos dice que la temperatura en los extremos ya está dada y es conocida, por lo que el valor de la solución aproximada $v_{i,j}$ en los puntos correspondientes a los extremos de la barra puede tomarse directamente de los datos del problema. En el caso que estamos analizando tendríamos:

$$v_{0,1} = A(\Delta t) \qquad v_{M,1} = B(\Delta t).$$

De este modo hemos determinado el valor de $v_{i,j}$ para todo $i = 0, 1, 2, \ldots, M$ y para $j = 0, 1$. De ahora en adelante sólo resta repetir el proceso para calcular los valores para todos los j restantes.

Resumiendo, el método de diferencias explícito para la ecuación del calor unidimensional con condiciones de borde de temperatura prescripta es el siguiente:

[1] Elegir M un número entero positivo y llamar $\Delta x = L/M$

[2] Elegir Δt un número positivo (pequeño)

[3] Llamar $\lambda = k\dfrac{\Delta t}{\Delta x^2}$

[4] Utilizar la condición inicial para determinar los valores $v_{i,0}$ del siguiente modo:

$$v_{i,0} = f(x_i) = f(i\,\Delta x).$$

[5] Para $j = 0, 1, 2, 3, \ldots$ hacer los siguientes pasos

[5.a] Calcular $v_{i,j+1}$ para $i = 1, 2, \ldots, M-1$ (puntos interiores) del siguiente modo:

$$v_{i,j+1} = \lambda v_{i+1,j} + (1-2\lambda)v_{i,j} + \lambda v_{i-1,j}.$$

[5.b] Utilizar las condiciones de borde para calcular $v_{0,j+1}$ y $v_{M,j+1}$ del siguiente modo:

$$v_{0,j+1} = A\big((j+1)\Delta t\big) \qquad v_{M,j+1} = B\big((j+1)\Delta t\big).$$

Este método puede programarse en cualquier lenguaje de programación, o incluso puede implementarse en una planilla de cálculo.

Con respecto al error que se produce al calcular utilizando este método puede probarse el siguiente

Teorema. Sea $u(x,t)$ una solución C^4 de la ecuación del calor (1)–(2) con condiciones de borde compatibles dadas en (3). Sean M y N enteros positivos y definamos $\Delta x = L/M$, $\Delta t = T/N$, y $\lambda = k\Delta t/(\Delta x)^2$. Sea $v_{i,j}$ la solución obtenida por diferencias finitas. Entonces, si $\lambda \le 1/2$ se tiene que

$$|u_{i,j} - v_{i,j}| \le \frac{T}{2} K \left(\Delta t + \frac{(\Delta x)^2}{\Delta t}\right),$$

donde

$$K = \max_{0\le x\le L,\, 0\le t\le T} \Big\{|A''(t)|, |B''(t)|, |f^{(4)}(x)|\Big\}.$$

Problemas.

(1) Considerar el problema

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \qquad 0 < x < 1, \quad t > 0\\
&u(0,t) = 4t \qquad u(1,t) = 4t \qquad t \ge 0\\
&u(x,0) = 2x(x-1) \qquad 0 \le x \le 1.
\end{aligned}$$

Este problema tiene solución exacta $u(x,t) = 2x(x-1) + 4t$.

(a) Usar el método de diferencias finitas con $\Delta x = 0{,}5$ y $\Delta t = 1$ para aproximar $u(0{,}5, 1)$. Comparar con la solución exacta (hacer las cuentas a mano)

(b) Usar el método de diferencias finitas con $\Delta x = 0{,}25$ y $\Delta t = 0{,}05$ para aproximar $u(0{,}25, 1)$, $u(0{,}5, 1)$, $u(0{,}75, 1)$. (Usar una planilla de cálculo o un lenguaje de programación)

(c) ¿Qué error se observa? Explicar.

