LA PELOTA SIEMPRE AL 10

PROBLEMAS DEL FÚTBOL RESUELTOS CON MATEMÁTICA

MARILINA CARENA

UNIVERSIDAD NACIONAL DEL LITORAL

Marilina Carena
Licenciada en Matemática Aplicada. Doctora en Matemática. Profesora Adjunta (Facultad de Ingeniería Química, Universidad Nacional del Litoral). Investigadora Adjunta del CONICET. Directora y codirectora de diversos proyectos de investigación. Directora de tesis.
marilcarena@gmail.com

Carena, Marilina
La pelota siempre al 10 : problemas del fútbol resueltos con matemática / Marilina Carena. - 1a ed . - Santa Fe : Ediciones UNL, 2019.
Libro digital, PDF - (Diálogos. divulgación en ciencias y enseñanza)

Archivo Digital: descarga y online
ISBN 978-987-749-156-2

1. Matemática. I. Título.
CDD 510.712

Queda hecho el depósito que marca la Ley 11723.
Reservados todos los derechos.

Reservados todos los derechos

Producción editorial edicionesUNL
www.unl.edu.ar

Consejo Asesor de la Colección Cátedra
Daniel Comba, Ivana Tosti, Héctor Odetti, Bárbara Mántaras, Gustavo Martínez, Liliana Dillon

Dirección editorial
Ivana Tosti
Coordinación editorial
Ma. Alejandra Sedrán

© Marilina Carena, 2019.

© edicionesUNL
Secretaría de Planeamiento Institucional y Académico, Universidad Nacional del Litoral, Santa Fe, Argentina, 2019.

Facundo Zuviría 3563 (3000)
Santa Fe, Argentina
editorial@unl.edu.ar
www.unl.edu.ar/editorial

100 UNL UNIVERSIDAD NACIONAL DEL LITORAL

Enrique Mammarella · Rector
Daniel Comba · Director de Planeamiento y Gestión Académica
Ivana Tosti · Directora Ediciones UNL
Adrián Bonivardi · Decano Facultad de Ingeniería Química

La pelota siempre al 10

Problemas del fútbol resueltos con Matemática

MARILINA CARENA

COLECCIÓN
CÁTEDRA

Dedicado a Franco, mi jugador favorito

. . . .

COLABORARON CON LA REVISIÓN DE LOS TEXTOS
Estefanía Dalmasso, Sabrina Duarte,
Pamela Llop, Mauricio Ramseyer

Índice

Presentación

Cuando se siente, no hace falta entender... (El Bordo)

Al escuchar el relato de un partido de fútbol, rápidamente aparecen términos relacionados con la Matemática: promedios, porcentajes, estadísticas. Estas últimas son incluso utilizadas por los jugadores para aumentar las probabilidades de convertir un penal en gol.

El segundo tiempo es llamado “tiempo complementario”, ya que es el tiempo que falta jugar para llegar a los 90 minutos, al igual que ocurre con los “ángulos complementarios” que suman 90 grados. Y, hablando de esto, “la metió en el ángulo” es otra expresión frecuente.

En el diseño de la cancha aparecen figuras geométricas, como rectángulos y circunferencias. Lo mismo ocurre en el diseño de la pelota, cuya superficie se compone de pentágonos y hexágonos regulares.

En muchos torneos, como en la Copa del Mundo, compiten 32 equipos, de los cuales 16 llegan a octavos de final, 8 pasan a cuartos, 4 a la semifinal y solo 2 a la final, de la cual sale el único campeón. Todos estos números son potencias de 2. En todos los torneos que se definan mediante “llaves”, la cantidad de equipos que continúen participando al comenzar cada una debe ser de esta forma.

Como veremos a lo largo del libro, estos y muchos otros conceptos matemáticos están estrechamente relacionados con el fútbol. Por supuesto, estos no son necesarios para comprender un partido ni para jugarlo. Sin embargo, la analogía con el fútbol puede ayudar a verlos con mayor claridad y con mayor entusiasmo.

Para muchas personas la matemática resulta una disciplina “lejana”, debido a su lenguaje, simbología y abstracción. Poder realizar una traducción en términos matemáticos de problemas que involucran expresiones frecuentes del lenguaje futbolístico, resolver lo obtenido y traducir el resultado nuevamente al lenguaje coloquial, ayuda a cargar de sentidos concretos los conceptos trabajados. El material es un complemento para el docente que desee motivar o aplicar diversos conceptos matemáticos a través de este deporte.

Este texto reúne 74 problemas resueltos, en los cuales se abordan conceptos matemáticos pertenecientes a áreas y niveles muy diversos, generados por situaciones referidas al fútbol. Las soluciones están explicadas paso a paso y, en algunos casos, se dejan planteados ejercicios similares a los trabajados. Así, entre problemas resueltos y ejercicios, este material contiene 100 desafíos relacionados con el fútbol cuya solución es puramente matemática.

Cabe mencionar que los conocimientos sobre fútbol que se requieren para resolver los problemas planteados son completamente desarrollados en el texto. De esta forma, estos problemas pueden ser utilizados también por aquellos docentes de Matemática que deseen aprovechar la pasión que despierta este deporte en muchas personas, como "excusa" para fijar e integrar los conceptos trabajados en clases, sin necesidad de estar familiarizados con la terminología y desarrollo de un partido de fútbol.

Se agradecen los comentarios y sugerencias del Dr. Néstor Aguilera y, sobre todo, su gran apoyo hacia esta iniciativa.

La tabla de posiciones

Y dedico al maestro, una vuelta más... (El Bordo)

Áreas o conceptos trabajados: lenguaje matemático; números enteros y decimales; fracciones; ecuaciones; inecuaciones.

Los puntos

En la tabla de posiciones se consideran varios valores. El primero, y más importante, es la cantidad de puntos conseguidos por cada equipo. Para determinar esta cantidad se utiliza el siguiente criterio: se otorgan 3 puntos por cada partido ganado, 1 punto por cada empate, y ningún punto por cada partido perdido. La fórmula para la cantidad de puntos obtenidos es, entonces,

$$\text{Puntos} = 3 \cdot G + 1 \cdot E + 0 \cdot P = 3G + E,$$

siendo G la cantidad de partidos ganados, E la de empatados, y P la de perdidos. Los puntos se acumulan durante todos los partidos del torneo, el cual se divide en "fechas". Cada equipo juega un partido por fecha. El equipo que más puntos obtiene al finalizar el torneo resultará el campeón del mismo.

Problema 1. Un equipo obtuvo 35 puntos en un torneo, habiendo empatado el doble de veces de las que ganó. ¿Cuántos partidos ganó y cuántos empató?

Solución. Por la fórmula de arriba, sabemos que la cantidad de puntos obtenidos, en este caso 35, se obtiene como

$$35 = 3G + E.$$

Pero también se sabe que el equipo empató el doble de veces de las que ganó, lo que se traduce matemáticamente como $E = 2G$. Reemplazando esta cantidad en la igualdad anterior, nos queda

$$35 = 3G + 2G.$$

Al resolver se obtiene $35 = 5G$, lo que conduce a $G = 35/5 = 7$. Es decir, el equipo ganó 7 partidos y, por lo tanto, empató 14.

Se puede corroborar que este resultado es correcto calculando la cantidad de puntos que esto otorga: $3 \cdot 7 + 14 = 21 + 14 = 35$.

Problema 2. Al finalizar un torneo, se sabe que la cantidad de partidos ganados por un determinado equipo supera en 1 al doble de la cantidad de partidos empatados por el mismo. Determinar estas cantidades sabiendo que dicho equipo obtuvo un total de 52 puntos.

Solución. En este caso se tiene que

$$52 = 3G + E.$$

Con la misma idea utilizada en el problema anterior, expresemos ahora la cantidad de partidos ganados en términos de los empatados. Traduciendo la información dada en el problema al lenguaje matemático, tenemos que

$$G = 2E + 1.$$

Reemplazando esta cantidad en la primera igualdad se obtiene que

$$52 = 3(2E + 1) + E.$$

Para resolver esta ecuación aplicamos primero la propiedad distributiva del producto respecto de la suma y la asociativa de la suma:

$$52 = 6E + 3 + E = 7E + 3,$$

por lo que $52 - 3 = 7E$. Entonces $E = 49/7 = 7$. Es decir, el equipo empató 7 partidos, y ganó $G = 2E + 1 = 14 + 1 = 15$.

Como antes, podemos verificar si esta solución es correcta contando la cantidad de puntos que esta situación arroja:

$$\text{Puntos} = 3 \cdot 15 + 7 = 45 + 7 = 52.$$

Ejercicio 1. Determinar la cantidad de partidos ganados y empatados por un equipo que obtuvo 40 puntos en un torneo, sabiendo que a lo largo del mismo empató la tercera parte de las veces que ganó.

Problema 3. En un torneo de 25 fechas, ¿cuántos partidos debe ganar, como mínimo, un equipo para alcanzar 46 puntos?

Solución. Comencemos razonando de la siguiente forma: ¿es posible alcanzar 46 puntos ganando solamente un partido? No, porque, en el mejor de los casos, empataría los otros 24, obteniendo así $3 + 24 = 27$ puntos. ¿Y ganando solamente 2? Nuevamente no alcanza ya que, en el mejor de los casos, obtendría $3 \cdot 2 + 23 = 29$ puntos. Entonces, siguiendo de esta forma, buscamos G (la cantidad de partidos ganados) tal que

$$3G + (25 - G) \geq 46.$$

Resolvamos esta inecuación:

$$\begin{aligned} 2G &\geq 46 - 25, \\ 2G &\geq 21, \\ G &\geq 10.5. \end{aligned}$$

En lo anterior, como a lo largo de todo el libro, se usará el punto como signo separador de los decimales (en lugar de una coma). Esto significa que debe ganar, al menos, 11 partidos. Notar que la cantidad buscada debe ser entera y mayor o igual que 10.5, por eso es 11 partidos en lugar de 10. En efecto, ganar 10 partidos no alcanza ya que, en el mejor de los casos, empataría los otros 15 y los puntos serían $30 + 15 = 45$.

La diferencia de goles

Cuando dos o más equipos poseen la misma cantidad de puntos, hay otra variable que aparece en la tabla de posiciones: la *diferencia de goles*, que denotaremos con la letra D. El valor de esta variable se calcula, como es de esperar, haciendo la diferencia

$$D = G_F - G_C,$$

siendo G_F la cantidad de goles a favor (es decir, los que cuentan a favor del equipo), y G_C la cantidad de goles en su contra (que son los que cuentan a favor del equipo contrario), contando todos los goles convertidos a lo largo del torneo.

Si un equipo convirtió la misma cantidad de goles que los que le convirtieron, entonces $D = 0$. Cuando D es mayor que cero, significa que el equipo ha convertido más goles que los que le convirtieron, pero si no lo es, significa que los goles a favor son menos que los goles en contra. Es aquí donde aparecen los números enteros negativos.

Por ejemplo, supongamos que el Equipo A convirtió 26 goles a favor a lo largo del torneo, y le convirtieron 19. Entonces, la diferencia de goles para este equipo es $D = 26 - 19 = +7$ (o simplemente 7). Por otro lado, si el Equipo B convirtió 17 goles a favor pero le convirtieron 29 en su contra, entonces la diferencia de goles para este equipo será $D = 17 - 29 = -12$.

Esta cantidad, ubicada en general en la última columna de la tabla de posiciones, ayuda a desempatar cuando dos o más equipos tienen la misma cantidad de puntos, ordenándolos de mayor a menor, según la diferencia de goles.

Problema 4. Supongamos que un equipo convirtió 32 goles a favor durante todo el torneo. ¿Cuántos goles en su contra recibió, si la diferencia de goles es igual a 17? ¿Y si la diferencia fuera igual a -17?

Solución. Para este equipo sabemos que la diferencia de goles correspondiente es $D = 17$, y que esta cantidad se obtiene haciendo $32 - G_C$, siendo G_C la cantidad de goles recibidos. Es decir, debemos despejar G_C en la igualdad

$$17 = 32 - G_C.$$

Operando se obtiene

$$G_C = 32 - 17 = 15,$$

lo que significa que el equipo recibió 15 goles en su contra. Similarmente, para el otro caso planteamos

$$-17 = 32 - G_C,$$

por lo que

$$G_C = 32 - (-17) = 32 + 17 = 49.$$

Como era de esperar, ya que en este caso la diferencia de goles es negativa, la cantidad de goles en su contra es mayor que la cantidad de goles a favor.

Problema 5. A lo largo de un torneo, a cierto equipo le convirtieron en su contra la tercera parte de los goles que convirtió a su favor. Hallar estas cantidades sabiendo que la diferencia de goles es igual a 16.

Solución. El dato indica que la diferencia de goles es 16, es decir,

$$16 = G_F - G_C.$$

Pero también se sabe que la cantidad de goles a favor del equipo es el triple de la cantidad de goles en su contra, esto es, $G_F = 3G_C$. Reemplazando esta cantidad en la igualdad anterior, nos queda:

$$16 = 3G_C - G_C.$$

Operando se obtiene $16 = 2G_C$, lo que implica $G_C = 8$. Esto significa que el equipo terminó el torneo con 8 goles en contra y, por lo tanto, 24 goles a favor.

Ejercicio 2. Un equipo convirtió a lo largo de un torneo la cuarta parte de goles de los que le convirtieron. Hallar estas cantidades sabiendo que la diferencia de goles es igual a -24.

Problema 6. Supongamos que se está por jugar la última fecha del torneo, en la que se enfrentan los equipos A y B que se disputan la punta de la tabla. La situación, antes de jugarse dicha fecha, es la siguiente:

	Puntos	Diferencia de goles
Equipo A	38	+18
Equipo B	35	+14

¿Por cuánta diferencia de goles le debe ganar el Equipo B al Equipo A, para quedar igualados en ambas columnas de la tabla anterior? Seleccionar la opción correcta:

☐ 2 ☐ 4 ☐ 8

Solución. Supongamos que en la última fecha el Equipo B le gana al Equipo A por x goles de diferencia. Es decir, si el Equipo A convierte 2 goles, el Equipo B convierte $2+x$, si el Equipo A convierte 3 goles, el B convierte $3+x$, y así. De formal general, como no sabemos el resultado final pero sí la diferencia de goles (la que llamamos x), digamos que el partido termina con g goles convertidos por el Equipo A, y con $g+x$ goles convertidos por el Equipo B.

Entonces, ahora los 2 equipos tienen 38 puntos, por lo que la primera columna está igualada. Analicemos qué valor debe tomar x para que la segunda columna también lo esté. Para ello, actualizamos la diferencia de goles para cada equipo, con el resultado obtenido en la última fecha. Esta será:

$$\text{Diferencia de goles anterior} + \text{Diferencia última fecha.}$$

Así, en la tabla actualizada quedará:

$$\text{Diferencia de goles para el Equipo A: } 18 + \underbrace{g - (g+x)}_{=-x} = 18 - x,$$

$$\text{Diferencia de goles para el Equipo B: } 14 + \underbrace{(g+x) - g}_{=x} = 14 + x.$$

Luego, buscamos x tal que estas dos cantidades sean iguales:

$$18 - x = 14 + x,$$

es decir,

$$18 - 14 = 2x,$$

de lo que se obtiene $4 = 2x$, cuya solución es $x = 2$. Entonces, el Equipo B debe ganar por 2 goles de diferencia para quedar exactamente igual al Equipo A en la tabla según estos dos parámetros. Por ejemplo, los resultados de la última fecha podrán ser: 2 a 0, 3 a 1, 4 a 2, 5 a 3, etc.

El gol de visitante

La frase "el gol de visitante vale doble" es frecuente entre los seguidores y relatores de fútbol. Esta expresión se refiere a un método para determinar el ganador de una eliminatoria que consta de partido de ida y partido de vuelta, la cual se encuentra empatada.

Aclaremos esto para quienes no conocen este sistema. Ciertas eliminatorias constan de lo que se conoce como "partidos de ida y vuelta". Esto significa que dos equipos juegan dos partidos, uno como local y otro como visitante. Estos dos partidos pueden verse como 2 tiempos de un gran partido, en el sentido que los goles convertidos por cada equipo en cada partido se suman, dando lo que se conoce como "resultado global". Por supuesto, esta visión es solamente necesaria en el caso que un equipo gane el partido de ida, y el otro gane el de vuelta. En otro caso, no hay nada que pensar: si un equipo gana ambos partidos, o gana uno y empata el otro, será el ganador. Pero supongamos que el Equipo A le gana al Equipo B en el primer partido (partido de ida) por 3 tantos contra 1, y que en el segundo partido (el de vuelta) pierde 2 a 1. El resultado global es, entonces, 4 goles a favor del Equipo A, y 3 a favor del Equipo B, por lo que el Equipo A resulta el ganador de la llave.

Sin embargo, puede ocurrir que este resultado global quede empatado, es decir, que ambos equipos sumen la misma cantidad de goles. Es en este caso cuando se utiliza el método de desempate que establece que, solo en caso de igualdad en el resultado global, el gol de visitante vale doble. Si aún así el resultado sigue igual, se recurre a tiempo suplementario ("alargue") o a penales. Este sistema se aplica, por ejemplo, en las llaves de la Copa Libertadores y la Copa Sudamericana, excepto en la final.

Veamos unos ejemplos para aclarar. Como es usual, el equipo local es el que aparece a la izquierda en el marcador:

$$\left.\begin{array}{rl} \text{Ida:} & \text{Equipo A}\,\boxed{3}\quad\boxed{1}\,\text{Equipo B}\\ \text{Vuelta:} & \text{Equipo B}\,\boxed{4}\quad\boxed{2}\,\text{Equipo A}\end{array}\right\}\to \text{Global } 5-5\text{, gana Equipo A.}$$

La razón por la que el Equipo A resulta ganador es porque, al estar igualados en el marcador, el gol de visitante vale doble, por lo que el Equipo A contabiliza 7 goles, mientras que el Equipo B contabiliza 6. En cambio, en el siguiente ejemplo, la situación es diferente:

$$\left.\begin{array}{rlcr} \text{Ida:} & \text{Equipo A}\ \boxed{3} & \boxed{1}\ \text{Equipo B} \\ \text{Vuelta:} & \text{Equipo B}\ \boxed{2} & \boxed{0}\ \text{Equipo A} \end{array}\right\} \rightarrow \text{Global } 3-3, \text{ gana Equipo B.}$$

Problema 7. Considerar los siguientes resultados en una eliminatoria de ida y vuelta:

$$\begin{array}{rlrrl} \text{Ida:} & \text{Equipo A} & \boxed{3} & \boxed{2} & \text{Equipo B} \\ \text{Vuelta:} & \text{Equipo B} & \boxed{x+1} & \boxed{x} & \text{Equipo A} \end{array}$$

Determinar los posibles valores de x para los cuales el Equipo A resulta ganador según el criterio del gol de visitante.

Solución. Observemos primero que, para cualquier valor de x, el resultado global será un empate, con $3+x$ goles para cada equipo. Luego, el criterio del gol de visitante establece que los goles para cada equipo son:

$$\text{Equipo A: } 3+2x; \qquad \text{Equipo B: } 4+x+1=5+x.$$

Entonces, buscamos x tal que

$$3+2x>5+x.$$

Resolviendo esta inecuación se obtiene $x>2$. ⚽

Problema 8. Considerar los siguientes resultados en una eliminatoria de ida y vuelta:

$$\begin{array}{rlrrl} \text{Ida:} & \text{Equipo A} & \boxed{5} & \boxed{3} & \text{Equipo B} \\ \text{Vuelta:} & \text{Equipo B} & \boxed{x+2} & \boxed{x} & \text{Equipo A} \end{array}$$

Determinar los valores de x para los cuales el Equipo A resulta ganador según el criterio del gol de visitante.

Solución. Para cualquier valor de x, el resultado global será un empate, con $5+x$ goles para cada equipo. Luego, el criterio del gol de visitante establece que los goles para cada equipo son:

$$\text{Equipo A: } 5+2x; \qquad \text{Equipo B: } 6+x+2=8+x.$$

Entonces buscamos x tal que

$$5+2x>8+x.$$

Resolviendo esta desigualdad se obtiene $x>3$. ⚽

Como puede observarse en los problemas y ejemplos anteriores, el criterio que establece que “en caso de igualdad, el gol de visitante vale doble” es equivalente a decir que “de subsistir la igualdad, la posición se definirá a favor del club con mayor cantidad de goles a favor actuando como visitante”, tal como lo indica la Conmebol en sus reglamentos correspondientes a las copas Libertadores y Sudamericana.

El descenso

Cantando a pesar de las llamas... (NTVG)

Áreas o conceptos trabajados: promedios; ecuaciones; inecuaciones; regla de tres simple; porcentajes; números racionales; redondeo.

Otra columna, tan importante en la Primera División del fútbol argentino como la de los puntos, es la correspondiente a los promedios*. En esta columna se ubica un número muy temido, que corresponde al promedio de los puntos obtenidos en los torneos de las últimas 3 temporadas en Primera División (cada temporada dura un año, y actualmente comienza a mitad de año y termina a mitad del siguiente), es decir, el total de puntos obtenidos en las dos temporadas anteriores más los obtenidos en la temporada actual. Este número se obtiene mediante el cociente P/P_j, siendo P la cantidad total de puntos acumulados y P_j la cantidad de partidos jugados en estas 3 temporadas (los equipos recientemente ascendidos tendrán menos partidos jugados que el resto).

Por ejemplo, si el Equipo A obtuvo 129 puntos en 87 partidos**, su promedio será 129/87, lo que arroja un valor aproximado de 1.483. Redondearemos los promedios de modo que posean 3 cifras decimales (ya que así aparecen usualmente en las tablas). Para denotar esto, escribimos

$$129/87 \approx 1.483,$$

donde el símbolo $\approx$ significa "aproximadamente", e indica que hemos redondeado para reducir la cantidad de cifras decimales. Si no se indica la cantidad de cifras, el redondeo se hace, en general, a una o dos cifras decimales, según el contexto.

*Se implementó por primera vez en Argentina en 1957, y su uso fue luego suspendido por 20 años a partir de 1963.

**En un torneo con 30 equipos en el que cada uno juega una vez con los restantes (es decir, una sola rueda por el sistema de todos contra todos), la cantidad total de partidos en 3 temporadas es 87.

Estos valores se ordenan en forma decreciente, y los equipos con menor promedio al finalizar cada temporada descienden a la B Nacional (actualmente descienden los últimos 4, pero esta cantidad puede variar según las decisiones de la AFA). En caso de igualdad *real* en el promedio (es decir, que no sea producida por el redondeo), se juega un partido de desempate.

Problema 1. Supongamos que la situación, faltando 15 fechas para finalizar el torneo y habiendo jugado 72 partidos cada equipo, es la siguiente: los últimos 4 equipos en la tabla de promedios tienen, respectivamente, 83, 78, 77 y 72 puntos. Supongamos también que el Equipo X tiene 106 puntos, y la misma cantidad de partidos. Finalmente, para simplificar los cálculos, vamos a suponer que los 5 equipos mencionados ya jugaron los partidos entre sí. Es decir, en los 15 partidos restantes, ninguno de estos 5 equipos se enfrentarán.

(a) ¿Qué cantidad mínima de puntos deberá obtener el Equipo X para estar seguro *matemáticamente* de que no descenderá al finalizar el torneo?

(b) ¿Qué porcentaje de los puntos en juego representa esto?

(c) ¿Cuántos partidos debe ganar, como mínimo, para obtener esta cantidad de puntos?

Solución. Ilustremos la situación con una tabla, asignando nombres a los equipos:

Equipo	P	P_j	PROM
$\vdots$			
X	106	72	1.472
$\vdots$			
A	83	72	1.153
B	78	72	1.083
C	77	72	1.069
D	72	72	1

(a) Para estar seguros matemáticamente, aunque esto pueda estar lejos de la realidad, hay que contemplar cuál sería el peor panorama posible que debe enfrentar el Equipo X. Esto equivale a suponer el mejor resultado posible para los últimos 4 equipos en la tabla de promedios: ganar las 15 fechas restantes (como dijimos, aunque raramente ocurra, es matemáticamente posible). En tal caso, los promedios de estos 4 equipos serán:

$$\begin{aligned}
&\text{Equipo A: } (83+45)/87 = 128/87,\\
&\text{Equipo B: } (78+45)/87 = 123/87,\\
&\text{Equipo C: } (77+45)/87 = 122/87,\\
&\text{Equipo D: } (72+45)/87 = 117/87.
\end{aligned}$$

Luego, si denotamos con x a la cantidad de puntos que debe obtener el Equipo X en las 15 fechas restantes para estar matemáticamente seguros de no descender, x debe satisfacer

$$(106+x)/87 > 128/87,$$

para no entrar de esta forma dentro de los últimos 4 promedios calculados. Debemos despejar x en la inecuación anterior, la cual equivale a:

$$106+x > 128,$$

lo que implica

$$x > 128-106.$$

El resultado es, entonces, $x > 22$. Esto significa que el Equipo X deberá obtener al menos 23 puntos. Obteniendo menos de 23, ya no dependerá de sí mismo sino que deberá estar atento a otros resultados.

(b) Puesto que hay 45 puntos en juego, el Equipo X deberá obtener aproximadamente el 51 % de los puntos (poco más de la mitad). Este número se obtuvo mediante la aplicación de la regla de tres simple:

$$\left.\begin{array}{ccc} 45 & \longrightarrow & 100 \\ 23 & \longrightarrow & x \end{array}\right\} \Longrightarrow x = \frac{23\cdot 100}{45} \approx 51.11.$$

(c) Razonemos de la siguiente forma: ¿puede no ganar ningún partido? No, porque, en el mejor de los casos, empataría los 15, y de esta forma no llegaría a los 23 puntos. ¿Puede ganar solamente un partido? Tampoco, porque, nuevamente en el mejor de los casos, si gana uno y empata los otros 14 partidos, los puntos obtenidos serán 17. Tampoco alcanza. Siguiendo el mismo razonamiento, la cantidad G de partidos ganados debe satisfacer:

$$3G+(15-G) \geq 23,$$

lo que implica $G \geq 4$. Es decir, debe ganar al menos 4 partidos para obtener 23 puntos.

Ejercicio 3. Bajo los mismos supuestos que en el problema anterior, resolver las mismas consignas para el Equipo Y que tiene 110 puntos, y para el Equipo Z que tiene 94.

