UN PROBLEMA ABIERTO DE DINÁMICA DE CUERPOS VINCULADOS POR CUERDAS Y ROZAMIENTOS BAJO EL ANÁLISIS CLÁSICO Y LA SIMULACIÓN COMPUTACIONAL

Jorge Mamprin – Hugo Kofman

Facultad de Ingeniería Química - Universidad Nacional del Litoral
Santiago del Estero 2829 – Santa Fe – Argentina
0342-4527670 jmamprin@fiqus.unl.edu.ar – hkofman@fiqus.unl.edu.ar

RESUMEN

La resolución de problemas abiertos, en los cuales la variación de parámetros y condiciones se traducen en comportamientos cualitativamente diferentes del sistema físico, es una actividad que ayuda al desarrollo de la creatividad y al aprendizaje significativo. Sin embargo, ciertos problemas se suelen complicar por el requerimiento de una estructuración lógica de las distintas variantes, y de cálculos laboriosos para validar las predicciones teóricas. En estos casos, la tarea se facilita combinando la resolución analítica con el desarrollo de un algoritmo que permita la simulación del fenómeno en la computadora. Tal es el ejemplo presentado, en el que se propone la utilización del modelo de simulación como herramienta didáctica, que permite, entre otras cosas, discutir la limitación del modelo físico ideal del rozamiento y el vuelco dinámico de los cuerpos.

INTRODUCCIÓN:

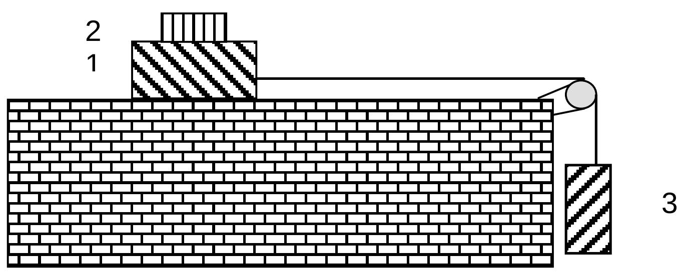
Desde hace tiempo se insiste en la necesidad de proponer al alumno la resolución de problemas abiertos, es decir de aquellos que no se limiten a un determinado juego de datos numéricos, sino que contemplen ciertos parámetros en función de los cuales puedan producirse situaciones cualitativamente diferentes.

La resolución de tales problemas con lápiz y papel, necesaria cualquiera sea el camino que se siga, presenta en muchos casos ciertas dificultades para validar los resultados, lo cual puede requerir la necesidad de realizar muchos cálculos que insumen un tiempo excesivo. Además, dichos resultados numéricos no siempre resultan interpretables como para indicar que la resolución ha sido correcta.

La elaboración y ejecución de un algoritmo general, que refleje la resolución encontrada en forma analítica nos brinda posibilidades sumamente interesantes en ese aspecto. Con el modelo computacional resulta posible realizar “experimentos” (simulaciones) bajo distintas condiciones, para validar o corregir el modelo matemático encontrado. Pero la realización de la simulación puede permitir, además, encontrar las limitaciones del modelo físico ideal que se ha utilizado como punto de partida para resolver el problema, cuestión que difícilmente se pueda percibir en la resolución analítica y validación por medio de simples cálculos matemáticos.

Tales son las conclusiones a que hemos arribado luego de resolver un problema de dinámica relativa, aparentemente sencillo, pero que sólo en el desarrollo y ejecución del algoritmo nos resultó posible analizar y ordenar las diferentes situaciones que se podían producir. Cómo luego detallaremos, la ejecución del programa nos mostró de manera evidente la escasa aproximación a la realidad, del modelo de rozamiento dinámico que propone una fuerza independiente de la velocidad relativa entre las superficies en contacto, el que es ampliamente utilizado en los textos de física de todos los niveles.

Se trabajó sobre un problema de dinámica relativa, con movimientos de traslación, pero que contempla una rotación en la posibilidad del vuelco de un cuerpo. Se trata de una situación similar a la que se plantearía a un cuerpo apoyado sobre una cinta transportadora que se pone en movimiento. El programa fue desarrollado en entorno Windows 95, incluye una animación, la construcción de las gráficas de Desplazamientos, Velocidades y Aceleraciones en función del tiempo, que se dibujan simultáneamente con la animación, y la posibilidad de acceso a tablas de valores.