(2) Considerar el problema

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \qquad 0 < x < 5, \quad t > 0\\
&u(0,t) = 2t \qquad u(5,t) = 25 + 2t \qquad t \geq 0\\
&u(x,0) = x^2 \qquad 0 \leq x \leq 5.
\end{aligned}$$

Este problema tiene solución exacta $u(x,t) = x^2 + 2t$. Calcular (a mano) usando el método de diferencias finitas con $\Delta x = 1$ y $\Delta t = 2$, el valor de $u(1,2)$, $u(2,2)$, $u(3,2)$ y $u(4,2)$.

(3) Modificar el método de diferencias finitas para resolver el siguiente problema con el extremo en $x = L$ aislado

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial u}{\partial t} = k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \qquad 0 < x < L, \quad t > 0\\
&u(0,t) = A(t) \qquad \frac{\partial u}{\partial x}(L,t) = 0 \qquad t \geq 0\\
&u(x,0) = f(x) \qquad 0 \leq x \leq L.
\end{aligned}$$

(4) Considerar el problema

$$\begin{aligned}
&u_t = u_{xx} \qquad 0 < x < 1, \quad t > 0\\
&u(0,t) = 0 \qquad u(1,t) = 0 \qquad t \geq 0\\
&u(x,0) = \operatorname{sen} \pi x \qquad 0 \leq x \leq 1.
\end{aligned}$$

(a) Hallar la solución exacta

(b) Tomar $M = 2$ ($\Delta x = \frac{1}{2}$) y los siguientes valores de λ

$$\text{(i) } \lambda = \frac{1}{4} \qquad \text{(ii) } \lambda = \frac{1}{2} \qquad \text{(iii) } \lambda = \frac{3}{4} \qquad \text{(iv) } \lambda = 1$$

(calcular los valores correspondientes de Δt.)
Calcular por medio del método de diferencias finitas la solución aproximada en los puntos $\left(\frac{1}{2}, t_j\right)$, $j = 1, 2, 3, 4$. (Se puede hacer a mano)

(c) ¿Cuál de los resultados anteriores **no** es físicamente razonable? ¿Por qué?

(d) Graficar la temperatura (solución exacta y soluciones aproximadas) en el punto medio de la barra ($x = \frac{1}{2}$) en función del tiempo.

(e) Conclusión: ¿qué valores de λ no deben utilizarse?

(5) Considerar el siguiente problema con condiciones de borde de ambos extremos aislados

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial u}{\partial t} = k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \qquad 0 < x < L, \quad t > 0\\
&\frac{\partial u}{\partial x}(0,t) = 0 \qquad \frac{\partial u}{\partial x}(L,t) = 0 \qquad t \geq 0\\
&u(x,0) = f(x) \qquad 0 \leq x \leq L.
\end{aligned}$$

(a) Modificar el método de diferencias finitas para resolverlo.

(b) Implementarlo en la computadora y comparar la solución exacta con la aproximada cuando $L = 1$, $k = 1$ y $f(x) = \cos \pi x$.

(6) Considerar el siguiente problema con condiciones de borde periódicas

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial u}{\partial t} = k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \qquad -L < x < L, \quad t > 0\\
&u(-L,t) = u(L,t) \qquad \frac{\partial u}{\partial x}(-L,t) = \frac{\partial u}{\partial x}(L,t) \qquad t \geq 0\\
&u(x,0) = f(x) \qquad -L \leq x \leq L.
\end{aligned}$$

(a) Modificar el método de diferencias finitas para resolverlo.

(b) Implementarlo en la computadora y comparar la solución exacta con la obtenida cuando $L = 1$, $k = 2$ y $f(x) = 3 + \operatorname{sen} \pi x + \cos \pi x$.

(7) Considerar el siguiente problema con un término fuente

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial u}{\partial t} = k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 1 \qquad 0 < x < L, \quad t > 0\\
&u(0,t) = A(t) \qquad u(L,t) = B(t) \qquad t \geq 0\\
&u(x,0) = f(x) \qquad 0 \leq x \leq L.
\end{aligned}$$

(a) Modificar el método de diferencias finitas para resolverlo.

(b) Implementarlo en la computadora y resolver para $k = 1$, $L = 1$, $f(x) = 0$.