Como mencionamos antes, a veces lo “matemáticamente” posible se aleja mucho de lo “realmente” posible. Por ejemplo, es difícil pensar que un equipo que venga con un bajo rendimiento gane de repente las 15 fechas siguientes. Por otra parte, a veces un equipo sumó muchos puntos (o muy pocos) en los 2 torneos anteriores, pero el plantel de dicho equipo que participa en el torneo actual es muy diferente al que participó en ellos (en Argentina el mercado de pases suele ser muy activo).

Una forma de acercarse entonces a la realidad, para poder obtener un panorama más concreto, es tener en cuenta la “tendencia” del equipo en el torneo actual, y realizar a partir de ella una “proyección” acerca del posible rendimiento en las fechas restantes*. Así, por ejemplo, supongamos que de 106 puntos que obtuvo el Equipo X en 72 partidos, 81 corresponden a los torneos anteriores y 25 fueron obtenidos en las 14 fechas jugadas en el torneo actual. En 14 fechas hay $14 \cdot 3 = 42$ puntos en juego, lo que significa que el Equipo X obtuvo casi un 59.5 % de los puntos disputados hasta el momento en el torneo actual. Este valor puede calcularse nuevamente mediante regla de tres simple como:

$$\left.\begin{array}{ccc} 42 & \longrightarrow & 100 \\ 25 & \longrightarrow & x \end{array}\right\} \Longrightarrow x = \frac{25 \cdot 100}{42} \approx 59.5.$$

Llamaremos a este valor el *porcentaje de efectividad actual*, y lo denotaremos como *PEA*. A partir de este concepto, definimos como *puntos esperados* a los obtenidos según el PEA, aplicado a los puntos que quedan en juego (redondeando al entero más cercano porque estamos trabajando con puntos, los cuales deben ser siempre números enteros no negativos). Además, definimos el *promedio esperado* sumando los puntos esperados a los ya obtenidos, y dividiendo el resultado por el total de partidos.

Para ilustrar estos conceptos, volvamos al Equipo X. Si continúa con esta tendencia, se podría suponer que obtendrá el 59.5 % de los 45 puntos que están en juego en las próximas 15 fechas, lo que corresponde aproximadamente a 27 puntos (pues $59.5 \cdot 45/100 = 26.775$), terminando así con un promedio esperado de

$$\text{Promedio esperado} = (106 + 27)/87 \approx 1.529.$$

Notar que los puntos esperados pueden obtenerse, también, sin necesidad de calcular el PEA, mediante regla de tres simple. Por ejemplo,

*Por supuesto, esto sigue siendo una estimación, ya que existen muchos factores que pueden cambiar esta tendencia: nivel de equipos restantes, lesiones, expulsiones, etc.

para el caso anterior, teniendo en cuenta que el equipo obtuvo 25 puntos de los 42 jugados, y que se desea estimar cuántos puede obtener de los 45 en juego, suponiendo siempre que siga con la misma tendencia, será:

$$\left.\begin{array}{ccc} 42 & \longrightarrow & 25 \\ 45 & \longrightarrow & x \end{array}\right\} \Longrightarrow x = \frac{45 \cdot 25}{42} \approx 26.79,$$

que, redondeando al entero más cercano, coincide con los 27 puntos esperados hallados anteriormente mediante el PEA.

Problema 2. Completar la siguiente tabla, suponiendo que en 2019 se jugaron 14 fechas. Calcular el promedio esperado (PE) para cada equipo al finalizar el torneo 2019*, suponiendo que faltan 15 fechas por jugar y que cada equipo obtiene los puntos indicados según su porcentaje de efectividad actual.

Equipo	2017	2018	2019	Pts	P_j	PROM	PEA	PE
⋮								
X	48	33	25	106	72	1.472	59.5	1.529
⋮								
A	31	32	20	83	72	1.153		
B	27	27	24	78	72	1.083		
C	29	38	10	77	72	1.069		
D	27	26	19	72	72	1		

Solución. Para calcular el porcentaje de efectividad actual de cada equipo, dividimos como antes la cantidad de puntos obtenidos en 2019 por los puntos en juego en las 14 fechas, es decir, 42. Luego multiplicamos el valor obtenido por 100. Los resultados aproximados son los siguientes:

Equipo A: 47.6 %,

Equipo B: 57.1 %,

Equipo C: 23.8 %,

Equipo D: 45.2 %.

*En Argentina los torneos se juegan, actualmente, desde la mitad de un año hasta la mitad del año siguiente, por lo que lo correcto sería “torneo 2018-19”.

Si siguen de esta manera, y teniendo en cuenta que en las 15 fechas restantes hay 45 puntos en juego, puede esperarse que obtengan:

Equipo A: 21 puntos,

Equipo B: 26 puntos,

Equipo C: 11 puntos,

Equipo D: 20 puntos.

Luego, acumulando cada una de estas cantidades a los puntos totales obtenidos por cada equipo, y dividiendo luego por 87 (cantidad total de partidos al finalizar el torneo), se obtienen los siguientes promedios esperados:

Equipo A: 1.195,

Equipo B: 1.195,

Equipo C: 1.011,

Equipo D: 1.057.

En este caso, los promedios esperados para los equipos A y B coinciden, y no es debido al redondeo en dicho cálculo, ya que se espera que ambos equipos terminen con 104 puntos. Por supuesto que esta cantidad sí fue afectada por los redondeos efectuados en el cálculo del PEA y de los puntos esperados a partir de él, pero, de todas formas, estamos simplemente realizando estimaciones.

Ejercicio 4. Hallar el promedio esperado según el porcentaje de efectividad actual de los equipos Y y Z del Ejercicio 3, sabiendo que en las 14 fechas del 2019 obtuvieron 29 y 33 puntos, respectivamente.

Continuamos trabajando estos conceptos en el siguiente problema, en el que suponemos que el torneo ha avanzado 7 fechas más. Mantendremos el supuesto de que cada torneo tiene 29 fechas.

Problema 3. Supongamos ahora la siguiente situación: 21 fechas jugadas del torneo actual y 8 restantes por jugar.

(a) Hallar el PEA y la cantidad de puntos esperados al final del torneo por un equipo que tiene 22 puntos en el torneo actual.

(b) Hallar la cantidad de puntos que obtuvo un equipo en las 21 fechas sabiendo que su PEA es del 32 %.

(c) Determinar la cantidad de puntos que debe tener un equipo en el torneo actual para que los esperados en las fechas restantes sean 13.

(d) Si un equipo tiene 30 puntos en el torneo actual, determinar cuántos puntos debe obtener en las fechas restantes para que su PEA se transforme en 54 % al terminar el torneo.

(e) El Equipo Y tiene hasta el momento 119 puntos acumulados en los 3 torneos (en 79 partidos). Determinar cuántos puntos obtuvo en el torneo actual sabiendo que el PEA indica que terminará el torneo con un promedio aproximado de 1.563.

Solución. Para todos los incisos tendremos en cuenta que en las 21 fechas disputadas hubo 63 puntos en juego, y que en las 8 restantes quedan 24 puntos.

(a) Para hallar el PEA, hacemos

$$\frac{22 \cdot 100}{63} \approx 35.$$

Para la cantidad de puntos esperados al final del torneo, podemos calcular el 35 % de los 24 que hay en juego, obteniendo como resultado 8.4. De esta forma, se puede esperar que el equipo finalice el torneo con $22 + 8 = 30$ puntos.

(b) Recurrimos a la regla de tres simple, teniendo en cuenta que el 100 % de los puntos es 63:

$$\left.\begin{array}{rcc} 100 & \longrightarrow & 63 \\ 32 & \longrightarrow & x \end{array}\right\} \Longrightarrow x = \frac{32 \cdot 63}{100} = 20.16,$$

lo que significa que el equipo obtuvo 20 puntos en 21 fechas.

(c) Obtener 13 puntos de los 24 en juego equivale a decir que obtendrá aproximadamente el 54.2 % de los puntos en juego, pues:

$$\left.\begin{array}{rcc} 24 & \longrightarrow & 100 \\ 13 & \longrightarrow & x \end{array}\right\} \Longrightarrow x = \frac{13 \cdot 100}{24} \approx 54.2.$$

Entonces, ahora procedemos como en el inciso anterior: debemos calcular el 54.2 % de los puntos jugados, que son 63. Esto arroja, redondeando a un entero, un valor de 34 puntos.

(d) La cantidad total de puntos en juego en el torneo es $29 \cdot 3 = 87$. Para que el PEA sea igual a 54 % al terminar el torneo, el equipo debe terminar con el 54 % de los puntos totales, es decir, con 47 puntos. Esto significa que debe sumar 17 puntos en las 8 fechas restantes.

(e) Llamemos x a la cantidad de puntos que se espera que el Equipo Y obtenga en las 8 fechas restantes. El dato establece que

$$\frac{119 + x}{87} = 1.563,$$

pues así se calcula el promedio al finalizar el torneo. Despejando y redondeando, se obtiene $x = 17$. En otras palabras, se espera que el equipo obtenga 17 puntos de los 24 que hay en juego, lo que representa casi un 70.83 % de ellos. Este es el PEA del equipo, lo que significa que en el torneo actual obtuvo este porcentaje de los 63 puntos jugados, es decir, obtuvo 45 puntos (como siempre, hemos redondeado al entero más cercano).

Ejercicio 5. Supongamos que el Equipo Z tiene hasta el momento 103 puntos acumulados en los 3 torneos (en 79 partidos), habiéndose jugado 21 fechas del torneo actual y faltando 8 para finalizarlo. Determinar cuántos puntos obtuvo en el torneo actual sabiendo que el PEA indica que terminará el torneo con un promedio de 1.299.

Problema 4. (Promedio de promedios) Supongamos que el Equipo X jugó 19 partidos, obteniendo un promedio igual a 1.750 en los primeros 12, y un promedio aproximado de 1.143 en los últimos 7 partidos. ¿Cuál es el promedio de los 19 partidos?

Solución. Para obtener el promedio de los 19 partidos es necesario “recuperar” los puntos totales obtenidos, a partir de los datos dados. Llamemos P_1 a la cantidad de puntos obtenidos en los primeros 12 partidos. El dato indica que

$$\frac{P_1}{12} = 1.750,$$

de lo que se deduce que $P_1 = 1.750 \cdot 12 = 21$. Luego, el Equipo X obtuvo 21 puntos en los primeros 12 partidos. De la misma forma podemos calcular los puntos que obtuvo en los últimos 7 partidos: si llamamos P_2 a esta cantidad, el dato establece que

$$\frac{P_2}{7} \approx 1.143,$$

por lo que $P_2 \approx 1.143 \cdot 7 = 8.001$. Es decir, el Equipo X consiguió 8 puntos en los últimos 7 partidos. Por lo tanto, la cantidad de puntos obtenidos por el Equipo X durante los 19 partidos es igual a $21 + 8 = 29$. Con esto podemos calcular el promedio de puntos de los 19 partidos como

$$\frac{29}{19} \approx 1.526.$$

Observación: un error frecuente en este tipo de problemas es calcular el promedio de los 19 partidos haciendo el “promedio de los promedios” como

$$\frac{1.750 + 1.143}{2} = 1.4465.$$

Notar que un error como este puede cambiar considerablemente la situación de un equipo al momento de determinar su permanencia en la categoría.

Problema 5. Como en el problema anterior, supongamos que el Equipo X jugó 19 partidos y obtuvo un promedio igual a 1.750 en los primeros 12. ¿Qué promedio obtuvo en los últimos 7, si el promedio (redondeado a 3 cifras decimales) de los 19 partidos es 1.842?

Solución. En la resolución del problema anterior calculamos que el Equipo X consiguió 21 puntos en los primeros 12 partidos. Denotemos, como antes, con P_2 a la cantidad total de puntos obtenidos en los últimos 7 partidos. Sabemos que

$$\frac{21 + P_2}{19} = 1.842.$$

Esto nos permite calcular P_2 como

$$P_2 = 1.842 \cdot 19 - 21 = 13.988.$$

Esto significa que el total de puntos obtenidos en los últimos 7 partidos es igual a 14 (debemos redondear al entero más cercano, ya que estamos hablando de puntos). Luego, el promedio de puntos en dichos partidos es igual a $14/7 = 2$.

Ejercicio 6. La situación es la siguiente: el Equipo Y jugó hasta el momento 14 partidos obteniendo en ellos un promedio aproximado de 1.286. Luego, el equipo jugó 5 partidos más.

(a) Determinar la cantidad de puntos que el Equipo Y acumuló en los primeros 14 partidos.

(b) Calcular el promedio de puntos de los 19 partidos, sabiendo que el promedio de los últimos 5 es igual a 0.8.

(c) ¿Cuál debió ser el promedio de puntos de los últimos 5 partidos, para que el de los 19 sea 1.421?

El campo de juego

Batallar, cualquiera sea el escenario... (El Bordo)

Áreas o conceptos trabajados: geometría plana; fracciones; cambio de escala; regla de tres simple; trigonometría.

El campo de juego, también llamado "cancha", es un rectángulo con ciertas características, el cual contiene a su vez otras figuras planas simples: rectángulos más pequeños, círculos[*] y semicírculos. Las dos líneas de marcación más largas se denominan *líneas de banda*. Las dos más cortas son las *líneas de meta*. El terreno de juego está dividido en dos mitades por una línea que une los puntos medios de las dos líneas de banda, llamada *línea media*. En el centro de la cancha, justo en el punto medio de la línea media, hay un círculo con centro allí y con un radio de 9.15 metros (esta medida, que parece tan poco natural, proviene del equivalente a 10 yardas en metros, redondeado hacia arriba), que recibe el nombre de *círculo central*. Todas estas líneas dentro del rectángulo, ilustradas en la Figura 1, cumplen una función específica.

Es un comentario frecuente entre los simpatizantes del fútbol el hecho que una cancha es más grande que otra. ¿Por qué hay canchas de fútbol más grandes que otras? ¿Existen medidas oficiales definidas? Sí, existen medidas oficiales, pero tienen cierta flexibilidad. En primer lugar, hay que remarcar que la FIFA señaló en su reglamento oficial[**] que ante todo la cancha debe ser rectangular, siendo la longitud de la línea de banda superior a la longitud de la línea de meta. En cuanto a la longitud de estas dos líneas, el reglamento de la FIFA en su Regla 01 establece un máximo y un mínimo para ellas:

[*] Lo correcto es hablar de circunferencias, pero utilizaremos en esta sección la palabra círculo, tal como aparece en los reglamentos.

[**] El documento "Reglas del Juego 2017/18" puede descargarse en el enlace llamado "Documentos oficiales" del sitio web de la FIFA. Las imágenes de esta sección pertenecen a la versión 2015/16 de este documento.

Figura 1: Campo de juego.

	Línea de Banda	Línea de Meta
Longitud mínima	90 m	45 m
Longitud máxima	120 m	90 m

Para partidos internacionales estas medidas se ajustan un poco más, estableciendo los siguientes rangos:

	Línea de Banda	Línea de Meta
Longitud mínima	100 m	64 m
Longitud máxima	110 m	75 m

Así, según la FIFA, la medida mínima de un campo de juego para partidos locales es 45 m $\times$ 90 m, y la medida máxima es 90 m $\times$ 120 m. Para partidos internacionales la FIFA establece un mínimo de 64 m $\times$ 100 m y un máximo de 75 m $\times$ 110 m.

Ejercicio 7. Hallar el área de cada una de las canchas, la más grande y la más pequeña, permitidas por la FIFA para partidos internacionales.

Notar que, según el cuadro de dimensiones de la cancha para duelos locales, si ignoramos el requisito que la misma debe ser rectangular, una cancha podría ser un cuadrado de 90 metros de lado. Entonces, ¿con quitarle un metro a la longitud de la línea de meta ya se cumple el requisito de ser rectangular? Para evitar esto, el Reglamento General de la AFA, el cual referencia siempre a las “Reglas de Juego” promulgadas por la FIFA, enuncia en el inciso 1.1.1) de su Artículo 74° lo siguiente:

Dimensiones: Longitud máxima 105 metros, mínima 95 metros. Ancho: dos terceras partes de la longitud.

Con esto establece que la longitud de la línea de meta debe ser igual a las dos terceras partes de la longitud de la línea de banda. De esta manera, no quedan dudas sobre las proporciones.

Problema 1. Determinar las dimensiones de la cancha más grande posible según el Reglamento General de la AFA, y de la más pequeña posible.

Solución. Dado que la AFA establece una relación fija entre el largo y el ancho, podemos concluir que la cancha más grande posible será la que tenga 105 metros de largo y, en tal caso, su ancho (en metros) deberá ser de

$$\tfrac{2}{3} \cdot 105,$$

lo que arroja un resultado de 70 metros. Similarmente, la más pequeña tendrá un largo de 95 metros para la línea de banda, lo que implica una longitud aproximada de 63 metros para la línea de meta.

Dato. Este requisito de la AFA sobre las proporciones no se impone de manera estricta, siempre y cuando las dimensiones estén dentro de las permitidas por el documento de la FIFA. De hecho, en el mismo inciso en el que establece que el ancho de la cancha debe ser igual a las dos terceras partes de la longitud, recomienda “105 metros de longitud y 68 metros de ancho, medidas que se ajustan a las exigidas por la FIFA para disputar partidos del Campeonato Mundial”. Esto contradice a lo anterior, ya que $\frac{2}{3} \cdot 105 = 70$, y no 68. Sin embargo, esta medida es también la aconsejada por la Conmebol y es la que poseen la mayoría de los campos de juego de España. Estas son las dimensiones (en metros) de algunas de las canchas de Argentina:

- **San Lorenzo:** 110×70.
- **Colón, Independiente, Newells, Racing, River, Rosario Central, Unión, Vélez:** 105×70.
- **Boca, Patronato:** 105×68.
- **Olimpo:** 95×70.
- **Atlético Rafaela:** 97×65.

Todas las líneas deberán tener el mismo ancho, el cual debe ser como mínimo de 10 cm y como máximo de 12 cm (dichas líneas pertenecerán a las zonas que demarcan). El resto de los valores quedan exactamente determinados en el reglamento:

- **Arcos:** Una portería se colocará en el centro de cada línea de meta. La distancia entre la parte interior de los postes será de 7.32 m y la distancia del borde inferior del travesaño al suelo será de 2.44 m.
- **Área de meta:** se trazarán dos líneas perpendiculares a la línea de meta, a 5.5 m de la parte interior de cada uno de los postes de la portería. Dichas líneas se adentrarán 5.5 m en el terreno de juego y se unirán con una línea paralela a la línea de meta.
- **Área de penal:** Se trazarán dos líneas perpendiculares a la línea de meta, a 16.5 m de la parte interior de cada uno de los postes de la portería. Dichas líneas se adentrarán 16.5 m en el terreno de juego y se unirán con una línea paralela a la línea de meta. En cada área de penal se marcará un *punto de penal* a 11 m de distancia del punto medio de la línea entre los postes de portería. Al exterior de cada área de penal se trazará un semicírculo con un radio de 9.15 m desde el centro del punto de penal.
- **Área de esquina:** El área de esquina se marcará trazando en el interior del terreno de juego un cuarto de círculo de radio 1 m y con centro en la esquina.

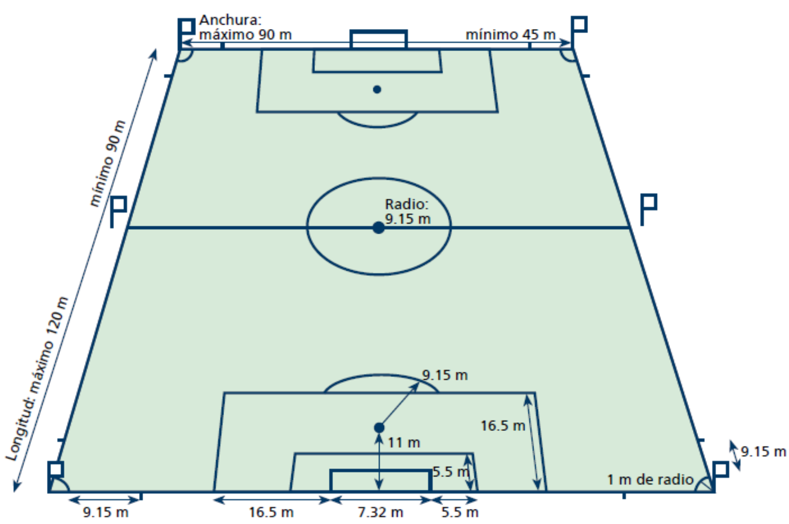
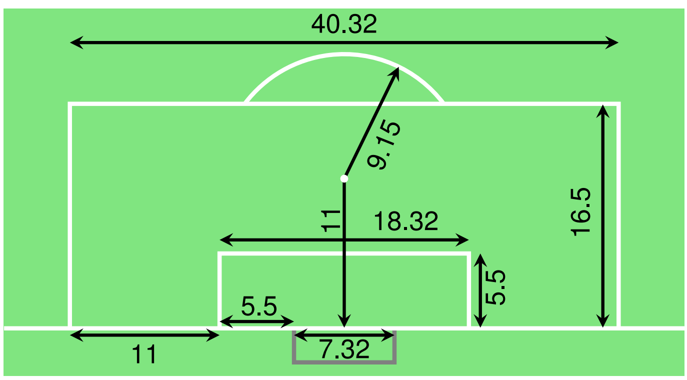


Figura 2: Medidas completas establecidas por la FIFA.

Problema 2. Supongamos que se quiere construir una maqueta a escala de un campo de juego de 105 metros de longitud y 70 metros de ancho. La escala utilizada es la siguiente: un metro en la maqueta equivale a 25 metros de la cancha real. Todas las líneas se harán con una delgada cinta adhesiva blanca. Determinar la cantidad de metros de cinta que se necesitarán.

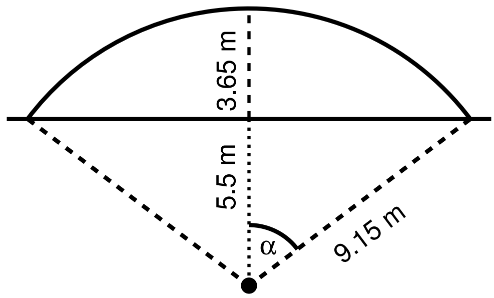
Solución. Calculemos la longitud de todas las líneas que intervienen en la cancha de tamaño real, y luego procederemos a reducir la cantidad según la escala. Para aclarar las medidas definitivas de algunas de las áreas, observemos el siguiente gráfico, en el cual las medidas están expresadas en metros:



Las longitudes involucradas, en metros, son las siguientes:

- Líneas de banda: $105 \cdot 2 = 210$.
- Líneas de meta: $70 \cdot 2 = 140$.
- Línea media: 70.
- Círculo central: $2 \cdot \pi \cdot 9.15 \approx 57.5$.
- Esquinas: $2 \cdot \pi \cdot 1 \approx 6.3$ (los 4 cuartos de círculo forman uno).
- Áreas de penal: $16.5 \cdot 4 + 40.32 \cdot 2 = 146.64$.
- Áreas de meta: $5.5 \cdot 4 + 18.32 \cdot 2 = 58.64$.
- Semicírculos de penal: ¡cuidado! no son mitades de círculos, lo veremos a continuación.

Para cada uno de los dos “semicírculos” tenemos lo siguiente:



El valor 5.5 metros en el gráfico anterior se obtiene restando de los 16.5 metros que tiene de largo el área de penal, los 11 metros de distancia desde la línea de meta hasta el punto de penal. Luego, los 3.65 metros son los que faltan para completar el radio de 9.15 metros.

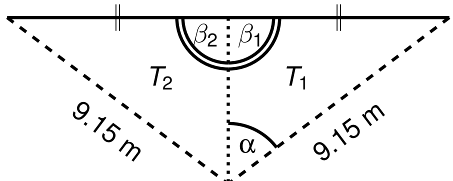
Sabemos que el perímetro del círculo completo se obtiene haciendo el producto $2 \cdot \pi \cdot 9.15$. Luego, si conocemos el valor del ángulo α en grados, la longitud del arco de circunferencia determinado α se obtiene por regla de tres simple:

$$\begin{aligned} 360° &\longrightarrow 2 \cdot \pi \cdot 9.15 \\ 2\alpha &\longrightarrow \text{longitud de arco,} \end{aligned}$$

por lo que

$$\text{longitud de arco} = \frac{2 \cdot \pi \cdot 9.15 \cdot 2\alpha}{360°}.$$

Por otro lado, el campo de juego no solamente es simétrico respecto de la línea media, sino que también lo es respecto de la línea imaginaria que une los puntos medios de las dos líneas de meta, la cual pasa por ambos puntos penales y por el centro del círculo central. Esto se traduce en el siguiente gráfico, en el cual esta simetría se indica marcando con el símbolo $\|$ los segmentos de igual longitud:



Los triángulos T_1 y T_2 comparten además un lado (que mide 5.5 m), y ambos tienen un lado de 9.15 m. Luego, T_1 y T_2 son congruentes, y en consecuencia los ángulos β_1 y β_2 son iguales. Puesto que además son suplementarios (es decir, suman 180°) se concluye que ambos deben ser ángulos rectos. En particular, el triángulo T_1 es rectángulo y, utilizando una razón trigonométrica adecuada, podemos calcular la amplitud del ángulo α. Más precisamente, tenemos que:

$$\cos(\alpha) = \frac{\text{Cateto Adyacente}}{\text{Hipotenusa}} = \frac{5.5}{9.15},$$

por lo que

$$\alpha = \arccos\left(\frac{5.5}{9.15}\right) \approx 53°3'.$$

Reemplazando en la fórmula para la longitud de arco tenemos que:

$$\text{longitud de arco} \approx 16.94 \text{ m}.$$

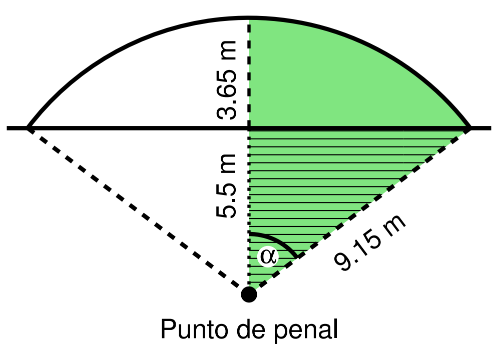
Como en la cancha hay dos de estos "semicírculos", podemos completar el inciso restante como:

- Semicírculos de penal: $16.94 \cdot 2 = 33.88$.

Sumando todas las cantidades anteriores tenemos un total de casi 723 metros. Como en la maqueta se necesita un metro de cinta por cada 25 metros en la cancha, debemos dividir esta cantidad por 25 para obtener la cantidad de cinta necesaria: casi 29 metros.