Dicho software permite su utilización posterior como herramienta didáctica, para que los alumnos obtengan conclusiones mediante la simulación, variando los distintos parámetros, lo cual puede aplicarse a modo de predicción cualitativa y/o con el objetivo de validar su propia resolución analítica.

EL PROBLEMA:

Analizar la evolución del siguiente sistema físico a partir del reposo, para distintas masas de los cuerpos, coeficientes de rozamiento y dimensiones del cuerpo Nro. 2.

MODELO FÍSICO IDEALIZADO DEL SISTEMA

Vamos a considerar la existencia de rozamiento entre el bloque (1) y la superficie donde se apoya, al igual que entre el mismo y el bloque (2). Diferenciamos para cada caso un coeficiente de rozamiento estático y un coeficiente dinámico, considerando que la fuerza de rozamiento es proporcional a dicho coeficiente y a la fuerza normal de contacto entre las superficies, siendo la fuerza dinámica independiente de la velocidad.

Suponemos que el sistema de referencia (4) es inercial, lo cual implica despreciar los efectos de los movimientos terrestres.

Para la cuerda, consideramos despreciable su masa, inextensible y perfectamente flexible. La polea se supone de masa, momento de inercia y rozamiento del eje despreciables.

En el problema no se tiene en cuenta la fuerza de resistencia del aire.

ANÁLISIS DEL PROBLEMA

En el marco de las consideraciones anteriores, podemos suponer que el sistema se puede comportar de diversas maneras, de acuerdo a los parámetros que se fijen:

I- Equilibrio estático del conjunto del sistema.

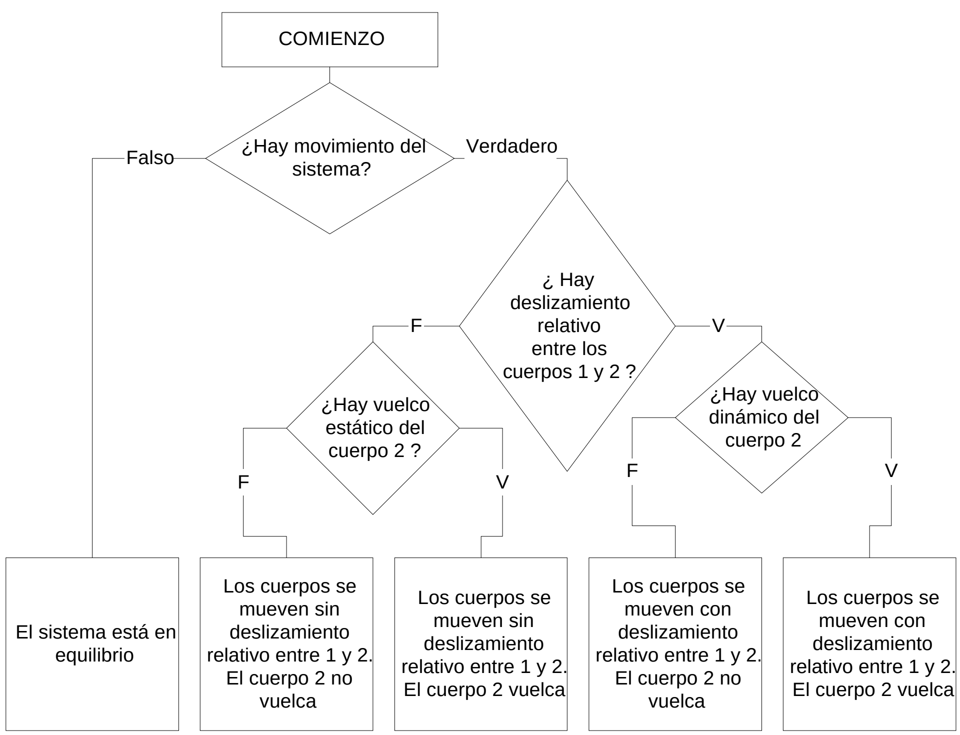
II- Aceleración igual de los tres bloques (los bloques (1) y (2) se mueven adheridos entre sí)