Problema 3. Hallar el área de la superficie que ocupa cada "semicírculo" de penal.

Solución. Una forma de hallar el área indicada es calcular el área de la "porción de pizza" con ángulo interior α (área sombreada en el gráfico siguiente, incluyendo la parte rayada), y luego a ese resultado restarle el área del triángulo que forma parte del área de penal (zona rayada).



Este resultado nos dará la mitad del área buscada (zona sombreada pero sin rayar). Sabemos que el área del círculo entero, en metros cuadrados, es

$$A_C = \pi \cdot 9.15^2 \approx 263.02.$$

¿Qué parte de esta cantidad representa nuestra porción de pizza? Como siempre, la regla de tres simple viene a solucionar todo. Si dividimos 360° por el valor de α, vemos que para formar el círculo entero necesitamos aproximadamente 6.79 porciones cuyo ángulo central mida como α. Luego, el área de la porción es:

$$A_P = \frac{A_C}{6.79} \approx 38.74 \text{ m}^2.$$

Como dijimos al comienzo, a esta porción debemos restarle el área del triángulo rectángulo con altura de 5.5 metros e hipotenusa de longitud 9.15 metros (zona rayada). Mediante el teorema de Pitágoras podemos calcular la longitud de la base del triángulo, en metros, como:

$$b = \sqrt{(9.15)^2 - (5.5)^2} \approx 7.31.$$

Entonces, el área del triángulo en metros cuadrados es:

$$A_T = \frac{7.31 \cdot 5.5}{2} \approx 20.1.$$

Así, el área de la porción de pizza que queda fuera del área de penal (zona sombreada pero sin rayar) es:

$$A_P - A_T \approx 18.64 \text{ m}^2.$$

Finalmente, el área del "semicírculo" de penal, siempre hablando en metros cuadrados, es:

$$A \approx 2 \cdot 18.64 = 37.28.$$

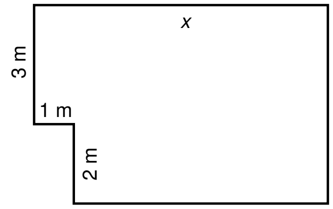
Los vestuarios

Con la emoción de haber dejado el alma... (El Bordo)

Áreas o conceptos trabajados: geometría plana; expresiones algebraicas; lenguaje matemático; ecuaciones lineales; ecuaciones cuadráticas.

El punto 9 del Artículo 74° del Reglamento General de la AFA establece ciertas características que deben poseer los vestuarios para los jugadores y árbitros. En particular, para cada uno de los dos vestuarios (local y visitante) para jugadores de los clubes de Primera Categoría, establece una superficie mínima de 35 m^2 para el piso, y una altura libre interior no menor que 3 m. Esta misma altura debe tener el vestuario para árbitros, pero la superficie mínima requerida es de 7.5 m^2.

Problema 1. Se dispone de un espacio para construir uno de los vestuarios para jugadores que, debido a la ubicación, tiene ciertas restricciones para uno de sus lados, como se ilustra en la siguiente figura. Determinar la longitud x, en metros, que debe tomarse para lograr la superficie mínima requerida por el reglamento.



Solución. Dividiendo la zona en dos rectángulos imaginarios, podemos plantear su área, en metros cuadrados, como

$$A = 3 \cdot 1 + 5 \cdot (x - 1) = 5x + 3 - 5 = 5x - 2.$$

Buscamos x tal que $A = 35$, por lo que debemos resolver la ecuación

$$35 = 5x - 2,$$

lo que produce $x = 37/5 = 7.4$. Entonces, x debe medir 7.4 metros.

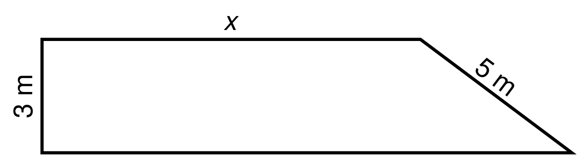
Problema 2. En el vestuario hallado en la solución del problema anterior, se desea colocar una guarda que rodee todas las paredes. Determinar la cantidad de metros lineales de la guarda que deben comprarse. Calcular además el costo de la misma, sabiendo que cada metro cuesta 160 pesos.

Solución. Simplemente debemos hallar el perímetro de la región, el cual se obtiene, en metros, como:

$$P = 3 + 1 + 2 + 6.4 + 5 + 7.4 = 24.8.$$

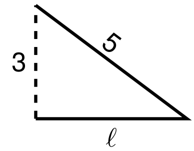
Luego, se necesitan comprar 24.8 metros de guarda. El costo total será de $24.8 \cdot 160 = 3968$ pesos.

Problema 3. Por razones de espacio y ubicación, se construirá un vestuario para jugadores con la siguiente forma para su base, en la que se debe decidir la longitud del lado indicado con x:



El arquitecto indicó que, para trabajar con números enteros, hagan el vestuario de manera que su superficie sea de 36 m^2. ¿Qué largo deberá tener dicho lado?

Solución. Observar que la base del vestuario se puede dividir como un rectángulo de x metros por 3 metros, y un triángulo rectángulo de 5 metros de hipotenusa y una altura de 3 metros. Aplicando el teorema de Pitágoras, podemos determinar que la longitud total de la base del vestuario es igual a $x + 4$ metros, pues:



Pitágoras: $5^2 = 3^2 + \ell^2$,

luego: $\ell = \sqrt{25 - 9} = \sqrt{16} = 4$.

Este triángulo tiene área igual a $\frac{4 \cdot 3}{2} = 6$, en m^2. Entonces, el área del vestuario (que es el área del rectángulo más la del triángulo) en metros cuadrados es:

$$A = 3x + 6.$$

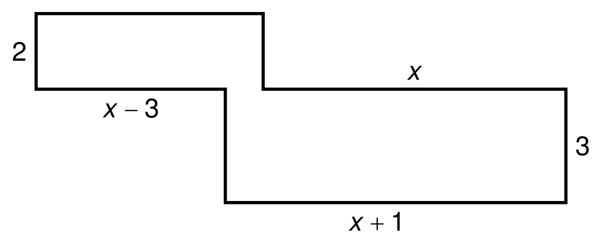
El arquitecto indicó que esta cantidad debe ser 36 m^2, es decir, se debe resolver la igualdad

$$3x + 6 = 36,$$

lo que implica $x = 30/3 = 10$. Luego, el lado indicado con x deberá medir 10 metros.

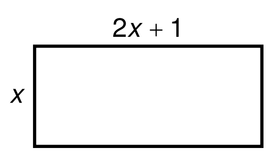
Ejercicio 8. Determinar el perímetro del vestuario obtenido en la solución del problema anterior.

Ejercicio 9. Determinar el perímetro del siguiente vestuario en el cual las longitudes están expresadas en metros, sabiendo que su área es 39 m^2.



Problema 4. Se desea construir un vestuario para jugadores de base rectangular cuya superficie supere en 1 m^2 la mínima requerida, y tal que su largo supere en 1 metro al doble de su ancho.

Solución. Denotemos con x al ancho, en metros, del rectángulo buscado. Entonces el largo debe ser $2x + 1$. Es decir, el vestuario tendrá la forma:



Además, se requiere que el área sea igual a 36 m^2, por lo que planteamos la ecuación:

$$x(2x + 1) = 36.$$

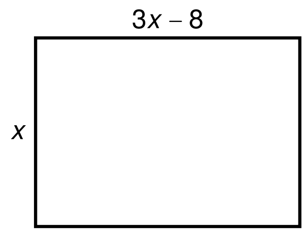
Aplicando propiedad distributiva y operando, se obtiene:

$$2x^2 + x - 36 = 0.$$

Podemos aplicar la fórmula resolvente para obtener las soluciones de esta ecuación cuadrática, las cuales son $x_1 = -4.5$ y $x_2 = 4$. Como estamos hablando de longitudes, la solución negativa se debe descartar. Así, las dimensiones del vestuario serán 4 metros de ancho por $2 \cdot 4 + 1 = 9$ metros de largo.

Problema 5. Se desea construir un vestuario para jugadores de base rectangular cuya superficie sea la mínima requerida, y tal que a su largo le falten 8 metros para alcanzar al triple de su ancho.

Solución. Denotemos con x al ancho del rectángulo buscado. Entonces su largo debe ser $3x - 8$. Es decir, el vestuario tendrá la forma:



Además, se requiere que el área sea igual a 35 m^2, por lo que planteamos la ecuación:

$$x(3x - 8) = 35.$$

Operando, obtenemos la siguiente ecuación cuadrática equivalente:

$$3x^2 - 8x - 35 = 0.$$

Aplicando la fórmula resolvente y descartando la solución negativa, podemos concluir que $x = 5$. Es decir, las dimensiones serán de 5 metros de ancho por 7 metros de largo.

Ejercicio 10. Determinar las dimensiones de un vestuario para árbitros de base rectangular, cuyo largo sea igual al doble de su ancho, y cuya superficie sea de 8 m^2.

Ejercicio 11. Un vestuario para jugadores posee base rectangular y 3 m de altura. Sabiendo que el volumen del mismo es igual a 120 m^3, ¿qué superficie posee la base? Determinar las dimensiones de la misma sabiendo que su ancho supera en 1 m a la mitad de su largo.

Las entradas

La banda grita tu nombre y ves cómo la popular se va a caer...(La Mancha de Rolando)

Áreas o conceptos trabajados: lenguaje matemático; fracciones; porcentajes; ecuaciones.

Los reglamentos de los partidos oficiales de fútbol contemplan también cuestiones referidas a las cantidades de entradas: número de palcos y plateas, asientos reservados para autoridades, ubicaciones para socios, abonados y público en general. Pero no nos centraremos aquí en esta reglamentación, sino que consideraremos problemas concretos cuya resolución permita ejercitar algunos conceptos matemáticos particulares.

Problema 1. Supongamos que cada entrada para un partido de fútbol en el estadio Camp Nou, situado en Barcelona, cuesta 85 euros. Sabiendo que la capacidad* del estadio es de 99350 personas, hallar la recaudación cuando se venden las $3/5$ partes de estas entradas. Determinar la cantidad de espectadores y el porcentaje con respecto a la capacidad total que esto representa.

Solución. Para la recaudación, debemos calcular:

$$\text{Recaudación} = \tfrac{3}{5} \cdot 99350 \cdot 85 = 5066850.$$

Es decir, se recaudan más de 5 millones de euros. La cantidad de espectadores es de 59610 personas. Aplicando regla de tres simple, esta cantidad representa el 60 % de la capacidad total, pues:

$$\left.\begin{array}{ccc} 99350 & \longrightarrow & 100 \\ 59610 & \longrightarrow & x \end{array}\right\} \Longrightarrow x = \frac{59610 \cdot 100}{99350} = 60.$$

Una forma más sencilla de hallar este resultado, sin usar la cantidad de espectadores ni la capacidad, es haciendo $\frac{3}{5} \cdot 100 = 60$.

*Cantidad aproximada, para facilitar los cálculos.

Ejercicio 12. Hallar la recaudación obtenida si en el problema anterior la ocupación fuera del 92 % de la capacidad total.

Problema 2. Determinar la capacidad de espectadores del estadio Azteca (ubicado en la Ciudad de México) sabiendo que en un partido se recaudaron 2088000 dólares con las entradas, que la cantidad de entradas vendidas correspondió a las tres cuartas partes de la capacidad total, y que cada una tenía un costo de 32 dólares.

Solución. Llamemos x a la capacidad total del estadio. El dato, traducido a lenguaje matemático, establece que:

$$32 \cdot \frac{3}{4} \cdot x = 2088000.$$

Luego, la capacidad del estadio es de

$$x = \frac{4}{3} \cdot \frac{2088000}{32} = 87000$$

espectadores.

Problema 3. Un estadio con capacidad para 52000 espectadores se encuentra completamente lleno, entre socios y público en general. De estos lugares, algunos fueron cedidos en forma gratuita (no abonaron entrada): 290 fueron ocupados por la prensa y 200 fueron destinados a entradas protocolares. Además, 8000 lugares corresponden a plateas y palcos, con lo que recaudaron 720000 pesos en entradas. El resto de los lugares corresponden a tribuna popular, ocupada tanto por socios como por no socios. Determinar la cantidad de socios y de no socios que asistieron a la popular, sabiendo que la recaudación total por entradas (incluyendo palcos y plateas) fue de 13985700 pesos, y que el precio para esta tribuna fue de \$150 para socios y de \$540 para no socios.

Solución. Llamemos x a la cantidad de socios que asistieron a la tribuna popular. Entonces la cantidad de no socios que asistieron a esta tribuna es

$$\begin{aligned} \text{no socios} &= \text{capacidad total} - \text{ocupados} \\ &= 52000 - 290 - 200 - 8000 - x \\ &= 43510 - x. \end{aligned}$$

Por otro lado, la recaudación es

$$\text{recaudación} = \text{plateas y palcos} + \text{popular socios} + \text{popular no socios}.$$

Esto se traduce en la siguiente ecuación:

$$13985700 = 720000 + 150x + 540(43510 - x).$$

Aplicando la propiedad distributiva del producto respecto de la resta y resolviendo, se obtiene:

$$10229700 = 390x,$$

por lo que $x = 10229700/390 = 26230$. Es decir, asistieron 26230 socios a la tribuna popular, y en consecuencia la cantidad de no socios allí es

$$\text{no socios} = 43510 - 26230 = 17280.$$

Problema 4. Se ocupó el 88 % de la capacidad de un estadio entre público local y visitante. Sabiendo que la capacidad del estadio es de 65000 personas, y que la cantidad de visitantes supera en 5800 a la tercera parte de la cantidad de locales, determinar la cantidad de público de cada parcialidad.

Solución. Por un lado sabemos que la cantidad total de público es igual al 88 % de 65000, es decir, 57200 personas. Esta cantidad corresponde a la suma entre locales y visitantes. Si llamamos x a la cantidad de público local, sabemos que la cantidad de público visitante es $\frac{1}{3}x + 5800$. Es decir, se debe cumplir que

$$57200 = x + \tfrac{1}{3}x + 5800 = \tfrac{4}{3}x + 5800.$$

Luego,

$$x = 51400 \cdot \tfrac{3}{4} = 38550$$

es la cantidad de público local. Entonces, la cantidad de público visitante es la diferencia entre la cantidad total de asistentes y el público local, es decir, 18650 personas.

Ejercicio 13. Determinar la cantidad de espectadores locales y visitantes en un determinado partido, sabiendo que ocuparon el 80 % de un estadio con capacidad para 50000 personas, y que la cantidad de público visitante superaba en 1000 a la mitad del público local. Luego, hallar el precio de las entradas de cada parcialidad, sabiendo que con ellas se recaudaron $12420000 en dicho partido, y que el valor de la entrada para los visitantes es el doble del valor de la entrada para los locales.

El siguiente problema contiene datos reales sobre el partido de vuelta de la final entre Boca Juniors y River Plate por la Copa Libertadores, que se llevó a cabo en el estadio Santiago Bernabéu, el 9 de diciembre de 2018. Este estadio cuenta con una capacidad para 80 mil espectadores[*].

[*] En realidad, la capacidad supera los 81 mil espectadores, pero tomamos 80 para facilitar lon cálculos.

Problema 5. Según el comunicado oficial de la Conmebol (redactado de forma diferente), la distribución de entradas para el partido antes mencionado, fue la siguiente:

- Recibidas por cada club para vender a los socios en Argentina: 6.25 % de la capacidad total.
- Disponibles por cada club para aficionados que residen en España: un cuarto de la capacidad total.
- De protocolo: tres cuartos del 10 % de la capacidad total.
- Público en general: 10 % más de las recibidas por cada club para aficionados residentes en España.

Determinar la cantidad de entradas correspondientes en cada caso, y la cantidad restante para otros fines.

Solución. Comencemos por la recibidas por cada club para la venta en Argentina: el 6.25 % de 80 mil, lo que equivale a 5000 entradas, para cada uno.

Para los residentes en España, cada club recibió un cuarto de la capacidad total, es decir, 20000 entradas cada uno.

Para protocolo, debemos calcular primero el 10 % de 80 mil, que es 8000, y de ello, las tres cuartas partes, es decir, $\frac{3}{4} \cdot 8000$, lo que arroja un total de 6000 entradas.

Finalmente, el 10 % de 20000 es 2000, por lo que quedaron 22000 entradas a la venta para el público en general.

La suma de todas las cantidades anteriores asciende a 78000 entradas. Luego, quedaron 2000 entradas reservadas para otros fines.

Dato. El resultado de este partido fue 3 a 1 a favor de River Plate. En el encuentro de ida habían igualado 2 a 2, por lo que el equipo dirigido por Marcelo Gallardo, con Leonardo Ponzio como capitán, se consagró campeón de la edición 2018 de la Copa Libertadores.

El mercado de pases

Banderas en tu corazón... (Patricio Rey)

Áreas o conceptos trabajados: regla de tres simple; porcentajes; gráfico circular; ecuaciones.

El mercado de pases es un tema de gran interés para los aficionados del fútbol, y genera muchas expectativas cada vez que se abre. La parte económica que hay detrás puede ser un poco compleja, por lo que trataremos de simplificar aquí las cosas, dejando de lado ciertos detalles menores, que pueden ser confusos.

Transferencias

Para comprender cómo funciona este mercado, supongamos que el Club B ofrece dinero al Club A por la transferencia del jugador X (lo que transfiere es, en realidad, los *derechos federativos* sobre dicho jugador). Si la transferencia se realiza, es decir, si el jugador es transferido del Club A al Club B, entonces ahora el Club B es el “dueño del pase” del Jugador X, y estos derechos no pueden ser cedidos ni comercializados. Pero el Club B pagó un precio por tener estos derechos (que, en general, es de un monto importante), y suele negociar entonces lo que se conoce como los *derechos económicos* resultantes de una futura transferencia. Los derechos económicos son, simplemente, los beneficios económicos derivados de la transferencia de los derechos federativos.

Para negociar los derechos económicos el club firma un contrato con empresarios o inversores, otorgándoles el derecho a recibir un porcentaje del dinero de la futura venta de un jugador a cambio de una cantidad de dinero. Este es uno de los ingresos más importantes que reciben de los clubes. Además, un club le puede ceder al propio jugador un porcentaje de los derechos económicos cuando quiere retenerlo pero no tiene dinero para aumentarle el sueldo. Esto a su vez incentiva al jugador a esforzarse por mantener o subir su nivel, ya que al contar con un porcentaje del dinero que genere una futura venta, él también se beneficiará si el monto es mayor. Otra opción es que un porcentaje de estos derechos sean cedidos a algún otro club, como parte de algún acuerdo.

Cabe aclarar que está prohibido que terceros (como inversores) puedan ejercer presión o participar de manera alguna en las negociaciones de transferencia. Los únicos que deben ponerse de acuerdo para que una transferencia ocurra son: el club que posee los derechos federativos del jugador, el club que quiere comprarlos, y el jugador.

Para comprender todos estos conceptos, trabajaremos algunos ejemplos en los siguientes problemas.

Problema 1. Supongamos que el Club A pagó la suma de 6 millones de dólares por la llegada del Jugador X, de los cuales un grupo inversor aportó 2 millones a cambio de recibir el 30 % del importe que ingrese por una futura venta de este jugador.

(a) Si luego de unos años el Jugador X es transferido por 14 millones de dólares, ¿cuánto recibe el grupo inversor? ¿Qué porcentaje de su inversión representa la ganancia obtenida?

(b) Determinar el precio al que debe transferirse el jugador para que la ganancia del grupo sea igual el doble de su inversión.

Solución. (a) El grupo inversor recibirá $14 \cdot 30/100 = 4.2$ millones de dólares. La ganancia obtenida es de 2.2 millones. Para calcular qué porcentaje representa esto del total, aplicamos regla de tres simple:

$$\left.\begin{array}{rcl} 2 & \longrightarrow & 100 \\ 2.2 & \longrightarrow & x \end{array}\right\} \Longrightarrow x = \frac{2.2 \cdot 100}{2} = 110.$$

Entonces la ganancia representa el 110 % de la inversión.

(b) Llamemos x al precio de la transferencia futura del jugador. Entonces la ganancia del grupo inversor, en millones de dólares, está dada por

$$\text{Ganancia} = \text{Ingreso} - \text{Inversión} = 0.3x - 2.$$

Debemos hallar x tal que esta ganancia sea igual al doble de la inversión, es decir, a 4. Esto genera la ecuación

$$4 = 0.3x - 2,$$

cuya solución es $x = 6/0.3 = 20$. Luego, el precio de la transferencia debería ser de 20 millones de dólares. ⚽

Ejercicio 14. Determinar qué porcentaje de los derechos económicos de un jugador posee un grupo inversor, si por una transferencia de 42 millones de euros el grupo recibió 14.7 millones de euros.

En ocasiones, en lugar de subir el valor de una transferencia, se opta por incluir una cláusula estableciendo una *plusvalía*. El significado de esta palabra es "aumento de valor". Aunque este término también se emplea en el mundo del fútbol para indicar el "aumento de precio" de un jugador, el significado aquí será el de un importe adicional que puede recibir el club que "vende" un jugador, en caso de otra futura venta del mismo. Más precisamente, significa que en el traspaso de un jugador del Club A al Club B, se firma una cláusula de plusvalía, la cual establece qué importe deberá pagarle el Club B al Club A, si en un futuro el Club B transfiere el jugador a otro club. Este importe será un adicional (plusvalía) que el Club A recibe por parte del Club B, además de lo cobrado en el momento de la primera transferencia, y dependerá de cada caso en particular.

Veamos los siguientes problemas que abordar el concepto de plusvalía, los cuales corresponden a casos reales.

Problema 2. Supongamos que un jugador es transferido del Club A al Club B por 1.3 millones de dólares, pero establece una plusvalía del 30 % sobre este mismo importe. Al tiempo, dicho jugador es transferido al Club C por 4 millones de dólares. Determinar el importe que debe entregarle el Club B al Club A debido a esta cláusula, y qué porcentaje del monto total de la transferencia representa esta cantidad.

Solución. El 30 % de 1.3 millones es 0.39 millones de dólares, es decir, 390 mil dólares. Este es el dinero que el Club B debe entregarle al Club A cuando se realice la transferencia al Club C.

Hablando en millones de dólares, se debe determinar qué porcentaje de 4 representa 0.39. Por regla de tres simple, hacemos

$$\left.\begin{array}{rcl} 4 & \longrightarrow & 100 \\ 0.39 & \longrightarrow & x \end{array}\right\} \Longrightarrow x = \frac{0.39 \cdot 100}{4} = 9.75.$$

Es decir, el Club C recibirá el 9.75 % del monto total de la transferencia.

Problema 3. Supongamos que un jugador es transferido del Club A al Club B por 12 millones de euros, pero establece una plusvalía del 15 % sobre el monto que supere esta cantidad. Luego, dicho jugador es transferido al Club C por 25 millones de euros. Determinar el importe que debe entregarle el Club B al Club A debido a esta cláusula.

Solución. El importe de la segunda transferencia es de 25 millones de euros, por lo que la diferencia con respecto a la primera es de 13 millones. Sobre este monto es que se debe sacar el 15 %, lo que corresponde a 1.95 millones de dólares. Este es el importe que el Club B deberá pagarle al Club A por la venta.

El dinero recibido por un club por el traspaso de un jugador no pertenece por completo a dicho club. Aún en caso de no interferir terceros inversores, el Reglamento General de la AFA establece en su Artículo 214° que "tanto el club vendedor como el club comprador, para ser aprobada la transferencia, deberán cumplimentar los siguientes requisitos:

a) Cada uno de los clubes deberá abonar en la Tesorería de la AFA, una suma equivalente al 2 % del monto total de la operación. [...]

b) El club vendedor deberá depositar en Futbolistas Argentinos Agremiados, el 15 % del importe en que se pactó la transferencia, correspondiente al jugador [...]"

A diferencia de este último inciso, el estatuto de la FIFA establece que al menos el 20 % le corresponde al jugador. En realidad, los porcentajes establecidos para los jugadores son los mínimos, y las partes los pueden mejorar, según lo negociado con cada jugador para acordar su transferencia. El sueldo que recibirá el jugador se negocia aparte, y se establece mediante un contrato en el que además se indica la cantidad de años que se pretende que este permanezca en el club.

En los problemas siguientes trabajaremos con casos que no pertenecen al fútbol argentino, por lo que el porcentaje establecido por el inciso a) del Artículo 214° de la AFA no será considerado.

Problema 4. Supongamos que un jugador es transferido a un club por 80 millones de euros, pero una parte de los derechos económicos pertenecían a un grupo inversor, y el resto al club vendedor. Además, debido a los acuerdos firmados con el grupo inversor, el club vendedor pagó al jugador el 25 % del importe total, con su parte del dinero recibido por la venta.

(a) Determinar el porcentaje perteneciente al grupo inversor, sabiendo que el mismo recibió 4 millones de euros por la venta.

(b) Hallar el porcentaje del monto total que quedó para el club luego de pagarle al jugador.

Solución. **(a)** Se debe determinar qué porcentaje de 80 representa 4. Por regla de tres simple, hacemos

$$\left.\begin{array}{ccc} 80 & \longrightarrow & 100 \\ 4 & \longrightarrow & x \end{array}\right\} \Longrightarrow x = \frac{4 \cdot 100}{80} = 5.$$

Es decir, el grupo inversor tenía el 5 % de los derechos económicos del jugador.

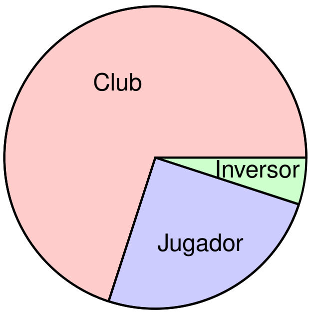
(b) Antes de pagarle al jugador, y teniendo en cuenta lo que recibió el grupo inversor, el club tenía 76 millones de euros. Por otro lado, lo acordado para el jugador fue del 25 % del importe total, es decir, $25 \cdot 80/100 = 20$ millones de euros. Por lo tanto, al club le quedaron 56 millones luego de este pago.

Para saber qué porcentaje de 80 millones representa esta cantidad, volvemos a hacer regla de tres simple como arriba, concluyendo que representa el 70 % del total. Este valor puede obtenerse también teniendo en cuenta las cantidades en poscentajes: el jugador se quedó con el 25 % del total, y el grupo inversor con el 5 %, lo que da un total del 30 %. Entonces el resto, es decir el 70 %, quedó para el club.