III- Deslizamiento relativo de los bloques (1) y (2)

IV- Aceleración de los cuerpos 1 y 3 y vuelco del cuerpo 2

Para resolver el problema nos planteamos el siguiente algoritmo:

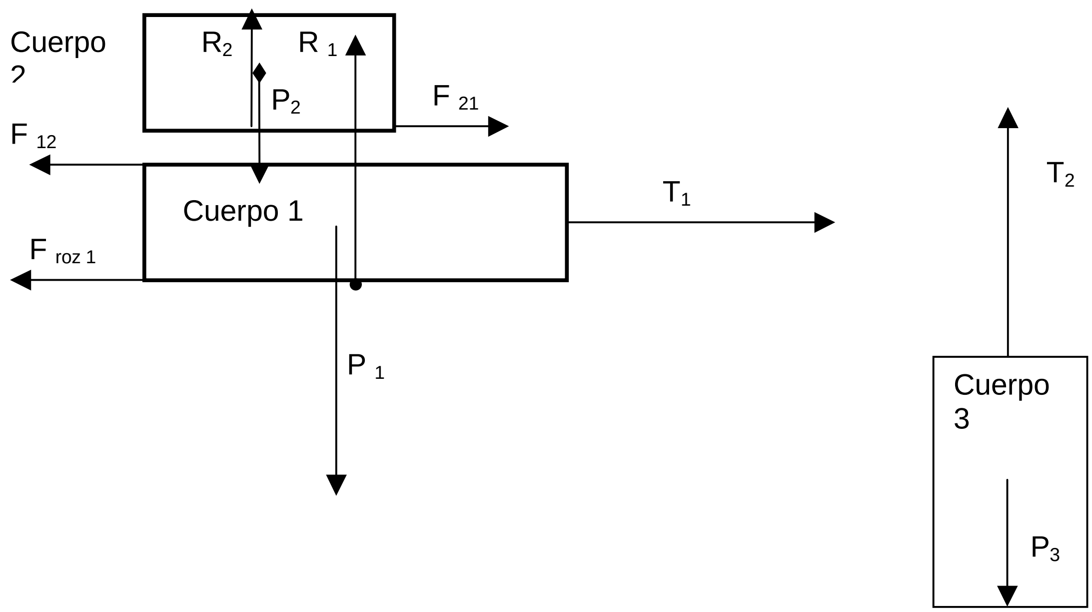
Gráfico 1



DIAGRAMAS DE CUERPO LIBRE

Para aplicar las leyes de la dinámica, previamente analizamos las fuerzas actuantes sobre cada uno de los cuerpos:

Gráfico 2



En el esquema anterior se designan por P a las fuerzas Peso, por Fr a las fuerzas de rozamiento, por R a las reacciones de vínculo normales a las superficies de contacto, y por T a las tensiones.

En el transcurso del corriente texto utilizaremos la siguiente nomenclatura:

a_n :	aceleración del cuerpo n.
μ_n^d:	coeficiente de rozamiento dinámico del cuerpo n.
μ_n^e:	coeficiente de rozamiento estático del cuerpo n.
m_n:	masa del cuerpo n.
g:	aceleración de la gravedad.
t:	tiempo.
v_n:	velocidad del cuerpo.
x_n:	posición del cuerpo

Hay que tener en cuenta las parejas de acción - reacción del sistema, lo cual nos indica que:

$$\left|\mathbf{Fr_{21}}\right| = \left|\mathbf{Fr_{12}}\right|, \quad \left|\mathbf{T_1}\right| = \left|\mathbf{T_2}\right| = \mathrm{T} \text{ (Relaciones entre módulos)} \qquad (1)$$

Teniendo en cuenta que los cuerpos (1) y (2) no sufren aceleraciones verticales, se cumplirán las siguientes relaciones:

$$\left|\mathbf{R_2}\right| = \left|\mathbf{P_2}\right| \quad \left|\mathbf{R_1}\right| = \left|\mathbf{P_1} + \mathbf{P_2}\right| \quad \text{(Relaciones entre módulos)} \qquad (2)$$

Para estudiar las aceleraciones de los cuerpos, debemos obrar de acuerdo al plan establecido en el algoritmo de análisis, aplicando en cada caso la segunda Ley de Newton. Utilizaremos en general un sistema de referencia inercial.