Existe una forma visual de representar porcentajes o proporciones, denominada *gráfico circular* o *gráfico de torta*. Para ello, se parte de un círculo que representa "el todo", y se pintan "porciones" de distintos colores en él, donde el tamaño de cada una representa la proporción de los distintos valores respecto del total. La palabra "porción" se refiere aquí a "sector circular". Para obtener el tamaño de manera exacta se determina la amplitud del sector circular que representa cada valor mediante regla de tres simple, teniendo en cuenta que "el todo" corresponde a 360°. Así, si queremos representar las cantidades del problema anterior en un gráfico de este tipo, realizamos el siguiente razonamiento: si el 100 % corresponde a 360° entonces, por regla de tres simple, el 70 % corresponde a

$$\frac{70 \cdot 360^\circ}{100} = 252^\circ.$$

Esto significa que la porción correspondiente al dinero recaudado por el club tendrá un ángulo central de 252°. De la misma forma, la que corresponde al jugador será de 90°, y la restante de 18° corresponde al grupo inversor. El resultado es el siguiente:



Por supuesto, el mismo gráfico se obtiene si en lugar de trabajar con porcentajes los hacemos con los montos: ahora los 80 millones representan “el todo”, es decir, los 360°, y entonces, por ejemplo, los 4 millones que recibe el inversor se representan con una porción cuyo ángulo central mide $4 \cdot 360°/80 = 18°$, como habíamos obtenido antes.

Problema 5. Determinar cuánto le corresponde al jugador referido en el Problema 3, suponiendo que acordaron que reciba el 20 % del monto total de la operación. Hallar el porcentaje del monto total que queda en el Club B luego de pagarle tanto al jugador como la plusvalía al Club A. Representar estas tres cantidades en un gráfico circular.

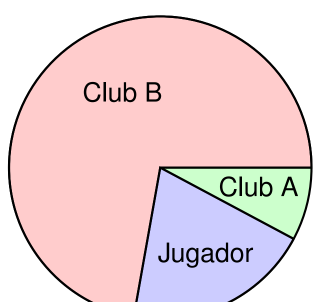
Solución. Si al jugador le corresponde el 20 % del importe total, entonces debe recibir $25 \cdot 20/100 = 5$ millones de euros. Entonces, el dinero que queda al Club B luego de pagarle esta cantidad al jugador y la plusvalía de 1.95 millones, es igual a

$$25 - 5 - 1.95 = 18.05,$$

en millones de euros. La pregunta es qué porcentaje del monto total representa este número. Por regla de tres simple, tenemos que

$$\left.\begin{array}{rcl} 25 & \longrightarrow & 100 \\ 18.05 & \longrightarrow & x \end{array}\right\} \Longrightarrow x = \frac{18.05 \cdot 100}{25} = 72.2.$$

Podemos concluir que el Club B se queda con un 72.2 % del monto total de la operación luego de estos dos pagos. Representamos esto en el siguiente gráfico circular:



Formación

Los clubes de fútbol invierten una gran cantidad de dinero en la formación de jugadores jóvenes, ya que en muchas ocasiones les dan alojamiento, comida y educación. Hay una reglamentación que compensa este "gasto" en caso de que el futbolista llegue a desempeñarse luego como profesional. Existen dos métodos para esta compensación: la *indemnización por formación* (conocida como *derechos de formación*) y el *mecanismo de solidaridad*. Estos conceptos suelen confundirse por tener ambos el mismo fin, pero son diferentes. Explicamos a continuación en qué consisten, junto a las cifras establecidas en el "Reglamento de compensación por la formación de jugadores jóvenes en el ámbito del fútbol argentino", aprobado el 18 de octubre de 2018 por la AFA.

- **Indemnización por formación:** esta indemnización se abonará al club o clubes formadores de un jugador, cuando este firme su primer contrato profesional antes de que finalice la temporada en la que cumpla los 23 años de edad*. Serán beneficiarios los clubes directa o indirectamente afiliados a AFA que hubieran participado efectivamente en la educación y formación de un jugador entre la temporada en la que cumplió los 12 y 21 años de edad y que, al momento en que el jugador firme el primer contrato profesional, se encuentren disputando competencias oficiales en una categoría inferior al club obligado. Es el club en el que se inscribe el jugador con primer contrato como profesional quien debe realizar este pago, y el importe correspondiente a Clubes de Primera División es el equivalente al 1.5 (uno y medio) del contrato mínimo de un jugador profesional de dicha categoría, por cada año de formación. En caso de que alguna porción del monto correspondiente por derechos de formación no pueda ser reclamado por aplicación de lo dispuesto precedentemente, el mismo quedará a favor del nuevo club.
- **Mecanismo de solidaridad:** se abonará cuando un jugador profesional es transferido entre dos clubes directa o indirectamente afiliados a la AFA, durante la vigencia de su contrato. El nuevo club del jugador debe repartir un 5 % del monto del pase entre todos aquellos clubes que hayan participado de la formación del profesional. Esta contribución se realizará proporcionalmente, en función del número de años que el jugador ha estado inscripto en cada club durante las temporadas comprendidas entre los 12 y 23 años, de la forma siguiente:
    - 10 % (es decir 0.5 % del monto total del pase) por cada temporada entre el 12º cumpleaños y el 19º cumpleaños, inclusive.
    - 5 % (es decir 0.25 % del monto total del pase) por cada temporada entre el 20º cumpleaños y el 23º cumpleaños, inclusive.

*En el Reglamento para Transferencia de Jugadores de la FIFA, también se incluye esta indemnización por cada transferencia de un jugador profesional hasta el fin de la temporada en la que cumple 23 años, ya sea que se efectúe durante o al término del contrato.

En caso que alguna porción del cinco por ciento (5 %) no pueda ser reclamada, la misma quedará a favor del nuevo club. El reglamento de la FIFA tiene una distribución diferente para esto, la cual se establece en el Reglamento sobre Transferencia de Jugadores de la FIFA como:

- 5 % (es decir 0.25 % del monto total del pase) por cada temporada entre el 12º cumpleaños y el 15º cumpleaños, inclusive.
- 10 % (es decir 0.5 % del monto total del pase) por cada temporada entre el 16º cumpleaños y el 23º cumpleaños, inclusive.

En el acuerdo entre Futbolistas Argentinos Agremiados y la AFA, se definió que el salario básico (el cual tomaremos como contrato mínimo) de los futbolistas de Primera División para la temporada 2018 − 2019 sea de $25200*. En función de este dato, resolvamos el siguiente planteo.

Problema 6. Determinar el importe por indemnización que recibirá el club donde se formó un jugador argentino desde los 15 años hasta los 22, si en ese momento firmó su primer contrato profesional con otro club argentino.

Solución. Según lo establecido, el monto de la indemnización por formación corresponde a 1.5 veces el salario básico, por cada año de formación entre los 12 y 21 años de edad (en este caso, fueron 7 años, porque estuvo desde los 15). Entonces, deberá recibir la suma de pesos igual a

$$1.5 \cdot 25200 \cdot 7 = 264600.$$

Problema 7. Determinar el porcentaje del total del pase que recibirá por el mecanismo de solidaridad un club según lo establecido por la AFA, por la formación de un jugador que estuvo en el club desde los 13 a los 17 años, inclusive. ¿Cuál sería el porcentaje según la FIFA?

Solución. Según lo establecido por la AFA, el porcentaje del total se calcula como

$$0.5 \cdot 5 = 2.5,$$

pues corresponde un 0.5 % del importe total de la transferencia por cada uno de los 5 años que estuvo. En cambio, según el reglamento de la FIFA, el porcentaje correspondiente es

$$0.25 \cdot 3 + 0.5 \cdot 2 = 1.75,$$

ya que por cada uno de los primeros 3 años corresponde un 0.25 %, y un 0.5 % por cada uno de los 2 últimos.

*Importe publicado en el boletín Nº 5501 de la AFA.

Problema 8. La transferencia de Ángel Di María del Real Madrid al Manchester United se realizó en 75 millones de euros, en el año 2014. Teniendo en cuenta que Di María estuvo en Rosario Central desde sus 7 años hasta sus 19 años inclusive, determinar cuánto dinero ingresó al club argentino por el mecanismo de solidaridad, según lo estipulado por la FIFA.

Solución. Teniendo en cuenta lo establecido por la FIFA, el porcentaje que le correspondió a Rosario Central se calcula como:

$$0.25 \cdot 4 + 0.5 \cdot 4 = 3,$$

pues por cada uno de los primeros 4 años (a partir de los 12 años) corresponde un 0.25 %, y un 0.5 % por cada uno de los últimos 4. Esto implica que la suma recibida por el club argentino es igual a

$$\frac{3 \cdot 75}{100} = 2.25$$

millones de euros. ⚽

Problema 9. El jugador Lucas Alario fue transferido en 2017 al Bayer Leverkusen por una suma de 18 millones de euros (este es el importe neto, el bruto es de 24 millones). Los derechos económicos correspondían en un 60 % a River y en un 40 % a Colón de Santa Fe. De ese 40 %, un 20 % pertenecía a San Lorenzo de Tostado.

(a) Determinar cuánto dinero recibió cada club por la transferencia.

(b) Determinar con qué importe se indemnizó a cada club por el mecanismo de solidaridad, teniendo en cuenta que Alario se formó en club de Tostado desde muy pequeño hasta sus 17 años, y luego continuó su formación en Colón hasta los 23.

Solución. **(a)** Lo que cada club recibió por la transferencia, en millones de euros, es:

- River: $0.6 \cdot 18 = 10.8$;
- Colón: $0.4 \cdot 18 = 7.2$. A este importe, hay que restarle lo que le corresponde al club de Tostado.
- San Lorenzo: $0.2 \cdot 7.2 = 1.44$. Luego, a Colón le quedaron 5.76 millones.

(b) Calculemos el porcentaje total que le corresponde a cada club, según lo establecido por la FIFA:

- San Lorenzo: $0.25 \cdot 4 + 0.5 \cdot 2 = 2$ (ya que desde los 12 hasta los 15 años inclusive, le corresponde el 0.25 % por cada año, y desde los 16 a los 17, 0.5 % por cada año);
- Colón: $0.5 \cdot 6 = 3$ (pues estuvo en Colón desde los 18 años hasta los 23, inclusive).

Entonces, a Colón le correspondieron $0.03 \cdot 18 = 0.54$ millones de euros (es decir, 540 mil euros) por el mecanismo de solidaridad, mientras que a San Lorenzo de Tostado le correspondieron $0.02 \cdot 18 = 0.36$ millones de euros (360 mil euros).

Dato. De lo recibido por Colón por la transferencia de Alario, el club santafesino llegó a un acuerdo con el representante y aceptó devolver 3.19 millones al club alemán, con el objetivo de que la venta se realice antes de junio, cuando River podía hacer uso de su opción de compra para quedarse con el 40 % de los derechos económicos que poseía Colón, por 1.6 millones de dólares. Si eso ocurría, Colón recibiría aproximadamente la mitad de lo recibido por el acuerdo. También se incluyó en el monto acordado lo correspondiente al mecanismo de solidaridad.

Ejercicio 15. A partir del inciso **(a)** del problema anterior, realizar un gráfico circular que represente el porcentaje del total de la transferencia recibido por cada club.

La pelota: su geometría

Blanca piel inmaculada... (Las Pastillas del Abuelo)

Áreas o conceptos trabajados: perímetro y área de polígonos regulares; cuerpos geométricos; trigonometría; inecuaciones; porcentaje.

Su construcción

En los relatos de fútbol es frecuente escuchar "el esférico" para referirse a la pelota (o balón). Sin embargo, si miramos la clásica pelota con ojos matemáticos, esta no resulta ser una esfera. Y cuando decimos "clásica pelota" nos referimos al modelo formado por trozos planos de cuero, blancos y negros, diseñado por la marca deportiva Adidas a fines de los años 60, utilizada en la Copa Mundial de la FIFA México 1970 (para que se viera bien en la televisión pues, en esos años, aún era en blanco y negro en la mayoría de los países). Este se convirtió en el modelo que la mayoría de nosotros imaginamos cuando queremos dibujar una pelota de fútbol.

Cuando está bien inflado este balón parece una esfera, pero cuando no lo está podemos ver que, en realidad, se trata de un *poliedro*, es decir, un cuerpo geométrico cuyas caras son planas y encierran un volumen acotado. Estas caras planas son polígonos regulares de dos tipos: pentágonos (negros) y hexágonos (blancos), unidos entre sí. Este poliedro tiene un nombre: se llama *icosaedro truncado*, y luego veremos el por qué de este nombre. En la Figura 3 pueden apreciarse un icosaedro truncado y un balón de fútbol[*].

A los parches negros, que son los pentágonos regulares, los podemos contar fácilmente: son 12. Contar los parches blancos, que son los

---

[*] Autor: Aaron Rotenberg - `https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=34912007`.

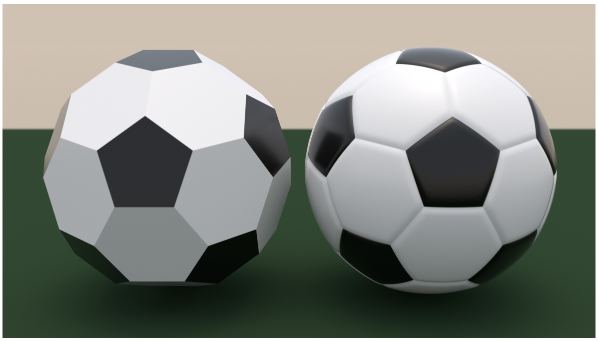


Figura 3: Icosaedro truncado y balón de fútbol.

hexágonos regulares, también es posible, pero resulta más fácil deducirlo de la siguiente forma: cada pentágono está rodeado por 5 hexágonos. Entonces, si hacemos $12 \cdot 5$ obtenemos 60 hexágonos. Pero de esta forma estamos contando hexágonos repetidos pues, como podemos observar, cada hexágono (es decir, cada parche blanco) está unido a 3 pentágonos (es decir, a 3 parches negros). Entonces, hemos contado 3 veces cada uno, por lo que la cantidad total de hexágonos es $60/3 = 20$.

Por lo tanto, este modelo de pelota está hecho con 32 trozos planos de cuero, 12 de ellos de color negro con forma de pentágono regular, y 20 de color blanco con forma de hexágono regular. Para poder unirlos bien, la longitud del lado de cada pentágono es igual a la longitud del lado de cada hexágono, y a este valor es al que nos referimos cuando decimos “icosaedro truncado de lado *L*”.

El poliedro tiene entonces, en total, 32 caras, entre hexágonos y pentágonos. De esta manera, no es un *sólido platónico* o *poliedro regular* (en los que todas sus caras son polígonos regulares iguales entre sí), sino que es un *sólido arquimediano* o *poliedro semirregular* (en los que sus caras son polígonos regulares de dos o más tipos).

La cantidad de pentágonos y de hexágonos también puede obtenerse conociendo cómo se origina este poliedro. Como mencionamos, recibe el nombre de *icosaedro truncado*, y esto es debido a la forma en la que se construye: se parte de un icosaedro regular, que es un poliedro de 20 caras iguales, las cuales son triángulos equiláteros. Este icosaedro regular es uno de los únicos 5 sólidos platónicos que existen. Posee 12 vértices (en cada uno confluyen 5 caras), y son justamente estos vértices los que se “cortan” o truncan para originar el icosaedro truncado. Los cortes se realizan a lo largo de planos bien posicionados, de modo que, tras el corte, todas las aristas tengan la misma longitud (para lo cual cada corte se efectúa a un tercio de la arista del icosaedro original). De esta forma se "redondea" el icosaedro. Los 12 pentágonos corresponden a los 12 cortes en los vértices del icosaedro. Los 20 hexágonos son los restos de las caras del icosaedro. En la Figura 4 se ilustra esta construcción: a la izquierda un icosaedro con las partes a truncar sombreadas*, y a la derecha el resultado después de realizar los cortes**.

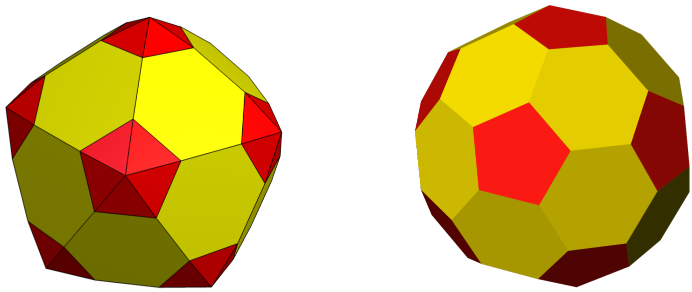
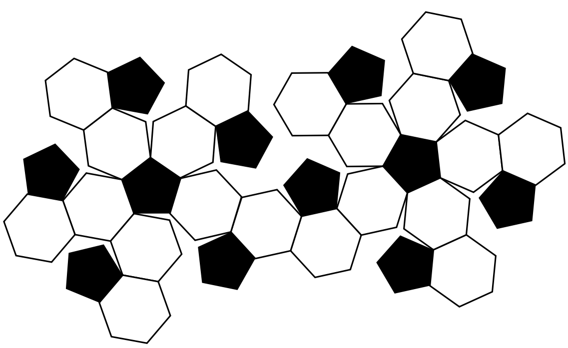


Figura 4: Icosaedro e icosaedro truncado.

Ahora que conocemos la geometría de este modelo de balón, podemos plantear el primer problema:

Problema 1. ¿Qué cantidad de cuero de cada color se necesita para fabricar una pelota, en la cual el lado de cada polígono tiene una longitud de L cm?

En otras palabras, se desea calcular, por un lado, el área que forman los parches blancos de la siguiente figura (que corresponde a una pelota "extendida" sobre un plano) y, por otro lado, el área que forman todos los parches negros, suponiendo que cada lado mide L cm.



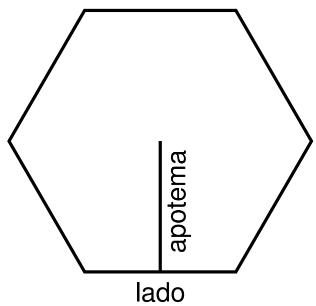
*Autor: Tomruen - `https://en.wikipedia.org/wiki/File:Pentakis_truncated_icosahedron.png`.

**Autor: UniCollab - `https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=24745099`.

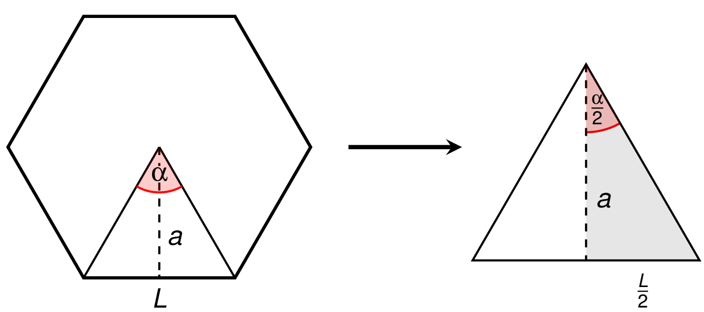
Solución. Quizás algunos recuerden la fórmula para el área de un polígono regular en función de la longitud de sus lados, pero llegaremos a ella a partir de una que suele ser más recordada: el área de un polígono regular se calcula como

$$\boxed{A = P \cdot \frac{a}{2},}$$

donde P es el perímetro (que, por ser regular, es igual a la longitud del lado multiplicada por la cantidad de lados), y a es la longitud de la apotema (que es el segmento que une el centro del polígono con el punto medio de cualquiera de sus lados).



En los polígonos regulares (de n lados), la longitud de la apotema puede calcularse a partir de la longitud del lado, utilizando las razones trigonométricas definidas para triángulos rectángulos: si se divide el polígono regular en n triángulos isósceles, la apotema es la altura de uno de los triángulos.



El ángulo α se calcula dividiendo el ángulo de 360° por el número de lados. Luego, del triángulo sombreado de la derecha en el dibujo anterior, conocemos un ángulo ($\alpha/2$, puesto que la altura de triángulo isósceles lo divide en dos triángulos congruentes), la longitud del cateto opuesto a este ángulo ($L/2$), y queremos conocer la longitud del cateto adyacente (a). La razón trigonométrica que relaciona estas tres cantidades es la tangente:

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{\frac{L}{2}}{a} = \frac{L}{2a},$$

por lo que

$$a = \frac{L}{2\operatorname{tg}\left(\frac{\alpha}{2}\right)}.$$

Así, de la igualdad anterior y el hecho que, como mencionamos, $P = n \cdot L$ y $\alpha = 360°/n$, tenemos que el área de un polígono regular de n lados está dada por

$$\boxed{A = n \cdot L \cdot \frac{L}{4\operatorname{tg}\left(\frac{360°}{2n}\right)} = \frac{nL^2}{4\operatorname{tg}\left(\frac{360°}{2n}\right)},}$$

obteniendo así una fórmula para el área que solamente involucra la cantidad de lados (n) y la longitud de cada uno de ellos (L).

Volviendo al problema, con la fórmula anterior podemos calcular el área de cada hexágono ($n = 6$), la cual debemos multiplicar por 20 para obtener la cantidad total de cuero blanco (en cm^2):

$$\text{Cuero blanco} = 20 \cdot \frac{6L^2}{4\operatorname{tg}(30°)} = \frac{30L^2}{\operatorname{tg}(30°)} \approx 51.96L^2.$$

De la misma forma, calculamos el área de cada pentágono ($n = 5$) y multiplicamos por 12 para obtener la cantidad total de cuero negro (en cm^2):

$$\text{Cuero negro} = 12 \cdot \frac{5L^2}{4\operatorname{tg}(30°)} = \frac{15L^2}{\operatorname{tg}(36°)} \approx 20.65L^2.$$

Así, la superficie del icosaedro truncado tiene un área total de aproximadamente $72.61L^2$ cm^2.

Dato. Los polígonos que forman las pelotas de fútbol utilizadas en las ligas profesionales y en la Copa Mundial de la FIFA tienen un lado de 4.5 cm, aproximadamente. Luego, reemplazando L por este valor en lo anterior, la cantidad aproximada de cuero blanco que forma su superficie es de 1052 cm^2, mientras que el cuero negro forma una superficie cercana a los 418 cm^2.

Ejercicio 16. Determinar qué porcentaje de la superficie de un balón (del modelo trabajado en el problema anterior) es ocupada por el cuero de color blanco.

Problema 2. Supongamos ahora que disponemos de gran cantidad de cuero negro, pero de una cantidad limitada de cuero blanco para fabricar una pelota respetando el diseño de colores presentado anteriormente. Más precisamente, la cantidad de cuero blanco disponible es de 0.072 m^2. ¿Qué longitud (aproximada) debe tener el lado de cada polígono para confeccionar una pelota, lo más grande posible, con esta cantidad de cuero? ¿Podrá dicho lado medir 4 cm?

Solución. De la fórmula hallada para el área que forma el cuero blanco en una pelota, debemos determinar L tal que

$$51.96L^2 \leq 720.$$

(Recordar que antes medíamos en cm^2, por lo que hemos convertido los 0.072 m^2 a cm^2) Resolviendo esta inecuación y redondeando se obtiene $L^2 \leq 13.85$, lo que indica que el mayor valor posible para la longitud del lado de cada "parche" será, aproximadamente, de 3.7 cm. Por supuesto que, dependiendo de la forma del cuero disponible, quizás resulte necesario unir retazos para formar algunos de los parches. Sin embargo, podemos concluir que la cantidad disponible de cuero no es suficiente para, respetando el diseño, fabricar una pelota con hexágonos blancos de 4 cm de lado.

Costuras

Una vez que se dispone de todas las piezas de cuero, es decir, de los 20 hexágonos blancos y los 12 pentágonos negros, estas deben ser cosidas para formar la pelota. En el poliedro, estas costuras corresponden a las *aristas* del mismo, es decir, a los segmentos correspondientes a los lados de las caras.

Problema 3. Supongamos que para coser dos parches, uniéndolos por uno de sus lados, la cantidad de hilo necesaria es el doble de la longitud de dicho lado. Determinar la cantidad de hilo necesaria para coser toda la pelota de lado L.

Solución. Si denotamos con A a la cantidad de aristas del icosaedro truncado, entonces la cantidad de cm de hilo necesario es

$$\text{Hilo} = 2 \cdot L \cdot A,$$

donde el número 2 en la fórmula anterior proviene del hecho que, según indica el enunciado, para unir dos caras de lado L por uno de sus lados se necesita el doble de hilo, es decir, $2L$.

Entonces, solamente debemos determinar la cantidad de aristas que posee el icosaedro truncado. Para ello, podemos razonar de la siguiente forma: si hay 20 hexágonos y cada uno tiene 6 aristas, esto arroja un total de 120 aristas para ellos. Además hay 12 pentágonos, y cada uno tiene 5 aristas, dando un total de 60 aristas más. En total 180 aristas. Sin embargo, cada arista está compartida por dos polígonos, así que hemos contado dos veces a cada una de ellas. Luego, hay en total 90 aristas o costuras, por lo que la cantidad de cm de de hilo necesaria para coser una pelota cuyos parches tienen lado de longitud L cm, es

$$\text{Hilo} = 180L.$$

Problema 4. Bajo el supuesto del problema anterior sobre la cantidad de hilo necesaria para coser una pelota, determinar si 8 metros de hilo alcanzan para confeccionar una pelota oficial de la FIFA, es decir, una cuyos parches tengan 4.5 cm de lado.

Solución. Según el cálculo anterior, para coser una pelota con esta medida se necesitan $180 \cdot 4.5 = 810$ cm de hilo, por lo que la cantidad disponible no es suficiente (faltan 10 cm de hilo).

Vértices

Problema 5. Determinar, a partir de la cantidad de aristas, el número de vértices que posee un icosaedro truncado.

Solución. Los vértices son los extremos de las aristas, y ya que cada arista tiene 2 extremos, entonces tendríamos $90 \cdot 2 = 180$ vértices. Pero, si observamos la pelota, podemos ver que en cada vértice confluyen tres aristas, por lo que hemos contado tres veces cada vértice. Luego, la cantidad total de vértices es $180/3 = 60$.

Existe una solución alternativa que se obtiene a partir de la *fórmula de Euler*, la cual vale tanto para los sólidos platónicos como para los arquimedianos (pues vale para poliedros convexos). Esta fórmula relaciona el número de caras, aristas y vértices, y establece que:

$$\boxed{\text{Caras} + \text{Vértices} = \text{Aristas} + 2.}$$

Por lo tanto, en nuestro caso, el número de vértices puede obtenerse como

$$\text{Vértices} = \text{Aristas} + 2 - \text{Caras} = 90 + 2 - 32 = 60,$$

tal como habíamos obtenido mediante el razonamiento del problema anterior.

Volumen

La *esfera circunscrita* a un poliedro es aquella que lo contiene y toca a cada uno de los vértices del mismo. No siempre existe, pero todos los poliedros regulares tienen esferas circunscritas.

Puede probarse* que el icosaedro truncado de lado L está circunscrito en una esfera de radio

$$r = \tfrac{L}{4}\sqrt{58 + 18\sqrt{5}} \approx 2.478L.$$

El radio de la esfera circunscrita a un poliedro es llamado *radio circunscrito*.

El objetivo de esta sección es ver cuánto se parece el volumen del icosaedro truncado al volumen de esta esfera (Problema 11). Para ello, por claridad, trabajaremos por separado varios problemas. Cada problema puede ser resuelto independientemente, si se dan como válidos los anteriores, y se utilizan los resultados obtenidos en ellos.

Una *pirámide pentagonal* es un poliedro compuesto por una base pentagonal y 5 caras laterales triangulares que confluyen en un vértice que se denomina *cúspide* (o vértice de la pirámide). Está compuesta, por lo tanto, por 6 caras: la base y cinco triángulos laterales.

Una pirámide pentagonal es llamada *regular* si es recta (es decir, si la recta perpendicular a la base que pasa por el vértice de la pirámide corta a la base por el centro del polígono) y su base es un pentágono regular. En tal caso, las caras laterales son triángulos isósceles, cuya altura es la *apotema de la pirámide*. Si estos triángulos son equiláteros, diremos que la pirámide es *equilátera*. Centraremos nuestra atención en esta clase de pirámides, ya que son las involucradas en los “cortes” que se le realizan a un icosaedro para generar el poliedro descripto en la construcción de la pelota.

Si “desarmamos” una pirámide pentagonal regular con lado L tanto para la base como para el lado de las caras laterales (en cuyo caso diremos que la pirámide es *equilátera*), y la colocamos en forma plana, el resultado es el contenido en la Figura 5. Nos ocuparemos del estudio de esta pirámide en los Problemas 6 a 8.

Problema 6. (Apotema de una pirámide pentagonal equilátera) En el dibujo contenido en la Figura 5, determinar a en términos de L.

---

*Ver por ejemplo `https://en.wikipedia.org/wiki/Truncated_icosahedron`. Consultada en marzo de 2019.

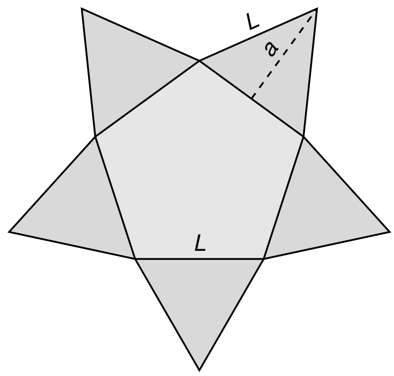
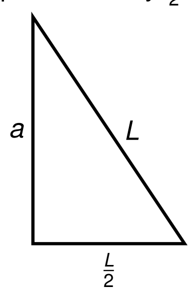


Figura 5: Desarrollo plano de una pirámide pentagonal equilátera.

Solución. Para calcular a, identificamos el triángulo rectángulo con catetos que miden a y $\frac{L}{2}$, y cuya hipotenusa mide L:



Por el teorema de Pitágoras tenemos:

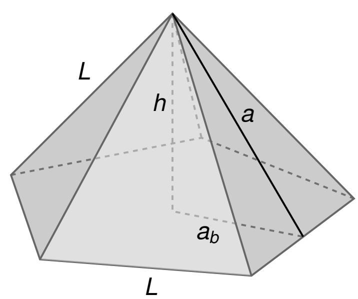
$$L^2 = a^2 + \left(\frac{L}{2}\right)^2.$$

Luego, despejando a se obtiene:

$$a = \frac{\sqrt{3}L}{2}.$$

Problema 7. (Altura de una pirámide pentagonal equilátera) Calcular la altura de una pirámide pentagonal equilátera, es decir, la distancia desde el centro de la base hasta la cúspide.

Solución. Identificamos el triángulo rectángulo formado por la apotema a de la pirámide (cuya longitud calculamos en el problema anterior), la altura h de la misma, y la apotema a_b de su base.



La apotema de la base, como calculamos en el Problema 1, es

$$a_b = \frac{L}{2\,\mathrm{tg}\left(\frac{\alpha}{2}\right)} = \frac{L}{2\,\mathrm{tg}(36^\circ)}.$$

Por otro lado, por el teorema de Pitágoras tenemos que

$$h^2 + a_b^2 = a^2.$$

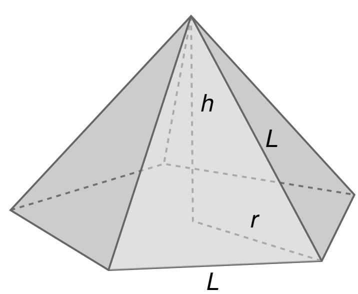
Entonces, puesto que $a = \frac{\sqrt{3}L}{2}$ (por el problema anterior), se tiene que

$$h^2 + \frac{L^2}{4\,\mathrm{tg}^2(36^\circ)} = \frac{3}{4}L^2,$$

por lo que

$$h = \frac{\sqrt{3\,\mathrm{tg}^2(36^\circ) - 1}}{2\,\mathrm{tg}(36^\circ)}\,L \approx 0.53\,L.$$

Observación. Notar que el mismo resultado se puede obtener usando el triángulo rectángulo que forma la altura, con cualquiera de las aristas laterales y el radio del pentágono base:



Problema 8. (Volumen de una pirámide pentagonal equilátera) Sabiendo que el volumen de una pirámide pentagonal regular es

$$V_P = \frac{A_b \cdot h}{3},$$

siendo A_b el área de la base y h la altura de la pirámide, calcular el volumen en términos de la longitud L de cada lado del pentágono de la base.

Solución. En el Problema 1 hallamos el área de un polígono regular de n lados, la cual en un pentágono es:

$$A_b = \frac{5L^2}{4\,\mathrm{tg}(36^\circ)}.$$

Esto, junto a la fórmula para h hallada en el problema anterior, nos dice que el volumen de una pirámide pentagonal equilátera de lado L está dado por

$$V_P = \frac{5\sqrt{3\,\mathrm{tg}^2(36^\circ) - 1}}{24\,\mathrm{tg}^2(36^\circ)} L^3 \approx 0.3015\, L^3.$$

Problema 9. (Volumen del icosaedro truncado) Obtener el volumen del icosaedro truncado de lado L, a partir de su construcción y del hecho que el volumen del icosaedro (sin truncar) de lado ℓ está dado por

$$V_I = \tfrac{5}{12}(3 + \sqrt{5})\ell^3 \approx 2.1817\ell^3.$$

Solución. Para construir un icosaedro truncado de lado L, se parte de un icosaedro de lado $\ell = 3L$ y se realizan los cortes, quitando de él 12 pirámides equiláteras de lado L. En la Figura 6 se ilustra una de las caras del icosaedro antes de truncar, e indicamos dónde se producen estos cortes. Entonces, al volumen del icosaedro de lado $3L$ le debemos

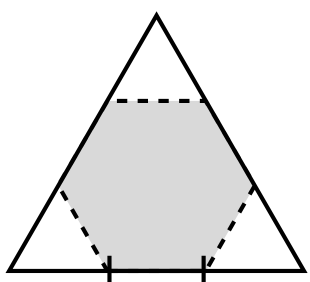


Figura 6: Una cara del icosaedro antes de truncar.

restar el volumen de las 12 pirámides pentagonales equiláteras de lado L que se "cortan". Luego:

$$V_{IT} = V_I - 12V_P \approx 2.1817(3L)^3 - 12 \cdot 0.3015L^3 = 55.2879\, L^3.$$

Problema 10. (El balón desinflado) Hallar el porcentaje del volumen de la esfera circunscrita que representa el volumen del icosaedro truncado.

Solución. El volumen de una esfera de radio r es igual a

$$V_E = \tfrac{4}{3}\pi r^3.$$

Reemplazando r por el valor aproximado del radio circunscrito al icosaedro truncado de lado L dado al comienzo de la sección ($r \approx 2.478L$), tenemos que el volumen de la esfera circunscrita a dicho poliedro es

$$V_E \approx 63.7371\, L^3.$$

Por otro lado, en el problema anterior calculamos que

$$V_{IT} \approx 55.2879\, L^3.$$

¿Qué porcentaje de V_E representa V_{IT}? Mediante la regla de tres simple, tenemos que el volumen del icosaedro truncado representa aproximadamente el 86.7 % del volumen de la esfera circunscrita a él.

Problema 11. (El balón inflado) Al inflar la pelota, las caras del poliedro se curvan, aumentando así su volumen en un 9.6 %. Teniendo en cuenta este dato, hallar el volumen de la pelota inflada redondeando el resultado a dos cifras decimales, y el porcentaje del volumen de la esfera circunscrita al poliedro que esta cantidad representa.

Solución. Según el dato, el volumen del balón inflado es

$$V_{IT} + 0.096\, V_{IT} \approx 60.6\, L^3,$$

lo que representa alrededor de un 95 % del volumen de la esfera circunscrita.

Dato. Hay otro poliedro que se aproxima mejor a una esfera: el rombicosidodecaedro, cuyo volumen (sin inflar) es cercano al 94 % del volumen de la esfera. Este poliedro se compone por 12 pentágonos regulares, 30 cuadrados y 20 triángulos equiláteros. Es decir, 62 caras en total (casi el doble que el icosaedro truncado). Tiene 60 vértices y 120 aristas. Construir un balón con tantas caras y aristas (recordemos que las aristas equivalen a las costuras) tiene un costo económico mucho más elevado que el del tradicional. Lo mismo ocurre con otros poliedros que se construyen con polígonos no regulares, es decir, con lados de distinta longitud*. En este sentido, el icosaedro truncado optimiza el balance entre esfericidad y complejidad de fabricación, donde la complejidad repercute directamente en el costo.

En estos balones confeccionados con trozos planos de cuero, reducir la cantidad de piezas produce una pérdida de volumen. Sin embargo, desde hace unas décadas, las pelotas de fútbol también pueden fabricarse con un material sintético que no es plano, sino que puede moldearse

*Este es el caso del balón Ordem 3 de Nike utilizado en LaLiga en 2015-16, que es un poliedro no arquimediano formado por 72 caras, que son pentágonos regulares y trapecios.

y unirse para recubrir una cámara de látex. De esta manera, las piezas que formarán la pelota son, antes de ser unidas, trozos de una superficie esférica.

Este es el caso del balón utilizado en la Copa Mundial de la FIFA Sudáfrica 2010, denominado Jabulani, que es una esfera formada por 8 piezas tridimensionales curvas, unidas entre sí mediante un proceso en caliente, siendo las costuras internas. Es decir, no es un poliedro, sino que es una esfera antes de ser inflado. Sin embargo, este diseño recibió muchas críticas por parte de los jugadores debido a su comportamiento impredecible y a su velocidad. Estudios posteriores indicaron que esto se debía justamente al hecho de no ser un poliedro: las costuras son pequeños surcos que crean corrientes de aire que estabilizan el balón en su vuelo. Sin ellos, su trayectoria es más inestable. Resumiendo, el Jabulani era una pelota "demasiado redonda", lo que produjo extraños efectos aerodinámicos que desconcertaron a los jugadores, en especial a los arqueros y a los pateadores de tiros libres.

El modelo siguiente para esta competencia, el Brazuca, tardó dos años y medio en desarrollarse, y se confeccionó usando 6 paneles en lugar de 8. Además, su superficie no es lisa sino con texturas para evitar que el flujo de aire influya en su recorrido, y las uniones de sus gajos son más largas y profundas, mejorando así notablemente su estabilidad y trayectoria.

Indudablemente, el diseño de pelotas de fútbol más esféricas y fáciles (y por lo tanto económicas) de fabricar es un negocio que mueve millones de dólares en todo el mundo.

Pelota imposible

Teselar una superficie plana significa cubrirla con un patrón de figuras de manera que no haya superposiciones ni huecos. Un teselado *regular* es uno cuyo patrón es un único polígono regular. Existen solamente 3 teselados regulares: empleando triángulos equiláteros, cuadrados o hexágonos regulares. Este último, el teselado hexagonal, es el utilizado en la estructura de los panales de abejas. Quizás este sea el origen de ciertos dibujos que han aparecido, incluso en logotipos de revistas dedicadas al fútbol, de pelotas cuyas caras son todas hexágonos regulares iguales entre sí, como en la Figura 7.

Para este dibujo, simplemente se "recortó" un círculo de un teselado hexagonal del plano, y se pintaron de negro algunos de los hexágonos. En otros dibujos más sofisticados se "curvan" o achican un poco algunos de los hexágonos para dar sensación de profundidad.

¿Podrán existir pelotas así? Cada ángulo interior de un hexágono re-

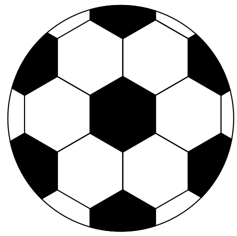


Figura 7: Una pelota imposible de fabricar.

gular mide 120°. Luego, juntar tres de ellos en un vértice común formará un ángulo total de tres veces 120°, es decir, 360°, que es un ángulo completo. Por lo tanto, una combinación de ellos siempre quedará plana, lo que imposibilita el "cierre" del poliedro. En el siguiente problema encontramos otra justificación para este hecho.

Problema 12. Utilizar la fórmula de Euler dada en el Problema 5 para comprobar que no es posible confeccionar una pelota de fútbol utilizando solamente hexágonos regulares iguales entre sí, como en la Figura 7.

Solución. Supongamos que es posible fabricar una pelota así. Entonces este poliedro debe satisfacer la fórmula de Euler:

$$\text{Caras} + \text{Vértices} - \text{Aristas} = 2.$$

Denotemos con H a la cantidad de hexágonos que forman la pelota (no sabemos cuántos son, por eso le ponemos un nombre). Es decir, el poliedro que suponemos que existe tiene H caras. Cada hexágono posee 6 aristas, por lo que tendríamos un total de $6 \cdot H$ aristas. Pero, de esta forma, estamos contando dos veces cada arista, ya que cada una de ellas está compartida por dos polígonos. Luego, la cantidad de aristas es $3 \cdot H$. Cada arista tiene dos vértices, por lo que la cantidad de vértices sería $2 \cdot 3 \cdot H$, es decir, $6 \cdot H$. Pero, nuevamente, estamos contando vértices repetidos, pues en cada vértice concurren 3 polígonos. Entonces, al dividir por 3, la cantidad real de vértices es $2 \cdot H$. Ya tenemos todas las cantidades que aparecen en el lado izquierdo de la fórmula de Euler, así que reemplazamos:

$$\text{Caras} + \text{Vértices} - \text{Aristas} = H + 2H - 3H = 0.$$

Es decir, lo que debía dar como resultado 2, dio cero. Entonces nuestra pelota no satisface la fórmula. Por lo tanto, una pelota con ese aspecto no podría existir porque, si existiera, debería satisfacer la fórmula de Euler.

La pelota: su calidad

Lleva el alma de una queja, y el cuero es pura vida...
(Bersuit Vergarabat)

Áreas o conceptos trabajados: promedio o media; rango; redondeo; circunferencia; porcentaje.

Como enuncia el Reglamento General de la AFA en su Artículo 120°, las pelotas utilizadas en partidos oficiales deben reunir las condiciones establecidas en la Regla 02 del documento "Reglas del Juego" de la FIFA. Esta regla se refiere a las características de los balones, y establece que "todos los balones utilizados en partidos auspiciados por FIFA o de las confederaciones deberán tener algunos de los sellos de calidad otorgados por dicha federación[*].

El Programa de Calidad de la FIFA para balones de fútbol se introdujo en 1996, y define tres estándares de calidad para una pelota: FIFA Quality PRO, FIFA Quality o IMS (International Match Standard). Los dos primeros sellos surgen en el año 2015 para reemplazar a los llamados FIFA Approved y FIFA Inspected, respectivamente, los cuales se permitieron en competiciones oficiales solamente hasta julio de 2017 (ver Figura 8 en página 77).

FIFA QUALITY PRO | FIFA QUALITY | IMS INTERNATIONAL MATCH STANDARD™

Para obtener uno de estos sellos, el balón debe satisfacer cada uno de los 8 requisitos establecidos, los cuales se refieren a su medida (circunferencia), peso, esfericidad, rebote, pérdida de presión, absorción de

[*]Fuente: `https://football-technology.fifa.com`.

agua, el grado de deformación (contorno y tamaño) y el análisis de los materiales utilizados para su confección.

Por ejemplo, para obtener el sello FIFA Quality (el cual tiene los mismos requisitos que el IMS, pero este último no está sujeto a una tarifa de licencia, lo que significa que el fabricante no debe pagar por el sello), una pelota número 5 (que es la oficial en partidos profesionales) debe tener una **circunferencia** comprendida entre los 68 y 70 cm, y tener un **peso** entre los 410 y 450 gramos al comienzo del partido. Para obtener el sello FIFA Quality PRO estos valores se ajustan un poco más: la **circunferencia** debe estar entre los 68.5 y 69.5 cm, y el **peso** entre los 420 y 445 gramos. Para determinar la circunferencia, una máquina toma mediciones sobre una gran cantidad de puntos sobre la pelota, para obtener el radio promedio y calcular el perímetro de la circunferencia a partir de él.

En cuanto a los **materiales utilizados**, los 3 sellos requieren que se informe por completo sus características para identificar la composición del producto, pero no constituye un criterio de aprobación/rechazo.

Analizaremos a continuación los otros 5 requisitos para estos sellos, los cuales pueden encontrarse con mayor detalle en el Manual de pruebas del Programa de Calidad FIFA para balones (estamos considerando aquí la versión 2018). Para cada una de las pruebas se utiliza una pelota diferente, del mismo modelo a evaluar.

Esfericidad

Aunque actualmente la FIFA cuenta con un proceso más complejo para medir la esfericidad de un balón de fútbol, para ilustrarlo presentamos el método que utilizaba para ello hasta el año 2011, ya que la idea es la misma que la del actual[*]. El proceso era el siguiente:

- **Paso 1:** Se mide el diámetro del balón en 16 puntos diferentes.
- **Paso 2:** Se calcula el *diámetro medio* haciendo el promedio de las 16 medidas obtenidas.
- **Paso 3:** Se calcula la diferencia entre el diámetro máximo y el mínimo (llamada *rango* de las medidas).
- **Paso 4:** Se divide el rango por el diámetro medio, y se lo multiplica por 100. Esto nos da un porcentaje llamado *esfericidad* de la pelota.

[*] Ahora se hacen 4500 medidas en lugar de 16. Por supuesto no se hacen a mano, sino con una máquina que toma las medidas, hace los cálculos y arroja el resultado final.

Para obtener el sello FIFA Quality, el porcentaje obtenido en el Paso 4 debe ser, como máximo, 1.8 %. Para el sello FIFA Quality PRO, el máximo es 1.5 %.

Problema 1. Se mide el diámetro de un balón de fútbol en 16 puntos diferentes, arrojando los siguiente valores expresados en cm:

$$\begin{array}{llll} x_1 = 22.3, & x_2 = 22.4, & x_3 = 22.5, & x_4 = 22.4, \\ x_5 = 22.5, & x_6 = 22.6, & x_7 = 22.4, & x_8 = 22.5, \\ x_9 = 22.4, & x_{10} = 22.4, & x_{11} = 22.3, & x_{12} = 22.5, \\ x_{13} = 22.5, & x_{14} = 22.3, & x_{15} = 22.4, & x_{16} = 22.5. \end{array}$$

Determinar si dicho balón obtiene o no el sello FIFA Quality en lo que a esfericidad se refiere. En tal caso, determinar su circunferencia a partir del diámetro medio.

Solución. Comenzamos calculando el promedio entre las 16 medidas, el cual es 22.43125 cm. Para obtener el rango, notar que la medida más grande es 22.6, y la más pequeña es 22.3. Luego, el rango es igual a 0.3 cm, y el porcentaje buscado es

$$\frac{\text{rango}}{\text{diámetro medio}} \cdot 100 \approx 1.34.$$

Esto significa que una pelota con estas medidas aprueba el test de esfericidad para el sello FIFA Quality, pues el valor obtenido es menor que 1.8 (de hecho, puede obtener el sello PRO). La longitud de la circunferencia de esta pelota (en cm) a partir del diámetro medio es

$$\text{circunferencia} = \pi \cdot \text{diámetro medio} = \pi \cdot 22.43125 \approx 70.47,$$

lo cual excede casi por medio centímetro al máximo establecido por la FIFA para el sello Quality. ⚽

Dato. El valor calculado para determinar la esfericidad es una forma de medir la dispersión de las medidas respecto del promedio. Este método es diferente al que se emplea en Estadística para hallar la desviación estándar, pero tiene el mismo objetivo. Aquí, un valor alto indica que los datos varían dentro de un rango de valores amplio (y la pelota es “deforme”), mientras que un valor pequeño indica que la mayor parte de los datos se agrupan cerca del promedio (y la pelota es más “redonda”).

Ejercicio 17. Se miden los diámetros de dos pelotas de fútbol en 16 puntos diferentes, arrojando los siguiente valores expresados en cm:

- Pelota marca A:

$$\begin{array}{llll}
x_1 = 22.2, & x_2 = 22.3, & x_3 = 22.6, & x_4 = 22.5, \\
x_5 = 22.3, & x_6 = 22.4, & x_7 = 22.5, & x_8 = 22.7, \\
x_9 = 22.2, & x_{10} = 22.5, & x_{11} = 22.6, & x_{12} = 22.6, \\
x_{13} = 22.4, & x_{14} = 22.5, & x_{15} = 22.6, & x_{16} = 22.7.
\end{array}$$

- Pelota marca B:

$$\begin{array}{llll}
x_1 = 22, & x_2 = 22.1, & x_3 = 21.9, & x_4 = 21.8, \\
x_5 = 22.1, & x_6 = 22, & x_7 = 22.05, & x_8 = 22.1, \\
x_9 = 21.9, & x_{10} = 22.1, & x_{11} = 21.8, & x_{12} = 21.85, \\
x_{13} = 21.95, & x_{14} = 22.1, & x_{15} = 22, & x_{16} = 22.15.
\end{array}$$

Determinar si alguno de estos balones obtiene o no el sello FIFA Quality en lo que a esfericidad se refiere y, en caso afirmativo, hallar su circunferencia a partir del diámetro medio.

Rebote

Un factor fundamental para determinar la calidad de una pelota de fútbol es su rebote, ya que el jugador tiene que poder anticipar su comportamiento en una jugada. Por supuesto, la FIFA tiene en cuenta esto para sus sellos de calidad, y establece un procedimiento que controla de alguna forma el rebote de un balón.

Es claro que en el rebote influyen algunos de los demás requisitos, como la esfericidad, la presión y los materiales, pero también influye la temperatura. Aunque no entraremos aquí en detalle con esto, la relación entre la temperatura y el rebote tiene su fundamento en lo que se conoce como “ley de Gay-Lussac”. La misma establece que la presión de un volumen fijo de un gas es directamente proporcional a su temperatura, lo que implica que al disminuir la temperatura disminuye la presión y, por lo tanto, la pelota rebotará a menor altura. Por este motivo, las pruebas se hacen a 20°C (grados Celsius) y a 5°C, para simular diferentes condiciones ambientales. A estas temperaturas se las llama “temperatura ambiente” y “frío”, respectivamente.

El procedimiento se realiza en un laboratorio, y es el siguiente[*]:

- **Paso 1:** Se parte de un balón inflado, con una presión de 0.8 bar.

[*] En el test real se toman 3 balones para realizar el proceso, y se trabaja con la media de los valores obtenidos. Se omitió esto para facilitar la comprensión.

- **Paso 2:** A una temperatura de 20°C, se deja caer mecánicamente el balón (caída libre) desde una altura de 2 metros sobre una plancha de acero, y se mide la altura del primer rebote. Se repite el procedimiento 10 veces y se calcula el promedio de estas muestras. El redondeo se realiza a 2 cifras decimales.
- **Paso 3:** A una temperatura de 5°C, se deja caer mecánicamente el balón (caída libre) desde una altura de 2 metros sobre una plancha de acero, y se mide la altura del primer rebote. Se repite el procedimiento 5 veces y se calcula el rango de esta muestra (recordemos que el rango es la diferencia entre el mayor valor y el menor). Luego se eliminan estos dos valores, es decir, el rebote más alto y el más bajo, y se calcula el promedio de los 3 valores restantes (esto se conoce como *promedio recortado*).

Para obtener el sello, deben cumplirse las siguientes 3 condiciones:

(a) El valor obtenido en el Paso 2 debe caer en el rango $125 - -155$ cm para el FIFA Quality, y en $135 - -155$ cm para el PRO.

(b) El promedio obtenido en el Paso 3 debe alcanzar como mínimo los 115 cm de altura para el FIFA Quality, y 125 cm para el PRO.

(c) El rango obtenido en el Paso 3 no debe superar los 10 cm.

Estos valores aseguran que la pelota no rebote ni demasiado ni muy poco, y además que el rebote sea uniforme.

Problema 2. Se realiza el test del rebote a una pelota y se obtienen los siguientes valores, expresados en cm:

- A 20°C:

$$\begin{array}{ccccc} 142, & 146, & 144, & 145, & 141, \\ 145, & 144, & 143, & 146, & 143. \end{array}$$

- A 5°C:

$$\begin{array}{ccccc} 127, & 127, & 126, & 128, & 129. \end{array}$$

Determinar si el balón satisface los requisitos de rebote establecidos por la FIFA para sus sellos de calidad.

Solución. El promedio de las medidas tomadas a 20°C es de 143.9 cm, lo que cae dentro del rango requerido para el sello FIFA Quality PRO. Además, la media de los 3 valores intermedios obtenidos a 5°C es, en cm, igual a

$$\frac{127 + 127 + 128}{3} = 127.33,$$

que supera el mínimo establecido para dicho sello. Finalmente, el rango de las medidas en frío es igual a $129 - 126 = 3$ cm, por lo que la pelota está en condiciones de obtener el sello de calidad PRO de la FIFA. ⚽

Ejercicio 18. Se realiza el test del rebote a una pelota y se obtienen los siguientes valores, expresados en cm:

- A 20°C:

$$135, \quad 129, \quad 130, \quad 134, \quad 135,$$
$$132, \quad 134, \quad 133, \quad 130, \quad 136.$$

- A 5°C:

$$114, \quad 118, \quad 115, \quad 116, \quad 119.$$

Determinar si el balón satisface los requisitos de rebote establecidos por la FIFA para alguno de sus sellos de calidad.