PREGUNTA 1 ¿HAY MOVIMIENTO DEL SISTEMA?

Planteando el equilibrio estático del sistema, se observa que la fuerza que provoca el movimiento del cuerpo 1 es la tensión de la cuerda, $T = P_3 = m_3\, g$, y la que lo impide es la fuerza de rozamiento estática entre el cuerpo 1 y la superficie de deslizamiento $F_r \leq g\, \mu_1^e\, (m_1 + m_2)$.

Para que el sistema tenga movimiento la tensión de la cuerda debe superar a la fuerza de rozamiento estática máxima, es decir:

$$m_3 > \mu_1^e\, (m_1 + m_2) \qquad (3)$$

PREGUNTA 2 ¿ HAY DESLIZAMIENTO RELATIVO ENTRE LOS CUERPOS 1 Y 2?

Supóngase que los cuerpos 1 y 2 aceleren unidos.

El módulo de la aceleración del cuerpo 3 en la dirección del *eje y* es igual a la aceleración de los cuerpos 1 y 2 en la dirección del *eje x* ($a_{12} = a_3 = a_s$). Por hipótesis del modelo las tensiones en las cuerdas 1 y 2 son iguales ($T_1 = T_2 = T$). Nótese que todas las componentes de las fuerzas son normales a los ejes

Para el sistema cuerpo 1 y 2 se plantea:

$$\Sigma F_x = m\, a_{12} \qquad (4)$$

$$T_1 - g\, \mu_1^d\, (m_1 + m_2) = a_{12}\, (m_1 + m_2) \qquad (5)$$

Para el cuerpo 3 se plantea que

$$\Sigma F_y = m\, a_3 \qquad (6)$$

$$T_2 - m_3\, g = -\, m_3\, a_3 \qquad (7)$$

Igualando [5] y [7] y despejando la aceleración del sistema se tiene

$$a_s = g\frac{m_3 - (m_1 + m_2)\mu_1^d}{m_1 + m_2 + m_3} \qquad (8)$$

Por otra parte, la aceleración máxima que puede tener el cuerpo 2, limitada por la fuerza de rozamiento estática es:

$$a_{2\,max} = \frac{Fr_2}{m_2} = g\,\mu_2^e \quad (9)$$

Si la aceleración del sistema calculada previamente es menor o igual que la máxima aceleración del cuerpo 2, la hipótesis planteada originariamente es válida y el cuerpo 2 no tiene deslizamiento relativo sobre el cuerpo 1.

Si $a_s > g\,\mu_2^e$ el cuerpo 2 tiene deslizamiento relativo sobre 1.

Si hay deslizamiento relativo, y el cuerpo 2 está sobre el cuerpo 1, se plantea para el cuerpo 1

$$m_3\,(g - a_1) - m_2\,g\,\mu_2^d - (m_1 + m_2)\,g\,\mu_1^d = m_1\,a_1 \qquad (10)$$

de donde se desprende que:

$$a_1 = g\frac{m_3 - m_2(\mu_1^d + \mu_2^d) - m_1\mu_1^d}{m_1 + m_3} \qquad (11)$$

Para el cuerpo 2 se tiene

$$m_2 g \mu_2^d = m_2 a_2 \quad (12)$$

Por lo que

$$a_2 = g\,\mu_2^d \qquad (13)$$

$$a_3 = a_1 \qquad (14)$$

En el caso particular que el cuerpo 2 se haya caído y ya no se encuentre sobre el cuerpo 1, se tiene que:

$$a_1 = g\frac{m_3 - m_1\mu_1^d}{m_1 + m_3} \qquad (15)$$

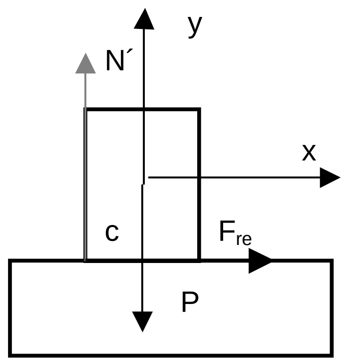
$$a_2 = 0 \qquad (16)$$

$$a_3 = a_1 \qquad (17)$$

PREGUNTA 3 ¿HAY VUELCO ESTÁTICO DEL CUERPO 2?

En el caso que no exista deslizamiento relativo entre 1 y 2 la aceleración calculada en [8] es la aceleración del sistema e igual a todos los cuerpos,

Las fuerzas que actúan sobre el cuerpo 2 son:



Fuerza de rozamiento estático $Fr_e = m_2\ a_2$

N´: Reacción normal, aplicada en el punto c (punto de rotación)

P: peso del cuerpo 2, $P = m_2\ g$

Para que el cuerpo 2 vuelque hacia atrás, el momento de todas las fuerzas respecto a su centro de masas debe ser positivo, es decir: el momento de la reacción normal N', con respecto al centro de masas, debe ser mayor que el momento de la fuerza de rozamiento con respecto al mismo punto (el momento de la fuerza peso es cero), es decir:

$$m_2\ a_s \frac{\text{altura cuerpo 2}}{2} - m_2\ g \frac{\text{base cuerpo 2}}{2} > 0 \qquad (18)$$

Trabajando algebraicamente, para que el cuerpo 2 vuelque en forma estática, se debe cumplir que

$$a_s > g \frac{\text{longitud del cuerpo 2}}{\text{altura del cuerpo 2}} \qquad (19)$$

PREGUNTA 4 ¿HAY VUELCO DINÁMICO DEL CUERPO 2?

Para este caso las fuerzas que ejercen momento con respecto al centro de masas del cuerpo 2 son:

Fuerza de rozamiento, $Fr = \mu_2^d\ m_2\ g$

Reacción normal aplicada al punto *c* $N' = m_2\ g$

Para que el cuerpo vuelque hacia atrás, el momento de todas las fuerzas respecto a su centro de masas debe ser mayor que cero, por lo tanto:

$$\mu_2^d\ m_2\ g \frac{\text{altura del cuerpo 2}}{2} - m_2\ g \frac{\text{longitud del cuerpo 2}}{2} > 0 \qquad (20)$$

de donde se concluye que

$$\mu_2^d > \frac{\text{longitud del cuerpo 2}}{\text{altura del cuerpo 2}} \qquad (21)$$

DESCRIPCIÓN DEL PROGRAMA

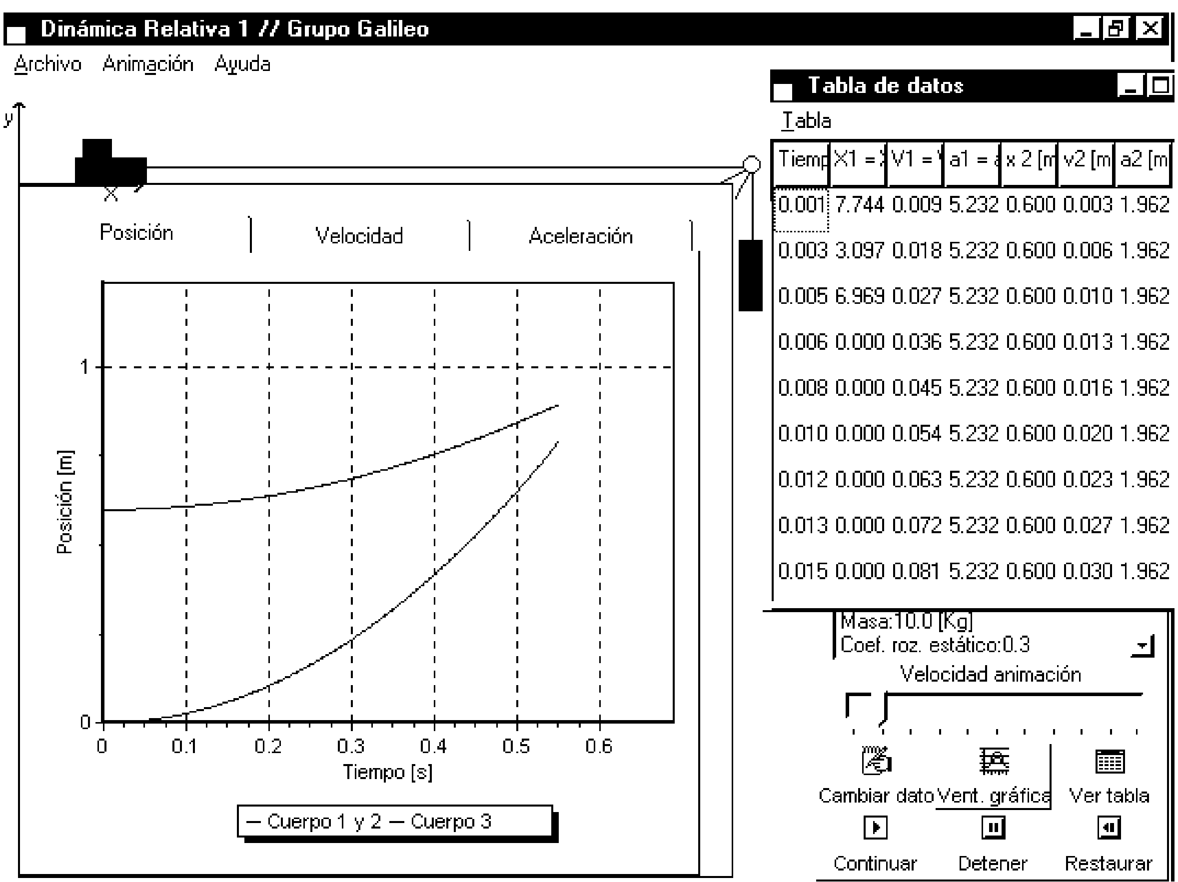
El programa ha sido desarrollado íntegramente en Delphi 4.0 para Windows 32 bits, compilado en un solo archivo, sin que haya necesidad de instalar librerías adicionales para su ejecución.