Absorción de agua

Es sabido que una pelota mojada rebota menos que cuando está seca. Por eso, es necesario medir de alguna forma la cantidad de agua que puede absorber una pelota durante un partido, y establecer ciertos límites que permitan que, aún mojada, esta pueda ser controlada. Para ello la FIFA realiza la siguiente prueba:

- **Paso 1:** Se coloca la pelota en un recipiente lleno de agua.
- **Paso 2:** Se comprime el balón* en el agua por medio de un pistón neumático y se deja en remojo. Se repite el proceso 250 veces.
- **Paso 3:** Se retira rápidamente la pelota y se seca su superficie con toalla. Se pesa la pelota y se compara con el peso original, para determinar qué porcentaje de su peso aumentó al mojarse, redondeado a una cifra decimal.

El valor obtenido refleja el porcentaje de aumento del peso de la pelota al ser mojada, y no debe superar el 10 % para ninguno de los sellos.

Problema 3. Una pelota pesa 437 gramos seca, y 464 gramos en el Paso 3 del proceso anterior. ¿Aprueba el test de absorción de agua?

Solución. El aumento de peso de la pelota fue de $464-437 = 27$ gramos. Debemos determinar qué porcentaje de su peso original representa esto. Para ello recurrimos una vez más a la regla de tres simple:

$$\left.\begin{array}{ccc} 437 & \longrightarrow & 100\,\% \\ 27 & \longrightarrow & x \end{array}\right\} \Longrightarrow x = \frac{27\cdot 100}{437}\,\% \approx 6.2\,\%.$$

Por lo tanto, la pelota aprueba el test indicado por la FIFA.

*Se calibra para que la compresión sea igual al 25 % de su diámetro.

Ejercicio 19. Una pelota pesa 440 gramos seca, y 447 gramos en el Paso 3 del proceso descripto arriba. Determinar su porcentaje de absorción de agua.

Dato. Las pelotas utilizadas en las principales competencias no llegan al 2 % de absorción de agua.

Pérdida de presión

El objetivo de esta prueba es asegurar que la pelota no se desinfle demasiado rápido, pues debe resistir al menos 90 minutos, e incluso estar lista para alargue o penales. Para ello, el procedimiento de la FIFA es el siguiente:

- **Paso 1:** Se infla la pelota a 0.8 bar y se la guarda por 72 horas (es decir, 3 días).
- **Paso 2:** Se mide la presión al sacarla y se expresa la pérdida de presión como un porcentaje de pérdida con respecto a la presión original.

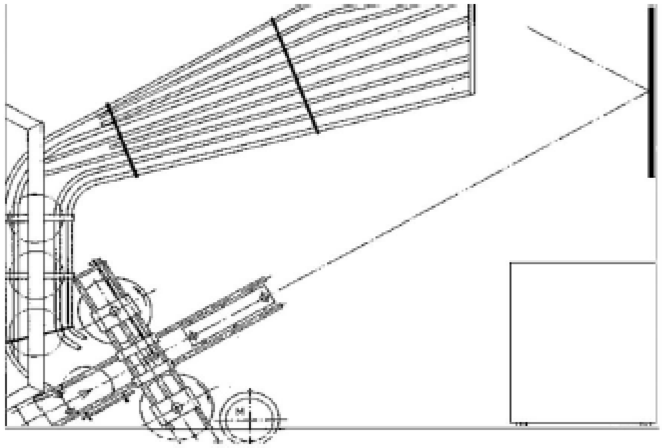
El valor obtenido no debe superar el 25 % para el sello FIFA Quality, y un 20 % para el sello FIFA Quality PRO.

Problema 4. Supongamos que el resultado de la medición en el Paso 2 del proceso anterior corresponde a 0.664 bar. Determinar su porcentaje de pérdida de presión.

Solución. La pérdida de presión fue de 0.136 bar. Al igual que en el caso de absorción de agua, aplicamos la regla de tres simple para determinar qué porcentaje de 0.8 representa este valor. En este caso, representa un 17 %. Este porcentaje indica la pérdida de presión, y satisface los requisitos de ambos sellos de la FIFA.

Deformación

La última prueba que se realiza a un balón de fútbol determina si el mismo es capaz de resistir un partido sin perder sus características. Para ello, la pelota es repetidamente lanzada por un cañón contra una superficie metálica y es devuelta automáticamente al mismo, como se ilustra en la imagen siguiente, perteneciente al Manual de pruebas del Programa de Calidad de la FIFA para balones:



Este ciclo se repite 2000 veces. Luego se revisa la muestra desgastada, para garantizar que no cambien significativamente con el uso. Específicamente, se calcula:

(a) Cambio de circunferencia: es el valor absoluto de la diferencia entre las circunferencias inicial y final. El máximo permitido es 1.5 cm.

(b) Cambio de esfericidad: se miden las esfericidades inicial y final según el método dado antes, y se expresa el cambio como un porcentaje. Este porcentaje no debe superar el 1.8 % para el sello FIFA Quality, y el 1.5 % para el PRO.

(c) Diferencia entre presiones inicial y final, con precisión de 2 cifras decimales: no debe superar el 0.1 bar.

(d) Válvula y costuras: se requiere que no se dañen durante el proceso.

Notar que se evalúan los cambios absolutos en la circunferencia y en la presión, mientras que para la esfericidad se mide el porcentaje de cambio.

Veremos un ejemplo de cómo se aplica esta prueba en el siguiente problema, en el que además se trabajan todas las pruebas anteriores. Para ello, puede resultar útil el cuadro resumen de todas las pruebas que se incluye en la Figura 9 de la página 78, el cual fue extraído del Manual de pruebas del Programa de Calidad FIFA para balones, versión 2018.

Problema 5. (Test completo) En este problema vamos a simular las 7 pruebas que debe superar un balón para obtener uno de los sellos de calidad FIFA. El objetivo es completar la tabla según los datos proporcionados, y luego ver si obtiene uno de los dos sellos. Se tiene de dato que es una pelota de tamaño número 5 cuyo radio promedio (o radio medio) es de $r_m = 11.02$ cm y pesa 415 gramos. Los resultados de las mediciones para las pruebas son los siguientes:

- **Esfericidad** (mediciones en cm):

$$\begin{array}{llll} x_1 = 22.1, & x_2 = 22.2, & x_3 = 22, & x_4 = 22.15, \\ x_5 = 22.2, & x_6 = 21.9, & x_7 = 22.1, & x_8 = 21.95, \\ x_9 = 22.05, & x_{10} = 22.2, & x_{11} = 21.9, & x_{12} = 22.1, \\ x_{13} = 22.2, & x_{14} = 21.85, & x_{15} = 22.1, & x_{16} = 22. \end{array}$$

- **Rebote** (mediciones en cm):
  - A 20°C:

    143, 144, 142, 145, 140,

    142, 143, 145, 144, 141.
  - A 5°C:

    128, 127, 126, 130, 129.

- **Absorción de agua:** pesó 447 gramos luego del proceso.
- **Pérdida de presión:** la medición luego de 3 días fue de 0.624 bar.
- **Deformación:**
  - Circunferencia final: 68.9 cm.
  - Esfericidad final: 1.61 %
  - Presión final: 0.75 bar.
  - Válvula y costuras: sin daños.

Solución. Calcularemos todas las cantidades que deben chequearse en las pruebas, para confeccionar luego una tabla en la que los resultados puedan apreciarse fácilmente. Colocaremos una marca de verificación si satisface los requisitos del sello, o una cruz en caso contrario.

Comencemos calculando la circunferencia inicial a partir del radio promedio, la cual, medida en cm, es

$$2 \cdot \pi \cdot r_m = 2 \cdot \pi \cdot 11.02 \approx 69.24.$$

Para la esfericidad, el diámetro medio es 22.0625 cm y el rango es 0.35 cm, por lo que el porcentaje de esfericidad inicial es

$$\frac{0.35}{22.0625} \cdot 100 \approx 1.59.$$

En cuanto a los rebotes, el promedio de los realizados a 20°C es de 142.9 cm, la media entre las tres mediciones intermedias a 5°C (recordemos que se descarta el valor más grande y el más pequeño) fue de

128 cm, con un rango de 4 cm para el total de las mediciones a dicha temperatura.

La pelota pasó de 415 gramos a 447 gramos luego del proceso para medir la absorción de agua, lo que significa que el aumento de peso fue de 32 gramos, lo que representa un 7.7 % del peso original.

La pérdida de presión fue de 0.176 bar, lo que representa un 22 % de la presión original.

Finalmente, veamos los cambios producidos por el uso: la circunferencia disminuyó 0.34 cm mientras que la presión, solamente 0.05 bar. En cuanto a la esfericidad, pasó de ser del 1.59 % al 1.61 %, lo que significa que el cambio es del 0.02 %. Se debe calcular qué porcentaje de 1.59 representa esta cantidad. Mediante regla de tres simple podemos concluir que corresponde al 1.26 %.

En la Tabla 1 se resumen todos los resultados obtenidos, donde FQ denota el sello FIFA Quality, y FQP indica el FIFA Quality PRO.

		FQ	FQP
Circunferencia (cm)	69.24	✔	✔
Esfericidad (%)	1.59	✔	✗
Rebote: a 20°C	142.9	✔	✔
a 5°C	128	✔	✔
Diferencia	4	✔	✔
Absorción de agua (%)	7.7	✔	✔
Peso (g)	415	✔	✗
Pérdida de presión (%)	22	✔	✗
Deformación: Circunferencia (cm)	0.34	✔	✔
Esfericidad (%)	1.26	✔	✔
Presión (bar)	0.05	✔	✔
Válvula y costuras	Sin daños	✔	✔

Tabla 1: Resultados de las pruebas.

Podemos concluir que la pelota no podrá recibir el sello de máxima calidad de la FIFA (para no obtenerlo basta con que uno solo de los requisitos no se cumpla), pero sí podrá obtener el sello FIFA Quality. ⚽

Problema 6. La persona encargada de controlar que el test se realice en forma correcta afirma que hubo un error en la transcripción de los datos del problema anterior. Más precisamente, asegura que el valor de x_{14} en el test de esfericidad no coincide con la medición realizada. Según expresó, si bien sigue siendo la medición más pequeña, el valor correcto hace que el porcentaje de esfericidad sea igual a 1.49. Determinar a partir de esto el valor correcto de x_{14}, redondeado a dos cifras decimales.

Solución. Calculemos el diámetro medio de manera usual, manteniendo x_{14} como valor a determinar según los datos. Los 15 valores restantes suman un total de 331.15 cm, por lo que:

$$\text{diámetro medio} = \frac{331.15 + x_{14}}{16} \text{ cm}.$$

Por otro lado, se sabe que el valor real de x_{14} sigue siendo la medición más pequeña, por lo que el rango en cm es

$$\text{rango} = 22.2 - x_{14}.$$

De estas dos igualdades, y del hecho que el porcentaje de esfericidad es igual a 1.49, se tiene que el valor de x_{14} satisface

$$16 \cdot \frac{22.2 - x_{14}}{331.15 + x_{14}} \cdot 100 = 1.49.$$

Resolviendo esta ecuación se obtiene que el valor correcto de x_{14} es 21.87 cm, en lugar de 21.85. Observar que esta diferencia en la medición, que puede parecer pequeña, hace que la pelota cumpla ahora con lo requerido para el sello de calidad FIFA Quality PRO en cuanto a esfericidad (aunque sigue sin satisfacer los requisitos sobre el peso y la pérdida de presión).

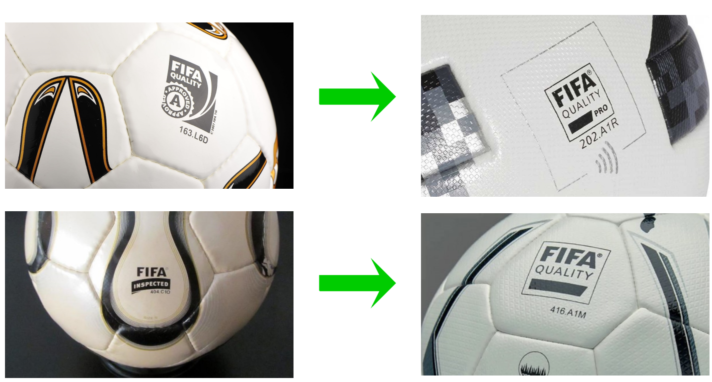


Figura 8: Cambios en el Programa de Calidad FIFA para balones.

Tests	FIFA QUALITY PRO Size 5	FIFA QUALITY Size 5	IMS INTERNATIONAL MATCH STANDARD™ Size 5
FIFA Football Test 01 **1. Circumference** [cm]	68.5 – 69.5	68.0 – 70.0	68.0 – 70.0
FIFA Football Test 02 **2. Sphericity max.** [%]	1.5	1.8	1.8
FIFA Football Test 03 **3. Rebound height** [cm] • At 20° C (room temp.) • At 5° C • Difference between highest and lowest rebound of the 3 tested balls	135 – 155 min. 125 10	125 – 155 min. 115 10	125 – 155 min. 115 10
FIFA Football Test 04 **4. Water absorption** [%] (base: initial weight) • Max. absorption	10	10	10
FIFA Football Test 05 **5. Weight** [g]	420 – 445	410 – 450	410 – 450
FIFA Football Test 06 **6. Loss of pressure** [%]	20	25	25
FIFA Football Test 07 **7. Shape/size retention** • Circumference (change) • Sphericity • Pressure (change) • Seams/valve	max. 1.5cm max. 1.5% max. 0.1bar no damage	max. 1.5cm max. 1.8% max. 0.1bar no damage	–
FIFA Football Test 09 **8. Material analysis**	Complete information	Complete information	Complete information

Figura 9: Valores para las pruebas de calidad FIFA.

Las estadísticas

Le explicás al destino que todo está en vos,
y la suerte en tus manos... (El Bordo)

Áreas o conceptos trabajados: porcentaje; media; frecuencia absoluta; frecuencia relativa; gráfico de barras y circular.

En los relatos de partidos de fútbol es muy frecuente escuchar datos a los cuales se refieren como “las estadísticas”: goles por partido, posesión de la pelota, acierto de pases o penales.

En el fútbol, y en especial en el de Argentina, la estadística realizada es esencialmente descriptiva, ya que consiste en un resumen de datos recopilados. No se pretende, en general, inferir de esto algún patrón que modele estos datos ya que, afortunadamente, en cada partido puede ocurrir “cualquier cosa”. Lo único frecuente son las sorpresas. Es, quizás, esta imposibilidad de predecir lo que ocurrirá en un partido una parte fundamental de todo lo que este deporte despierta.

Analizaremos en esta sección algunos conceptos específicos relacionados con la Estadística. Para ello, comencemos recordando algunos términos referidos a una colección finita de datos numéricos

$$x_1, x_2, x_3, \dots, x_N,$$

los cuales serán el objeto de estudio, con el fin de establecer una notación.

- Tamaño de la muestra: es la cantidad de elementos de la lista, que en la anterior es N.
- Frecuencia absoluta de x_i: es la cantidad de veces que este valor se repite en la lista de datos. La denotamos por n_i. La suma de las frecuencias absolutas de todos los datos diferentes debe dar N.
- Frecuencia relativa de x_i: es el cociente entre la frecuencia absoluta de x_i y el tamaño de la muestra, el cual se denota con f_i. Es decir, $f_i = \frac{n_i}{N}$. La suma de las frecuencias relativas de todos los datos diferentes debe dar 1.

- Frecuencia porcentual de x_i: es el resultado de multiplicar por 100 la frecuencia relativa. Indica el porcentaje de la lista que corresponde a este valor y se denota como p_i. Luego, $p_i = f_i \cdot 100$.
- Frecuencia absoluta acumulada para x_i: es la suma de las frecuencias absolutas de todos los valores menores o iguales que x_i. La denotaremos como N_i.
- Frecuencia relativa acumulada para x_i: es el cociente de la frecuencia absoluta acumulada y el tamaño de la muestra. La representaremos como F_i. También se puede obtener sumando las frecuencias relativas de todos lo valores menores o iguales que x_i.
- Media: es el promedio de todos los datos, y se denota con $\overline{x}$. Es decir, $\overline{x} = \frac{x_1+x_2+\cdots+x_N}{N}$.
- Desviación de x_i respecto de la media: es la diferencia entre el dato y la media: $D_i = x_i - \overline{x}$. El signo de la desviación respecto de la media indica si el valor está por encima de la media (signo positivo), o por debajo de la media (signo negativo).

Trabajaremos aquí con muestras de tamaño no demasiado grande, ya que el objetivo es ilustrar la forma en la que se trabaja. Veamos un ejemplo de cómo calcular las cantidades anteriores, y qué información nos pueden brindar. Será conveniente para esto ordenar los datos de menor a mayor y colocarlos en una tabla, como se muestra a continuación.

Problema 1. Consideremos la cantidad total de goles convertidos en cada partido de las primeras 5 fechas del torneo LaLiga Santander 2018 – 19. Como son 10 partidos por fecha, tendremos entonces 50 datos:

$$0, 3, 2, 3, 3, 3, 5, 2, 2, 3, 2, 4, 0, 1, 1, 2, 5, 0, 3, 4, 0, 3, 1, 2, 5,$$

$$4, 3, 10, 1, 2, 1, 2, 3, 0, 2, 1, 1, 1, 2, 5, 1, 6, 6, 1, 2, 1, 8, 0, 4, 4.$$

Realizar una tabla de frecuencias para los datos anteriores. Determinar la media de goles por partido.

Solución. En este caso tenemos $N = 50$, porque es la cantidad total de datos. En la Tabla 2 calculamos las frecuencias para los datos anteriores, para lo que resulta conveniente ordenar los valores posibles de menor a mayor.

La media, que es el promedio de todos los valores, es 2.6. Este es el promedio de goles por partido. Es claro que no pueden haber 2.6 goles en un partido. Lo que significa esta información es que, en promedio, en cada partido hubo más de 2 goles y menos de 3.

Goles	n_i	f_i	N_i	F_i
0	6	$\frac{6}{50} = 0.12$	6	$\frac{6}{50} = 0.12$
1	11	$\frac{11}{50} = 0.22$	17	$\frac{17}{50} = 0.34$
2	11	$\frac{11}{50} = 0.22$	28	$\frac{28}{50} = 0.56$
3	9	$\frac{9}{50} = 0.18$	37	$\frac{37}{50} = 0.74$
4	5	$\frac{5}{50} = 0.10$	42	$\frac{42}{50} = 0.84$
5	4	$\frac{4}{50} = 0.08$	46	$\frac{46}{50} = 0.92$
6	2	$\frac{2}{50} = 0.04$	48	$\frac{48}{50} = 0.96$
8	1	$\frac{1}{50} = 0.02$	49	$\frac{49}{50} = 0.98$
10	1	$\frac{1}{50} = 0.02$	50	$\frac{50}{50} = 1$

Tabla 2: Tabla de frecuencias para la cantidad de goles.

Problema 2. A partir de la Tabla 2, responder las siguientes consignas acerca de los partidos contemplados allí:

(a) ¿En cuántos partidos hubo exactamente 3 goles?

(b) ¿En cuántos partidos hubo a lo sumo 3 goles?

(c) Determinar el porcentaje de partidos en los que convirtieron 4 goles.

(d) Hallar el porcentaje de partidos en los que convirtieron más de 4 goles.

(e) ¿En cuántos partidos la desviación respecto de la media fue igual a -0.6?

Solución. **(a)** Nos situamos en la fila de la tabla correspondiente al valor 3, y miramos la segunda columna (frecuencia absoluta). Por lo tanto, en 9 partidos hubo 3 goles.

(b) Ahora seguimos mirando la misma fila, pero buscamos el valor que se encuentra en la penúltima columna (frecuencia absoluta acumulada). Esto nos dice que en 37 partidos se convirtieron a lo sumo 3 goles, ya que la frecuencia absoluta acumulada, justamente "acumula" la cantidad de partidos en los cuales se convirtieron 0, 1, 2 y 3 goles.

(c) Para determinar el porcentaje, multiplicamos por 100 a la frecuencia relativa correspondiente al valor 4. Entonces, en un 10 % de los partidos observados se convirtieron 4 goles.

(d) Notar que el porcentaje de partidos en los que hubo a lo sumo 4 goles es la frecuencia relativa acumulada, multiplicada por 100. Es decir, hacemos

$$0.84 \cdot 100 = 84,$$

y concluimos que en 84 % de los partidos se convirtieron 4 goles o menos. Por lo tanto en los restantes se convirtieron más de 4, es decir, en el 16 % de los casos.

(e) Hallemos primero el dato tal que al restarle la media se obtiene -0.6. En el problema anterior vimos que la media fue de 2.6 goles por partido, por lo que buscamos x tal que $x-2.6 = -0.6$. Esto arroja $x = 2$, lo que indica que la cantidad de partidos en los que la desviación respecto de la media fue igual a -0.6 corresponde a la cantidad de partidos en los que se convirtieron exactamente 2 goles. Observando la tabla, podemos afirmar que esta cantidad es igual a 11 partidos.

Los datos también pueden representarse de manera gráfica, para obtener una interpretación visual de ellos. Por ejemplo, un recurso común utilizado para representar porcentajes y proporciones es lo que se conoce como *gráfico circular* o *gráfico de torta*, el cual se introdujo y utilizó en el capítulo sobre mercado de pases (ver pág. 47). Aquí, el círculo representará al total de datos y las porciones indicarán la proporción de los distintos datos de cada tipo respecto del total. Para poder obtener el tamaño de cada una de manera exacta, se determina la amplitud del sector circular que representa a x_i (es decir, de la porción) mediante la fórmula

$$\text{Amplitud} = 360° \cdot f_i,$$

donde f_i es la frecuencia relativa de x_i.

Problema 3. Realizar una representación como gráfico circular de los datos anteriores.

Solución. Puesto que tenemos 9 posibles valores para la cantidad de goles, el gráfico quedará divido en 9 “porciones”, cada una con su respectivo tamaño. Para determinar este tamaño, usamos la fórmula que indica la medida en grados de la amplitud del sector circular. Por ejemplo, la porción correspondiente al 0 tendrá un ángulo central de

$$360° \cdot 0.12 = 43°12'.$$

Y así para cada valor. Si hicimos bien las cuentas, la suma de todos estos ángulos debe dar 360°, que es la amplitud del giro completo. El gráfico resultante es el contenido en la Figura 10, en el que se usaron números para indicar qué valor representa cada porción.

Notar que también se puede confeccionar el mismo gráfico utilizando las frecuencias absolutas en lugar de trabajar con las frecuencias relativas. Por ejemplo, para el caso del problema anterior, ahora “el todo” (es

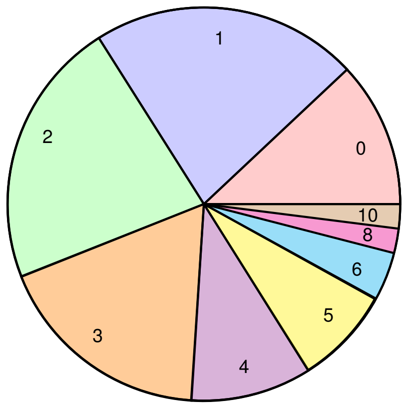


Figura 10: Representación como gráfico circular.

decir, los 360°) corresponde a los 50 partidos en los que se analizaron los goles. Así, puesto que hubo 6 partidos en los que no se convirtieron goles, el ángulo central de la porción correspondiente a 0 goles se obtiene mediante regla de tres simple como:

$$\left.\begin{array}{ccc} 50 & \longrightarrow & 360^\circ \\ 6 & \longrightarrow & x \end{array}\right\} \Longrightarrow x = \frac{6 \cdot 360^\circ}{50} = 43^\circ 12',$$

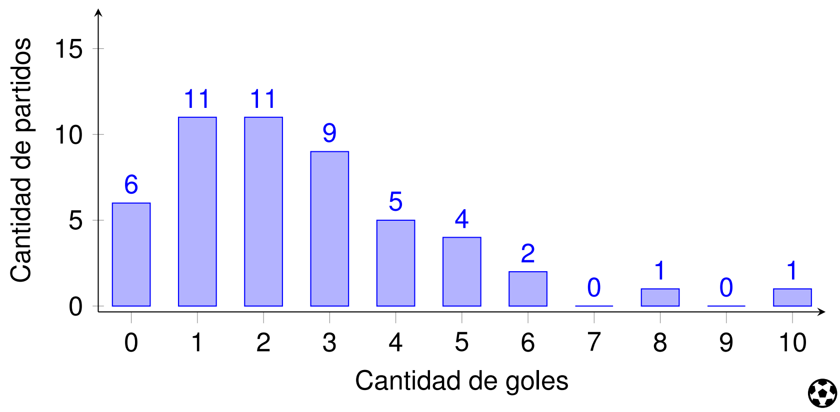
tal como habíamos obtenido antes. De la misma forma se procede con el resto de las “porciones”.

Sin embargo, a veces resulta más difícil percibir las relaciones de proporción o diferencia entre sectores circulares, que detectar diferencias entre alturas o longitudes. Por eso puede resultar útil trabajar con lo que se denomina *diagrama de barras* o *gráfico de barras*, que se compone de barras de igual ancho pero con longitudes proporcionales a la frecuencia (absoluta o relativa) de cada uno de los distintos valores. Otra ventaja de esta forma de representar los datos es que, si se quiere, permite visualizar las categorías con frecuencia nula. Los diagramas de barras también resultan más prácticos que los gráficos de torta, cuando la misma posee “muchas porciones”.

Las barras pueden orientarse horizontal o verticalmente, pero trabajaremos aquí con barras verticales. En el eje horizontal se colocan las cualidades o valores de la variable, y en el vertical, la frecuencia (absoluta o relativa).

Problema 4. Realizar una representación mediante diagrama de barras de los datos anteriores.