La pantalla principal posee una serie de botones de comando y sistema de menú que permite un manejo fácil e intuitivo del mismo.

Introducidos los parámetros de la experiencia, se puede comenzar la simulación. En la pantalla principal de la misma se observan y construyen en tiempo real con la simulación las gráficas de avance, velocidad, y aceleración en función del tiempo, las mismas se pueden ampliar seleccionando con el ratón el rectángulo que se desee observar.

Además cuenta con la posibilidad de ver las gráficas a pantalla completa, junto con la posibilidad de exportarlas, en formato de mapa de bits de Windows (BMP) o metaarchivo de Windows (WMF) para su posterior tratamiento.

Asimismo se puede consultar la tabla de valores de la experiencia, que se puede exportar para analizar con un programa externo.



ANÁLISIS DE LAS SIMULACIONES Y POSIBILIDADES DIDÁCTICAS

De la observación de simulaciones con diferentes parámetros se pueden obtener interesantes conclusiones respecto al papel de la fuerza de rozamiento y al equilibrio relativo de los cuerpos.

Cuando no existe rozamiento entre los cuerpos (1) y (2), el primero de ellos puede acelerar, y el segundo permanece estacionario hasta que cae por el borde izquierdo del primero. En cambio, si existiera fuerza de rozamiento entre ambos cuerpos, se produciría aceleración del cuerpo superior (2). Esto demuestra que el rozamiento entre los cuerpos es en este caso una fuerza aceleradora, lo cual es importante de establecer en un ejemplo concreto, dado que en la mayor parte de los casos estudiados, la fuerza de rozamiento aparece frenando o retardando el movimiento, lo cual suele llevar al alumno a generalizaciones incorrectas.

Otro aspecto que se puede analizar sobre la fuerza de rozamiento dinámica, es el referido al modelo utilizado, según el cual, la misma es independiente de la velocidad relativa entre los cuerpos en contacto. De acuerdo a este modelo, cuando se produce deslizamiento relativo entre los cuerpos (1) y (2), la aceleración del cuerpo superior es independiente de la del inferior. Observando la simulación, para valores muy pequeños y muy grandes de los cuerpos vinculados por la cuerda, se observa que el cuerpo superior (2) tiene siempre la misma aceleración, lo cual choca en cierto modo con el sentido común. Este hecho, que no surge con tanta evidente de la observación de las ecuaciones, se manifiesta nítidamente en la animación, y está mostrando la limitación del modelo ideal de rozamiento dinámico que se ha utilizado. Modelos más acercados a la realidad contemplan un aumento de la fuerza con la velocidad relativa y producirían variaciones en la aceleración del cuerpo superior, tal como se podría esperar intuitivamente.