Solución. Para este caso, representemos en el eje vertical la frecuencia absoluta de cada dato. El gráfico resultante es el siguiente:



En el gráfico anterior se representa un único conjunto de datos. Pero en otras ocasiones puede ocurrir que se deseen representar los datos de dos o más variables en un mismo diagrama de barras, para compararlos. En ese caso, puede pasar que no haya el mismo número de observaciones en cada una de ellas, por lo que no sería acertado representar el diagrama de barras con las frecuencias absolutas en el eje vertical. Lo adecuado en esa situación es considerar las frecuencias relativas para su representación. Cada variable se grafica de un mismo color, y las barras se colocan una al lado de la otra por categoría de la variable, para poder comparar. Ilustramos esto en el siguiente problema.

Problema 5. Consideraremos la cantidad de goles convertidos en cada una de las 19 fechas correspondientes a la primera vuelta del torneo LaLiga 2018 – 19 por dos de sus principales participantes: el Barcelona y el Real Madrid. Los goles a favor de cada uno en cada fecha se enuncian a continuación:

- A favor del Barcelona:

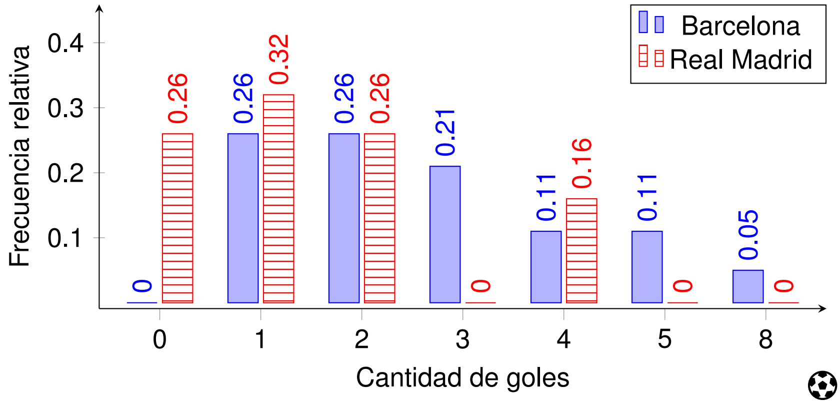
$$3, 1, 8, 2, 2, 1, 1, 1, 4, 5, 3, 3, 1, 2, 4, 5, 2, 2, 3.$$

- A favor del Real Madrid:

$$2, 4, 4, 1, 1, 0, 0, 0, 1, 1, 2, 4, 0, 2, 1, 1, 2, 0, 2.$$

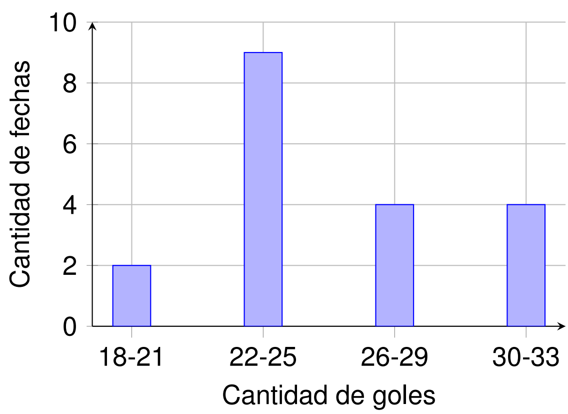
Realizar un gráfico de barras que permita comparar esta información.

Solución. Aquí tenemos la misma cantidad de observaciones para cada club (19 partidos cada uno), por lo que podemos representar en el eje vertical la frecuencia absoluta o la relativa. Sin embargo, tomaremos la relativa pues resulta la adecuada en los casos en los que esto no suceda. El gráfico que se obtiene es el siguiente (por simplicidad, no se incluyen los goles que tienen ambas frecuencias nulas):



Ejercicio 20. Confeccionar una tabla de frecuencia para cada una de las listas de datos del problema anterior, y hallar la media de goles por partido para cada equipo. Elaborar además un gráfico circular para cada uno.

Problema 6. El siguiente gráfico de barras ilustra los goles totales en cada una de las 19 fechas correspondientes a la primera vuelta del torneo LaLiga 2018 – 19 (es decir, la suma de los goles convertidos en los 10 partidos de cada fecha).



Observar que en el eje horizontal se consideran cantidades de goles agrupados en intervalos de igual longitud: entre 18 y 21, entre 22 y 25, y así. A partir del gráfico de barras, se pide responder las siguientes preguntas:

(a) ¿En cuántas fechas se convirtieron entre 22 y 25 goles?

(b) ¿En qué porcentaje de fechas se convirtieron a lo sumo 25 goles?

(c) Indicar en cuántas fechas se convirtieron más de 21 goles pero menos de 30.

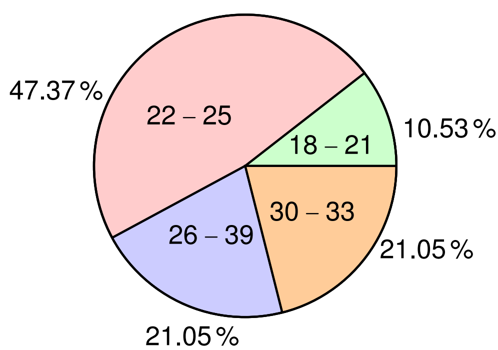
(d) Confeccionar un gráfico circular que represente la información dada.

Solución. **(a)** Según el gráfico de barras, en 9 fechas se convirtieron entre 22 y 25 goles.

(b) La cantidad de fechas corresponde a la suma de las alturas de las dos primeras columnas, es decir, 11 fechas. La pregunta es qué porcentaje del total de fechas representa esta cantidad. En otras palabras, se debe calcular qué porcentaje de 19 da como resultado 11. Por regla de tres simple, esto representa casi el 58 %.

(c) Se deben sumar las alturas de la segunda y tercer columnas, es decir, 13 fechas.

(d) El gráfico circular, con los porcentajes respectivos, es el siguiente:



Ejercicio 21. A continuación se enuncian la cantidad total de tarjetas rojas recibidas por los equipos participantes, en cada una de las 19 fechas correspondientes a la primera vuelta del torneo LaLiga 2018 – 19:

$$0, 0, 3, 1, 7, 1, 0, 3, 1, 1, 2, 5, 2, 1, 1, 2, 1, 3, 1.$$

A partir de esta información, se pide:

(a) Confeccionar una tabla de frecuencias y determinar la media de tarjetas rojas por fecha.

(b) Representar gráficamente los datos, mediante diagrama de barras y gráfico circular.

(c) Indicar en cuántas fechas se sacaron a los sumo 2 tarjetas rojas.

(d) Determinar el porcentaje de fechas en las que se sacó solamente una tarjeta roja.

El tiro libre

Festejaban la proeza del señor diez y su alteza...
(Las Pastillas del Abuelo)

Áreas o conceptos trabajados: movimiento parabólico; función cuadrática; ecuación cuadrática; redondeo.

En esta sección trabajaremos un modelo para la trayectoria que recorre una pelota de fútbol luego de ser lanzada. Este modelo supone ciertas condiciones que simplifican la situación, como que no haya resistencia del aire ni se patee la pelota "con efecto", y es el utilizado en muchos videojuegos para determinar la trayectoria de los objetos lanzados.

Se denomina *movimiento parabólico* al realizado por un objeto cuya trayectoria describe una parábola. A diferencia del tiro vertical, el movimiento parabólico se realiza en dos dimensiones. Para distinguirlos, imaginar por un lado una pelota que es lanzada hacia arriba verticalmente, y solo cambia de altura pero no se mueve hacia los costados (tiro vertical) y, por el otro, imaginar una pelota que es lanzada o pateada, la cual cambia tanto de altura como de posición horizontal (tiro parabólico). La diferencia se encuentra en el ángulo de lanzamiento con respecto a la horizontal, el cual en el tiro parabólico debe ser agudo (mayor que $0°$ y menor que $90°$, estrictamente).

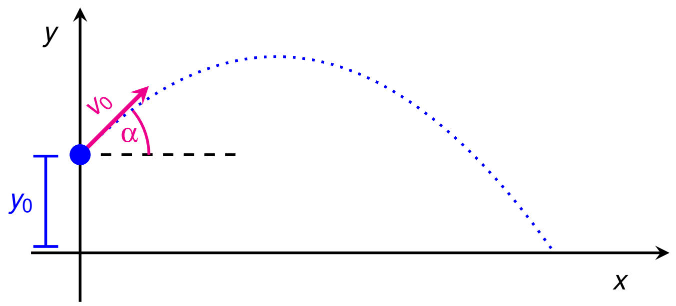
Como dijimos, supondremos que no hay resistencia del aire, por lo que en ambos casos la pelota se encuentra verticalmente en *caída libre*, pues está sometida únicamente a la aceleración de la gravedad, cuyo módulo es constantemente $9.8\ m/s^2$ (este valor se denota con la letra g), que la atrae hacia el suelo (en decir, hacia abajo).

El movimiento parabólico puede considerarse como la combinación de dos movimientos: un movimiento rectilíneo uniforme horizontal (MRU) y un movimiento vertical uniformemente acelerado (MRUA), donde la aceleración es provocada por la gravedad.

Por supuesto, la altura y alcance de una pelota de fútbol luego de ser disparada depende de la "forma" en que este lanzamiento fue realizado:

la “potencia” del disparo y su dirección. Para especificar esto y establecer una notación, recordemos algunos conceptos.

La velocidad se representa mediante una flecha que indica tanto la rapidez como la dirección del movimiento que sigue un cuerpo. La longitud de la flecha representa la *rapidez*, y es un valor numérico llamado *módulo* de la velocidad. La *dirección* se representa mediante la inclinación y sentido de la flecha, y queda determinada por el *ángulo* que forma con la horizontal. Ilustremos esto en el siguiente gráfico:



Notación:

- y_0 es la altura de lanzamiento ($y_0 = 0$ cuando se lanza desde el piso).
- v_0 es el módulo de la velocidad de lanzamiento (por simplicidad, llamaremos a v_0 la *velocidad inicial*).
- α es el ángulo de lanzamiento (dirección del disparo).

Notar que, por conveniencia, siempre ubicaremos el sistema de ejes coordenados para que el cero del eje horizontal coincida con la abscisa del punto de lanzamiento. Es decir, si (x_0, y_0) denota el punto desde cual se lanza el objeto (que aquí será un balón de fútbol), entonces siempre elegiremos $x_0 = 0$ (como en el gráfico anterior). Esto no afecta en absoluto, ya que el sistema de referencias se coloca a elección, y una vez fijado todo se traduce en él. Con la altura podríamos hacer lo mismo, pero en tal caso el blanco al cual debe acertar el disparo podría tener altura negativa, y eso puede no ser cómodo. En este modelo simplificado de trayectoria de un balón estamos considerando al mismo como si fuera un “punto”.

En un movimiento parabólico se puede probar que la altura (en metros) del objeto lanzado en función del desplazamiento horizontal está dada por

$$\boxed{y(x) = y_0 + x\,\mathrm{tg}(\alpha) - \frac{g}{2v_0^2\cos^2(\alpha)}x^2.}$$

Para todos los problemas, siempre estaremos suponiendo que no hubo ninguna interferencia por parte de otro jugador que desvíe la trayectoria parabólica de la pelota.

Problema 1. Supongamos que una pelota es pateada desde el suelo, con un ángulo de 60° y una velocidad inicial de 21.5 m/s.

(a) Hallar la función que describe la altura de la pelota en términos de su desplazamiento horizontal, redondeando los valores a dos cifras decimales.

(b) ¿A qué altura se encontraba la pelota cuando recorrió horizontalmente 6.87 m?

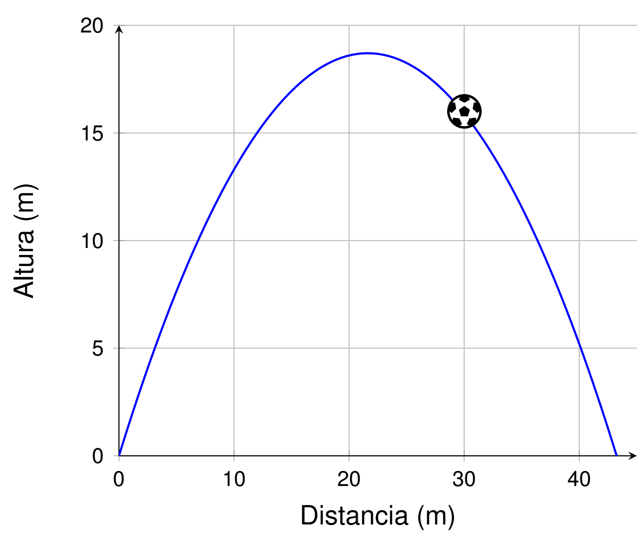
(c) Hallar la altura máxima que alcanza la pelota.

(d) Determinar el alcance horizontal de la pelota.

Solución. **(a)** En este caso $y_0 = 0$, $\alpha = 60°$ y $v_0 = 21.5$ m/s. Debemos reemplazar estos valores en la fórmula dada. Haciendo esto, resolviendo y redondeando, la función buscada es:

$$y(x) = 1.73x - 0.04x^2,$$

cuya gráfica es la siguiente:



(b) Para determinar la altura, debemos reemplazar x por 6.87 en la fórmula hallada en el inciso **(a)**, es decir:

$$\text{Altura} = y(6.87) = 1.73 \cdot 6.87 - 0.04 \cdot (6.87)^2 \approx 10.$$

Entonces, cuando la pelota recorrió horizontalmente 6.87 m, se encuentra a una altura aproximada de 10 m.

(c) La altura máxima corresponde a la ordenada del vértice de la parábola. Para hallarlo podemos completar cuadrados para llevar la expresión $y = ax^2 + bx + c$ a su forma canónica, y obtener la fórmula que establece que las coordenadas del mismo son

$$\boxed{V = \left(-\frac{b}{2a}, c - \frac{b^2}{4a}\right).}$$

En nuestro caso, $a = -0.04$, $b = 1.73$ y $c = 0$. Según esta fórmula, la altura máxima (en metros) será

$$H = -\frac{(1.73)^2}{4 \cdot (-0.04)} \approx 18.71.$$

(d) El alcance horizontal de una pelota es el valor de x cuando $y = 0$. En realidad, si la pelota es lanzada desde el suelo, habrá dos valores de x para los cuales $y = 0$: cuando es lanzada ($x = 0$) y cuando llega al suelo de nuevo. Este último es el que nos da el alcance horizontal. Entonces, debemos resolver la ecuación:

$$0 = 1.73x - 0.04x^2.$$

Extrayendo a x como factor común, esta ecuación se reescribe como

$$0 = x(1.73 - 0.04x).$$

Por la propiedad del producto cero, las soluciones son

$$x_1 = 0 \quad \text{y} \quad x_2 = \frac{1.73}{0.04} = 43.25.$$

Otra forma de hallar x_1 y x_2 es mediante la regla de la resolvente. Esto significa que la pelota recorrió horizontalmente 43.25 metros hasta realizar su primer pique en el suelo.

Para el siguiente problema, recordar que en un arco de fútbol profesional la distancia del borde inferior del travesaño al suelo es de 2.44 m, y que tendrá un diámetro máximo de 12 cm (es decir, el arco no supera los 2.56 m de altura total). Además, para evitar redondeos innecesarios, utilizar a lo largo del texto el hecho que $\cos(45°) = \frac{1}{\sqrt{2}}$, por lo que $\cos^2(45°) = \frac{1}{2}$.

Problema 2. Supongamos ahora que la pelota no está apoyada en el suelo, sino que pica y es pateada desde una altura de 0.50 metros, con un ángulo de 45° y una velocidad inicial de 13.12 m/s.

(a) Hallar y graficar la función que describe la altura de la pelota en función de su desplazamiento horizontal, redondeando los valores a tres cifras decimales.

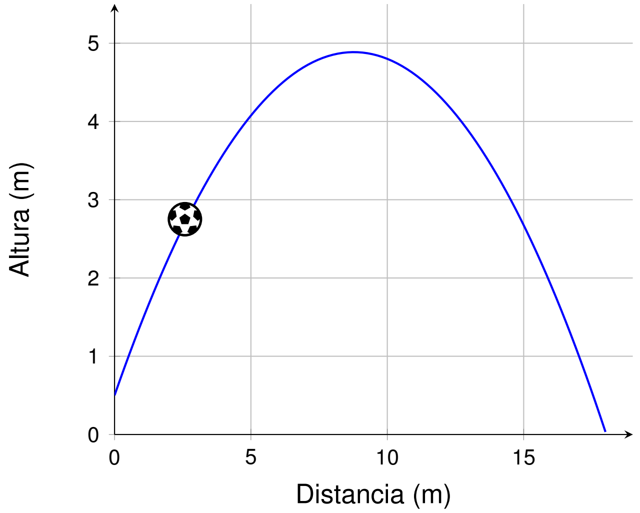
(b) Supongamos que el tiro partió desde un punto situado frente al arco, a una distancia de 15 metros del arco. Determinar si, en caso de no sufrir ningún tipo de desvío, pudo terminar en gol.

(c) ¿Desde qué distancia debió haberse ejecutado el mismo tiro, para que la pelota atraviese la línea del arco cuando se encuentra bajando, a una altura de 2.2 metros? Expresar el resultado redondeando a una cifra decimal.

Solución. (a) En este caso tenemos que $y_0 = 0.5$ m, $v_0 = 13.12$ m/s y $\alpha = 45°$. Reemplazando estos valores en la fórmula dada y resolviendo, obtenemos que altura en metros está dada, aproximadamente, por

$$y(x) = 0.5 + x - 0.057x^2,$$

donde x denota el desplazamiento horizontal. Su gráfica es la siguiente:



(b) Notar que, según la fórmula hallada en el inciso anterior, la altura en metros de la pelota luego de desplazarse horizontalmente 15 metros, es

$$y(15) = 0.5 + 15 - 0.057 \cdot (15)^2 = 2.675,$$

lo que significa que pasó por encima del travesaño considerando que el mismo termina, a lo sumo, a 2.56 metros de altura. Así, no pudo terminar en gol.

(c) Comencemos estudiando para qué valor de x la altura correspondiente es 2.2 metros. Para esto debemos resolver la ecuación:

$$0.5 + x - 0.057x^2 = 2.2,$$

o equivalentemente,

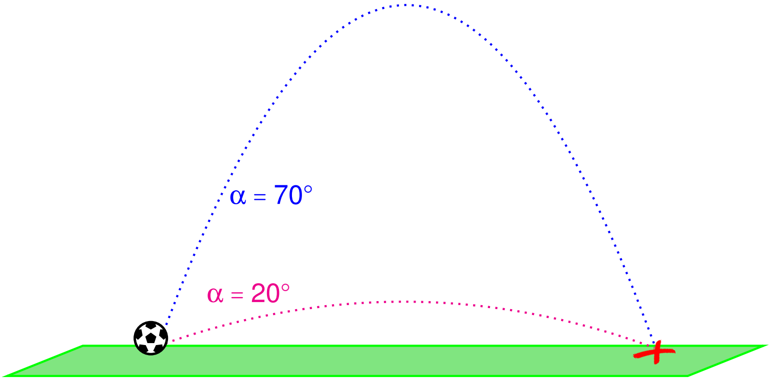
$$-1.7 + x - 0.057x^2 = 0.$$

Para resolver esta ecuación aplicamos la fórmula resolvente, lo que arroja como resultados aproximados

$$x_1 = 1.9 \quad \text{y} \quad x_2 = 15.6.$$

El primer valor corresponde a cuando la pelota se encuentra subiendo, por lo tanto el valor buscado es el segundo. Es decir, el mismo tiro efectuado desde una distancia al arco de 15.6 metros podría haber terminado en gol, lo que significa 60 cm más atrás de donde fue pateado.

Dato. Para $y_0 = 0$ y v_0 fijo, puede probarse que se obtiene el mismo alcance horizontal para ángulos complementarios (por ejemplo, para 20° y 70°), y que el mayor alcance se logra cuando $\alpha = 45°$. Sin embargo, algunos estudios indican que los futbolistas pueden dar una mayor potencia al golpe (es decir, un mayor módulo a la velocidad inicial del disparo) cuando este se realiza bajo un ángulo aproximado de $\alpha = 30°$. Según estos estudios, este es el ángulo con el que un futbolista produce un disparo con mayor alcance.



Ejercicio 22. Un jugador patea un balón apoyado en el piso, con un ángulo de 30° y una velocidad inicial de 20 m/s. Determinar el alcance máximo del tiro y la altura máxima que alcanzará la pelota.

Problema 3. En un saque lateral, un jugador arroja la pelota desde una altura de 1.6 metros, con un ángulo de 45°. ¿Con qué velocidad inicial lo hizo, si la pelota picó en el campo a 6.38 metros de distancia?

Solución. Reemplazando y_0 y α en la fórmula, nos queda que la altura de la pelota en función del desplazamiento horizontal es

$$y(x) = 1.6 + x - \frac{9.8}{v_0^2}x^2.$$

Pero, además, sabemos que y es cero cuando $x = 6.38$. Es decir,

$$0 = 1.6 + 6.38 - \frac{9.8}{v_0^2}(6.38)^2.$$

Entonces, v_0 debe satisfacer

$$0 = 7.98 - \frac{398.90}{v_0^2}.$$

Por lo tanto

$$v_0 = \sqrt{\frac{398.90}{7.98}} \approx 7.07,$$

lo que significa que la pelota fue lanzada aproximadamente a 7 m/s.

Problema 4. Supongamos la misma situación que la del problema anterior, es decir, un jugador está por arrojar un saque de manos desde una altura de 1.6 metros y con un ángulo de 45°. Determinar la velocidad inicial que debe impartirle para que la pelota caiga justo sobre la cabeza de un compañero que mide 1.8 metros de altura y se encuentra a 6 metros de distancia.

Solución. Como antes, la altura en función del desplazamiento horizontal es

$$y(x) = 1.6 + x - \frac{9.8}{v_0^2}x^2.$$

Se debe determinar v_0 de modo que el punto $(6, 1.8)$ satisfaga la igualdad, es decir, de modo que $y(6) = 1.8$. Entonces debemos resolver la ecuación

$$1.8 = 1.6 + 6 - \frac{9.8}{v_0^2}6^2.$$

Operando, v_0 debe satisfacer

$$5.8 = \frac{352.8}{v_0^2},$$

por lo que

$$v_0 = \sqrt{\frac{352.8}{5.8}} \approx 7.8.$$

Así, la velocidad inicial deberá ser de 7.8 m/s, aproximadamente.

Para el siguiente problema utilizaremos que, cuando $y_0 = 0$, vale la siguiente fórmula para el alcance horizontal, el cual denotamos con $x_{\max}$:

$$\boxed{x_{\max} = \frac{v_0^2 \operatorname{sen}(2\alpha)}{g}.}$$

Problema 5. Supongamos que un jugador patea una pelota desde el piso con una velocidad de 20 m/s, que impacta en el suelo a 40 metros de distancia. Determinar el ángulo con el que se efectuó el disparo.

Solución. En este caso sabemos que $y_0 = 0$ y que $v_0 = 20$. Reemplazando en la fórmula dada antes del enunciado, se obtiene:

$$40 = \frac{400 \operatorname{sen}(2\alpha)}{9.8},$$

es decir,

$$\operatorname{sen}(2\alpha) = 40 \cdot \frac{9.8}{400} = 0.98.$$

Esto significa que

$$2\alpha = \operatorname{arc\,sen}(0.98) \approx 78^\circ\, 31'\, 18'',$$

y por lo tanto $\alpha \approx 39^\circ\, 15'\, 39''$.

También es posible conocer las posiciones horizontal y vertical del balón luego de t segundos de haber sido arrojado. Las mismas son, respectivamente, las siguientes:

$$\boxed{x(t) = v_0 \cos(\alpha) t} \quad \text{e} \quad \boxed{y(t) = y_0 + v_0 \operatorname{sen}(\alpha) t - \frac{g}{2} t^2.}$$

Esto significa que luego de t segundos de haber sido lanzado, el balón se encuentra en el punto $\boxed{P(t) = (x(t), y(t)).}$

Problema 6. Supongamos que se patea una pelota que se encuentra apoyada en el suelo, con una velocidad inicial de 20 m/s y con un ángulo de 30°.

(a) Hallar a qué altura y a qué distancia horizontal se encuentra la pelota luego de 1 segundo de haber sido lanzada.

(b) Determinar el alcance horizontal del disparo, y cuánto tiempo demora en llegar al suelo.

(c) Encontrar la altura máxima que alcanza la pelota.

(d) Hallar el intervalo de tiempo en el cual la altura de la pelota supera los 3 metros.

Solución. Comencemos reemplazando en las fórmulas para las posiciones horizontal y vertical de la pelota, por los datos otorgados:

$$x(t) = 20\cos(30°)t \approx 17.32t,$$

$$y(t) = 0 + 20\,\mathrm{sen}(30°)t - \frac{g}{2}t^2 = 10t - 4.9t^2.$$

(a) La altura a la que se encuentra la pelota luego de 1 segundo del disparo es $y(1)$, es decir, $10 - 4.9 = 5.1$ metros. Horizontalmente, la distancia a la que se encuentra está dada por $x(1)$, es decir, 17.32 metros, aproximadamente.

(b) El tiempo de vuelo $\boxed{t_v}$ del balón es el valor positivo de t cuando $y = 0$. El alcance horizontal $\boxed{x_{\max}}$ será entonces el valor de x en t_v. Comencemos hallando t_v, para lo cual debemos resolver la ecuación $y(t) = 0$, es decir,

$$10t - 4.9t^2 = 0.$$

Extrayendo factor común o mediante la fórmula resolvente, la solución positiva a esta ecuación es aproximadamente $t = 2$, por lo que la pelota demora 2 segundos en llegar al suelo. El valor de x en este instante nos da el alcance del tiro, es decir, la pelota picó aproximadamente a

$$x(2) \approx 17.32 \cdot 2 = 34.64$$

metros de distancia.

(c) La altura máxima corresponde a la ordenada del vértice de la parábola dada por $y(t) = 10t - 4.9t^2$. Por la fórmula para el vértice dada en el inciso **(c)** del Problema 1, esta altura (en metros) es

$$0 - \frac{10^2}{4 \cdot (-4.9)} \approx 5.1.$$

Notar que, por el inciso **(a)**, la pelota se encontraba a la altura máxima al segundo de ser lanzada.