Respecto al equilibrio dinámico, que en este caso sería equilibrio de traslación y de rotación del cuerpo (2) respecto al cuerpo (1), en este caso se planteó en relación con un sistema de referencia inercial, pero podría realizarse también respecto a un sistema de referencia no inercial, por ejemplo respecto al cuerpo (1) que tiene aceleración. Aparece entonces una fuerza de inercia hacia atrás y se pueden plantear las clásicas condiciones de equilibrio de un sólido, lo que llevaría a los mismos resultados. En la simulación, se pueden estudiar en forma cualitativa y cuantitativa las condiciones de equilibrio, variando los parámetros del sistema, y en particular las dimensiones relativas del cuerpo superior. Resulta llamativo observar el deslizamiento relativo sin vuelco de ese cuerpo, aún cuando es muy alto y con base muy angosta, cuando el coeficiente de rozamiento con el cuerpo inferior es muy pequeño. Posibilidades que brinda la simulación y que resultan muy difíciles de conseguir en experiencias de laboratorio.

Las posibilidades de aplicación del programa ya elaborado a la enseñanza, son múltiples. Desde un trabajo cualitativo hasta uno cualitativo, desde la posibilidad de usar uno hasta tres cuerpos, de considerar o no fuerzas de rozamiento, y de variar las dimensiones del cuerpo superior.

La propuesta general que se realiza para este tipo de simulaciones es la de plantear al alumno distintas situaciones problemáticas, que se deben analizar y resolver con ayuda de la simulación. Dichos problemas se deberán adaptar al nivel de enseñanza desarrollado y a los objetivos que se establezcan, y es conveniente que los alumnos trabajen en grupos, de manera colaborativa, con ayuda del docente. Se podrían mencionar algunos ejemplos de preguntas o consignas que se podrían plantear:

- ¿ Cómo se podría hacer para que el cuerpo (3) adquiera la aceleración de la gravedad?
- Obtenga una situación de equilibrio estático del sistema en situación límite: que ante un pequeño impulso o un ligero aumento de la masa del cuerpo (3) se acelere.
- Obtenga una situación de movimiento con los cuerpos (1) y (2) adheridos entre sí. Llegue a una situación límite de este equilibrio dinámico, de manera que ante un ligero aumento de la masa del cuerpo (3) se produzca un deslizamiento relativo de los cuerpos (1) y (2).
- Obtenga una situación límite como la del caso anterior, pero que ante un pequeño aumento de la masa de (3) se produzca el vuelco del cuerpo (2).
- ¿ Cómo haría para que los cuerpos (1) y (3) aceleren y que el cuerpo (2) permanezca inmóvil mientras en cuerpo (1) está debajo del mismo?.
- ¿ Hay algún cuerpo cuyo movimiento puede ser retardado por el rozamiento, y alguno que puede ser acelerado por el mismo?. Demuestre sus afirmaciones con las simulaciones correspondientes.
- Si entre los cuerpos (1) y (2) no hay rozamiento, y si lo hay entre el (2) y la superficie donde apoya: ¿ dependerá de la masa del cuerpo (2) la aceleración de los cuerpos (1) y (3)?.

Estas tareas, que han sido enunciadas de manera no exhaustiva, deben vincularse a un análisis teórico, en el que se analicen las gráficas de posición, velocidad y aceleración y los sistemas de fuerzas que condicionan la evolución del sistema. Es posible pedir también las soluciones de los problemas en forma cuantitativa, para ser comparadas con la solución que da la simulación.

BIBLIOGRAFIA

- BEDFORD, A. y FOWLER, W 1996 Estática mecánica para ingeniería (Addison Wesley – Estados Unidos)
- BEER, F., RUSSEL JHONSTON, E. 1990 Mecánica vectorial para ingenieros. Dinámica (Mc Graw – Hill)
- Mc KELVEY, J. y GROTCH, H. 1993 Física para ciencias e ingeniería, Vol 1 (HARLA – México)
- RESNICK, R., HALLIDAY D. y KRANE, K. 1996 Física, Vol 1 (CECSA – México)