(d) Debemos resolver la inecuación

$$10t - 4.9t^2 > 3.$$

Puesto que sabemos que la trayectoria de la pelota describe una parábola cuyas ramas se abren hacia abajo, podemos plantear la igualdad

$$10t - 4.9t^2 = 3,$$

resolverla y obtener así los extremos del intervalo de tiempo buscado. Entonces, aplicamos la fórmula resolvente para hallar las soluciones de

$$10t - 4.9t^2 - 3 = 0,$$

las cuales son $t_1 = 0.37$ y $t_2 = 1.68$, aproximadamente. Esto significa que entre los 0.37 y 1.68 segundos luego del disparo, la pelota estará siempre a una altura superior a los 3 metros.

Problema 7. En un saque lateral, un jugador arroja la pelota desde una altura de 1.5 metros a una velocidad de 13 m/s, y la misma toca el suelo después de 2.6 segundos de ser lanzada. Determinar el ángulo de lanzamiento.

Solución. Sabemos que la altura de la pelota está dada, en metros, por $y(t) = 1.5 + 13\operatorname{sen}(\alpha)t - 4.9t^2$. Pero también sabemos que $y(2.6) = 0$, pues la pelota está a altura cero luego de 2.6 segundos de ser lanzada. Es decir,

$$0 = 1.5 + 13\operatorname{sen}(\alpha)(2.6) - 4.9(2.6)^2 = 33.8\operatorname{sen}(\alpha) - 31.624,$$

o equivalentemente,

$$\operatorname{sen}(\alpha) = \frac{31.624}{33.8},$$

lo que implica $\alpha = 69^\circ\, 20'\, 44''$ aproximadamente.

Problema 8. ¿A qué velocidad inicial debe lanzarse un saque de manos, desde una altura de 1.7 metros y a un ángulo de 45°, para que alcance una altura de 3 metros al segundo de haber sido efectuado? Determinar la distancia horizontal a la que se encontrará en ese momento. Hallar además la distancia entre el punto de disparo y el punto del suelo donde la pelota realiza el primer rebote, suponiendo que nada interfiere en su trayectoria. Redondear los valores a 2 cifras decimales.

Solución. La altura aproximada de la pelota en cada instante está dada, en este caso, por

$$y(t) = 1.7 + 0.71v_0 t - 4.9t^2.$$

Buscamos v_0 de modo que $y(1) = 3$. Entonces debemos resolver la ecuación

$$3 = 1.7 + 0.71v_0 - 4.9,$$

lo que conduce a $v_0 \approx 8.73$ m/s. En ese instante, la posición horizontal de la pelota es $x(1) = v_0 \cos(45°) \approx 6.18$ m. Para la consigna restante, sabemos que la distancia buscada está dada, en metros, por

$$x_{\max} = \frac{(8.73)^2 \cdot \operatorname{sen}(90°)}{9.8} \approx 7.78.$$

Por la fórmula dada en el Problema 1 para el vértice de una parábola, la altura máxima que alcanza el balón se produce cuando $t = \frac{v_0 \operatorname{sen}(\alpha)}{g}$, de lo que se obtiene

$$\boxed{y_{\max} = y_0 + \frac{v_0^2 \operatorname{sen}^2(\alpha)}{2g}.}$$

Problema 9. Determinar el ángulo con el que se disparó un tiro libre a 18 m/s, sabiendo que la altura máxima alcanzada fue de 5 metros.

Solución. El dato nos indica que

$$5 = 0 + \frac{18^2 \operatorname{sen}^2(\alpha)}{19.6} \approx 16.5 \operatorname{sen}^2(\alpha).$$

Luego,

$$\operatorname{sen}(\alpha) = \sqrt{\frac{5}{16.5}} \approx 0.55,$$

por lo que $\alpha = \operatorname{arc\,sen}(0.55)$. Entonces, la pelota fue pateada con un ángulo aproximado de $33°22'$.

En el siguiente problema no conocemos los datos del lanzamiento, pero sí una fórmula que describe en forma aproximada la altura de la pelota en cada instante. El objetivo será comprender, a partir de ella, algunos aspectos de su trayectoria.

Problema 10. La altura aproximada de una pelota (en metros) está dada por

$$h(t) = -5t^2 + 10t,$$

siendo t el tiempo en segundos luego de su lanzamiento.

(a) ¿Desde qué altura fue arrojada la pelota?

(b) Hallar la altura máxima que alcanza la pelota, y el tiempo que demora en alcanzarla.

(c) Determinar cuánto tiempo le toma a la pelota llegar al suelo.

Solución. **(a)** La altura de lanzamiento corresponde al valor de h cuando $t = 0$, que en este caso es cero. Es decir, la pelota se lanzó desde el piso.

(b) Por la fórmula dada para el vértice de una parábola, la altura máxima es

$$0 - \frac{10^2}{4 \cdot (-5)} = 5,$$

y la misma es alcanzada cuando $t = -\frac{10}{2 \cdot (-5)} = 1$. Es decir, al segundo de ser lanzada alcanza la altura máxima, que es de 5 metros.

(c) Para hallar el tiempo que demora en llegar al suelo, debemos resolver $h(t) = 0$, es decir,

$$-5t^2 + 10t = 0.$$

Las soluciones de esta ecuación son $t = 0$ y $t = 2$. El primer valor corresponde al momento del lanzamiento, en el cual la pelota estaba en el suelo, y el segundo valor corresponde al momento en el que llega nuevamente al suelo. Es decir, demora 2 segundos en llegar al suelo.

Ejercicio 23. La siguiente función describe la altura aproximada (en metros) de un saque lateral en función del tiempo (en segundos):

$$h(t) = -5t^2 + 5t + 2,$$

(a) ¿Desde qué altura fue arrojada la pelota?

(b) Hallar la altura máxima que alcanza la pelota, y el tiempo que demora en alcanzarla.

(c) Determinar cuánto tiempo le toma a la pelota llegar al suelo.

Para finalizar, proponemos el siguiente problema que integra los conceptos trabajados en esta sección, dejando como ejercicio uno similar:

Problema 11. Supongamos que Messi ejecuta un tiro libre directo, desde una distancia al arco de 30 metros exactos. Toma carrera y patea, y la pelota describe una trayectoria parabólica, saliendo con un ángulo de elevación de 20°. La pelota entra en el ángulo, a una altura de 2 metros. Se ilustra esta situación en la Figura 11.

(a) ¿A qué velocidad salió la pelota de los pies de Messi?

(b) ¿Cuánto tiempo demoró la pelota en entrar al arco?

(c) ¿Qué altura máxima alcanzó la pelota? ¿A qué distancia del arco alcanzó esta altura?

(d) Si la barrera se encontraba a 9.15 metros del punto de disparo, ¿a qué altura pasó la pelota sobre la barrera?

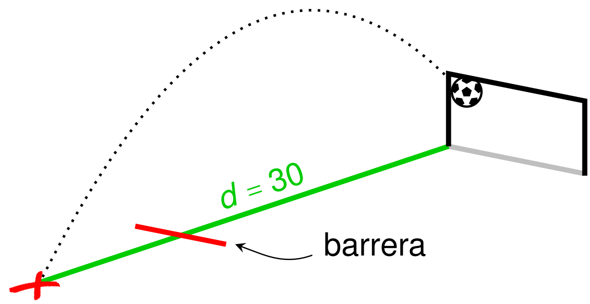


Figura 11: El tiro libre.

Solución. Para comenzar enunciemos las fórmulas que determinan, en este caso, la posición horizontal y vertical de la pelota en cada segundo t:

$$x(t) = v_0 \cos(20°)t \approx 0.94 v_0 t,$$

$$y(t) = v_0 \operatorname{sen}(20°)t - 4.9t^2 \approx 0.34 v_0 t - 4.9t^2.$$

También tenemos una fórmula que determina la altura de la pelota en términos del desplazamiento horizontal:

$$y(x) = x \operatorname{tg}(20°) - \frac{4.9}{v_0^2 \cos^2(20°)} x^2 \approx 0.36x - \frac{5.55}{v_0^2} x^2.$$

Usaremos la fórmula que nos convenga en cada caso.

(a) Sabemos que cuando la pelota se aleja 30 metros horizontalmente, su altura es de 2 metros (esto pasa justamente en el instante en el que entra al arco). Es decir, el punto $(30, 2)$ pertenece a la trayectoria que recorre la pelota, por lo que debe satisfacer la ecuación:

$$2 = 0.36 \cdot 30 - \frac{5.55}{v_0^2} 30^2.$$

Entonces

$$v_0 = \sqrt{\frac{4995}{8.8}} \approx 23.8,$$

por lo que la velocidad inicial del disparo fue de 23.8 m/s.

(b) Cuando la pelota entró al arco había recorrido 30 metros horizontales, por lo que el tiempo que demoró debe satisfacer:

$$30 = 0.94 \cdot 23.8 \cdot t,$$

lo que conduce a $t \approx 1.34$ segundos.

(c) Las dos cantidades buscadas corresponden a las coordenadas del vértice de la parábola dada por $y(x)$, el cual por la fórmula dada es $(18.37, 3.31)$, aproximadamente. Esto significa que la altura máxima que alcanzó la pelota es de 3.31 metros, y lo hizo cuando se encontraba a 18.37 metros del punto de disparo. Puesto que la pregunta está referida a la distancia al arco, la misma es de $30 - 18.37 = 11.63$ metros.

(d) Debemos calcular el valor de y cuando $x = 9.15$. Reemplazando en la fórmula, tenemos $y(9.15) \approx 2.47$. Es decir, la pelota pasó sobre la barrera a una altura de 2.47 metros.

Ejercicio 24. Un jugador patea un tiro libre desde una distancia de 38 metros frente al arco, con un ángulo de disparo de 20° y una velocidad inicial de 26 m/s. Determinar si, suponiendo que nada interfiere en la trayectoria de la pelota, el disparo termina en gol, recordando que el travesaño se encuentra a una altura de 2.44 metros.

El fixture

Ya sabés que sudar es poder, y el querer te responde...
(La Vela Puerca)

Áreas o conceptos trabajados: combinatoria; diagrama de árbol.

La programación de los partidos de un torneo como el de Primera División no es tarea sencilla, pues la construcción del fixture debe satisfacer una gran cantidad de condiciones: lograr mayores beneficios económicos, equilibrio deportivo en todos los aspectos, que dos equipos del mismo barrio o región no sean ambos locales en una misma fecha, los clásicos, la televisación, etc. Por supuesto, no nos ocuparemos aquí de esas cuestiones, sino simplemente de la combinatoria que hay detrás. El tipo de problemas que plantearemos representan, por ejemplo, la organización de un torneo con equipos de una misma ciudad o región (una liga no profesional), en el cual son irrelevantes la mayoría de las restricciones que deben tenerse en cuenta en un torneo profesional como el de Primera División.

Antes de analizar las posibilidades para un fixture comencemos hallando la cantidad de partidos que deben jugarse. Supondremos siempre que estamos ante un sistema de liga, lo que se conoce como “todos contra todos”. En este sistema todos los participantes del torneo se enfrentan entre ellos una cantidad fija de veces (usualmente una o dos, según si solo hay un partido de “ida”, o hay uno de “ida” y otro de “vuelta”).

Problema 1. Supongamos que en el torneo participan 12 equipos. Calcular la cantidad de partidos que deben jugarse, para que cada equipo juegue una vez con cada uno de los restantes.

Solución. Notar que el enunciado dice “para que cada equipo juegue *una* vez con cada uno de los restantes”, lo que significa que no estamos hablando de un torneo con dos vueltas (o rondas), en los cuales en la segunda se intercambian las localías. Simplemente cada uno de los 12 equipos debe jugar contra los 11 restantes, sin importar la condición de local o visitante.

Para resolverlo, podemos razonarlo así: cada equipo debe jugar 11 partidos. Como son 12 equipos, podemos comenzar haciendo la multiplicación $12 \cdot 11 = 132$. Pero de esta forma estamos contado partidos repetidos. Para verlo, fijemos nuestra atención en dos de los equipos participantes, digamos el Equipo A y el Equipo B. El Equipo A jugará 11 partidos, y uno de ellos será contra el Equipo B. Entonces, cuando contabilizamos los partidos del Equipo B, estamos volviendo a contar el que corresponde al Equipo A como rival. Por lo tanto, estamos contando cada partido 2 veces, por lo que la cantidad total de partidos mediante este sistema es igual a

$$\frac{12 \cdot 11}{2} = 66.$$

Por supuesto que si hubiera dos vueltas, la cantidad de partidos sí sería 132.

Ejercicio 25. Determinar la cantidad de partidos que tiene un torneo en el que participan 20 equipos, de modo que todos jueguen contra todos, una única vez.

Volvamos al caso trabajado en el problema anterior, con un torneo de 12 equipos. Ahora que sabemos cuántos partidos tendrá en total el torneo, hay que organizar el fixture: serán 11 fechas de 6 partidos cada una. En cada fecha deben jugar los 12 equipos, y se debe determinar quién juega contra quién en cada una.

Problema 2. ¿Cuántas posibilidades diferentes hay para armar la *primera fecha* de este torneo? No tener en cuenta la localía (es decir, A vs. B es lo mismo que B vs. A) ni ninguna restricción.

Solución. En la primera fecha hay 6 partidos, y debemos analizar cuántas posibilidades existen para armar estos cruces. El orden en que se jueguen los partidos no importa, solamente se debe determinar quién juega contra quién.

El razonamiento será el siguiente: ya que todos deben jugar en la fecha, fijemos la atención primero en uno de los equipos, digamos el Equipo A. ¿Cuántos posibles rivales tiene este equipo en esta fecha? Como aún no se determinó ningún partido, tiene 11 posibles rivales. Entonces por ahora hay 11 posibilidades. Por cada una de estas opciones, vendrán las de los demás. Así que los resultados que vayamos obteniendo deberán multiplicarse (se van haciendo “ramificaciones” de posibilidades).

Volviendo a la fecha, supongamos que ya hemos fijado un rival para el Equipo A, digamos que este es el Equipo B. Si queremos asignarle rival al Equipo C, ¿cuántas opciones tendremos? No podrá jugar ni contra A ni contra B, porque ya están ocupados. Tampoco contra él mismo. Entonces, de los 12 equipos participantes, solamente quedan 9 opciones.

Vamos por el segundo partido, y las posibles combinaciones son $11 \cdot 9$, hasta el momento.

Ahora debemos armar el tercer partido de la fecha. Fijamos otro equipo, ¿cuántos rivales le quedan disponibles? No puede jugar con ninguno de los 4 equipos involucrados en los 2 primeros partidos, ni tampoco con él mismo. Entonces tiene $12 - 5 = 7$ posibles rivales. Entonces, hasta aquí, las posibilidades son $11 \cdot 9 \cdot 7$.

Continuando con el mismo razonamiento, para el cuarto partido quedarán disponibles 6 equipos. Fijamos uno cualquiera, y este tendrá 5 rivales posibles. Siguiendo de esta forma, en el quinto partido habrán 3 ramificaciones para las opciones, y el último quedará ya determinado. Es decir, las opciones para armar la primera fecha de un torneo de 12 equipos son

$$11 \cdot 9 \cdot 7 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 1 = 10395.$$

Notar que, en caso de que A vs. B sea diferente de B vs. A, entonces habría que multiplicar por 2 las opciones en cada elección. Como las elecciones fueron 6 (una por cada partido de la fecha), las cantidad total de posibilidades para la primera fecha serían

$$2^6 \cdot 10395 = 665280.$$

Veamos un ejemplo con menos equipos que nos permitirá enumerar todas las combinaciones descriptas en el procedimiento del problema anterior. Según ello, si los participantes fueran 6 equipos, entonces la cantidad de posibilidades para la primera fecha son $5 \cdot 3 \cdot 1 = 15$.

Problema 3. Confeccionar un diagrama de árbol que permita observar las 15 combinaciones para la primera fecha de un torneo de 6 equipos.

Solución. Supongamos que enumeramos los equipos, desde el 1 hasta el 6. Entonces, siguiendo cada una de las siguientes ramas tenemos una combinación diferente para los tres partidos de cada fecha:

$$\begin{tikzcd}[row sep=small]
 & 3\text{–}4 \arrow[r] & 5\text{–}6 \\
1\text{–}2 \arrow[ur] \arrow[r] \arrow[dr] & 3\text{–}5 \arrow[r] & 4\text{–}5 \\
 & 3\text{–}6 \arrow[r] & 4\text{–}6
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}[row sep=small]
 & 2\text{–}4 \arrow[r] & 5\text{–}6 \\
1\text{–}3 \arrow[ur] \arrow[r] \arrow[dr] & 2\text{–}5 \arrow[r] & 4\text{–}5 \\
 & 2\text{–}6 \arrow[r] & 4\text{–}6
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}[row sep=small]
 & 2\text{–}3 \arrow[r] & 5\text{–}6 \\
1\text{–}4 \arrow[ur] \arrow[r] \arrow[dr] & 2\text{–}5 \arrow[r] & 3\text{–}5 \\
 & 2\text{–}6 \arrow[r] & 3\text{–}6
\end{tikzcd}$$

$$
\begin{tikzcd}
 & 2\text{–}3 \arrow[r] & 4\text{–}6 \\
1\text{–}5 \arrow[ur] \arrow[r] \arrow[dr] & 2\text{–}4 \arrow[r] & 3\text{–}6 \\
 & 2\text{–}6 \arrow[r] & 3\text{–}4
\end{tikzcd}
$$

$$
\begin{tikzcd}
 & 2\text{–}3 \arrow[r] & 4\text{–}5 \\
1\text{–}6 \arrow[ur] \arrow[r] \arrow[dr] & 2\text{–}4 \arrow[r] & 3\text{–}5 \\
 & 2\text{–}5 \arrow[r] & 3\text{–}4
\end{tikzcd}
$$

Así, recorriendo por ejemplo la rama de más arriba, los tres partidos de la primera fecha serían 1–2, 3–4 y 5–6. Siguiendo cada una de las ramas, se obtienen las 15 posibles combinaciones correspondientes al razonamiento previo al problema.

Si los equipos participantes fueran 4, la cantidad de combinaciones para la primera fecha, cuando la localía no se tiene en cuenta, es igual a $3 \cdot 1 = 3$. Solamente tres opciones diferentes para la primera fecha. Sin embargo, cuando A vs. B es diferente de B vs. A, según el comentario final del Problema 2, esta cantidad se debe multiplicar por 2, tantas veces como partidos haya en la fecha. En este caso hay dos partidos por fecha, por lo que este número debe ser entonces multiplicado por 4. Por lo tanto, hay 12 opciones posibles para la primera fecha cuando la localía es tenida en cuenta. Ilustramos esto en el diagrama del siguiente problema.

Problema 4. Confeccionar un diagrama de árbol que permita observar las 12 combinaciones para la primera fecha de un torneo de 4 equipos, cuando la localía es tenida en cuenta.

Solución. Las posibles combinaciones, en este caso, son las siguientes:

$$
\begin{tikzcd}
 & 3\text{–}4 & & & 3\text{–}4 \\
1\text{–}2 \arrow[ur] \arrow[dr] & & & 2\text{–}1 \arrow[ur] \arrow[dr] & \\
 & 4\text{–}3 & & & 4\text{–}3 \\
 & 2\text{–}4 & & & 2\text{–}4 \\
1\text{–}3 \arrow[ur] \arrow[dr] & & & 3\text{–}1 \arrow[ur] \arrow[dr] & \\
 & 4\text{–}2 & & & 4\text{–}2 \\
 & 2\text{–}3 & & & 2\text{–}3 \\
1\text{–}4 \arrow[ur] \arrow[dr] & & & 4\text{–}1 \arrow[ur] \arrow[dr] & \\
 & 3\text{–}2 & & & 3\text{–}2
\end{tikzcd}
$$

Como puede verse, determinar el calendario o fixture para un torneo de fútbol no es nada sencillo. En los ejemplos anteriores vimos la cantidad de opciones posibles, y solamente nos hemos centrado en una sola fecha de un torneo con pocos equipos, sin tener en cuenta ninguna restricción de las mencionadas al comienzo.

Sin embargo, siguiendo la misma idea que se utiliza en el Torneo de Primera División, si definimos la primera fecha y un “algoritmo de rotación” mediante el cual se define cualquiera de las otras fechas en función de la anterior, entonces todo el calendario queda definido. Por ejemplo, el algoritmo podría ser: en cada fecha el Equipo A juega con el rival del Equipo C en la fecha anterior, y así para cada uno hasta formar un ciclo (también se incluye una instrucción que indica qué hacer cuando, bajo este sistema, a un equipo le toque contra sí mismo). De esta manera, cada equipo puede saber con quién jugará en una fecha determinada, mirando el rival que tuvo en la fecha anterior el equipo correspondiente. Este es el significado de la frase “nosotros jugamos con el que *deja* el Equipo C”.

Por supuesto, existen otros algoritmos simples para armar un fixture para un torneo no profesional, ya que para ello no importa conocer *todas* las opciones, sino *una* posible, que asegure que cada equipo juegue con los restantes una vez. Esto se realiza asignando números a los equipos, y luego elaborando tablas que indican los cruces.

Veamos a continuación en qué consiste un algoritmo[*] que no emplea el sistema de rotación, sino que diagrama fecha por fecha. Este algoritmo funciona con cualquier cantidad par de equipos. Para ver como funciona, supongamos que queremos organizar el calendario para un torneo de 10 equipos, y que nos interesa definir solamente los emparejamientos (después se decide quién arranca de local). Las instrucciones para armar los 5 partidos de cada una de las 9 fechas son las siguientes:

- **Paso 1:** En la tabla con las fechas y partidos, se llenan las filas sucesivamente con números de los equipos, del 1 hasta la cantidad de rivales de cada equipo, que en este caso es 9:

	Partido 1	**Partido 2**	**Partido 3**	**Partido 4**	**Partido 5**
Fecha 1	1	2	3	4	5
Fecha 2	6	7	8	9	1
Fecha 3	2	3	4	5	6
Fecha 4	7	8	9	1	2
Fecha 5	3	4	5	6	7
Fecha 6	8	9	1	2	3
Fecha 7	4	5	6	7	8
Fecha 8	9	1	2	3	4
Fecha 9	5	6	7	8	9

[*]Fuente `https://es.wikipedia.org/wiki/Sistema_de_todos_contra_todos`. Consultada en marzo de 2019.

- **Paso 2:** Se coloca el número de equipos participantes (en este caso 10) en la primera columna:

	Partido 1	Partido 2	Partido 3	Partido 4	Partido 5
Fecha 1	1–**10**	2	3	4	5
Fecha 2	6–**10**	7	8	9	1
Fecha 3	2–**10**	3	4	5	6
Fecha 4	7–**10**	8	9	1	2
Fecha 5	3–**10**	4	5	6	7
Fecha 6	8–**10**	9	1	2	3
Fecha 7	4–**10**	5	6	7	8
Fecha 8	9–**10**	1	2	3	4
Fecha 9	5–**10**	6	7	8	9

- **Paso 3:** Se completan los lugares restantes comenzando desde el impar más alto, en este caso 9, en orden decreciente. Se van completando las casillas libres *por fila*, siguiendo el orden en el que aparecen:

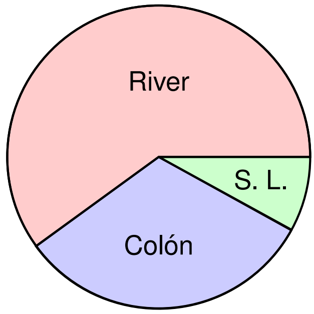
	Partido 1	Partido 2	Partido 3	Partido 4	Partido 5
Fecha 1	1–10	2–**9**	3–**8**	4–**7**	5–**6**
Fecha 2	6–10	7–**5**	8–**4**	9–**3**	1–**2**
Fecha 3	2–10	3–**1**	4–**9**	5–**8**	6–**7**
Fecha 4	7–10	8–**6**	9–**5**	1–**4**	2–**3**
Fecha 5	3–10	4–**2**	5–**1**	6–**9**	7–**8**
Fecha 6	8–10	9–**7**	1–**6**	2–**5**	3–**4**
Fecha 7	4–10	5–**3**	6–**2**	7–**1**	8–**9**
Fecha 8	9–10	1–**8**	2–**7**	3–**6**	4–**5**
Fecha 9	5–10	6–**4**	7–**3**	8–**2**	9–**1**

De esta manera quedan armados todos los cruces de cada fecha.

Ejercicio 26. Confeccionar un cuadro siguiendo el método descripto arriba para el calendario de un torneo con 6 equipos. Observar los cruces resultantes mediante este método para la primera fecha, e indicar a qué rama de las graficadas en el Problema 3 corresponde.

Respuestas

1. Ganó 12 partidos y empató 4.
2. Convirtió 8 goles a favor y 32 en contra.
3. El Equipo Y debe obtener al menos 19 puntos, lo que representa el 42.22 % de los puntos en juego, y para conseguirlos debe ganar como mínimo 2 partidos. El Equipo Z necesita al menos 35 puntos, lo que equivale al 77.78 % de los puntos, y para alcanzarlos necesita ganar como mínimo 10 partidos.
4. Los promedios esperados son 1.621 para el Equipo Y, y 1.483 para el Equipo Z.
5. Obtuvo 26 puntos.
6. **(a)** Acumuló 18 puntos. **(b)** El promedio de los 19 partidos es 1.158. **(c)** El promedio debió ser 1.8, lo que equivale a un total de 9 puntos acumulados en los últimos 5 partidos.
7. La cancha de dimensiones mínimas tiene un área de 6400 m^2, mientras que la mayor tiene un área de 8250 m^2.
8. El perímetro es de 32 metros.
9. El perímetro es de 38 metros ($x = 8$ metros).
10. Las dimensiones son 2 metros de ancho y 4 metros de largo.
11. La superficie es de 40 m^2, teniendo 5 metros de ancho y 8 metros de largo.
12. La recaudación sería de 7769170 euros.
13. Había 26000 locales y 14000 visitantes. La entrada para locales costó \$230, y \$460 la entrada para visitantes.
14. Poseía el 35 % de los derechos económicos.
15. River recibió el 60 %, Colón el 32 % y San Lorenzo de Tostado recibió el 8 %. El gráfico es el siguiente:



16. El cuero blanco ocupa aproximadamente el 71.56 % de la superficie del balón.

17. El porcentaje de esfericidad de la pelota marca A es del 2.22 %, por lo que no aprueba el test de FIFA, mientras que la pelota marca B sí lo aprueba, con un 1.59 % de esfericidad y una circunferencia de 69.1 cm, aproximadamente.

18. El promedio de las medidas tomadas a 20°C es de 132.8 cm, el de las 3 medidas intermedias a 5°C es de 116.33 cm, y la diferencia entre el mayor y menor rebote a 5°C es de 5 cm, por lo que califica para el sello FIFA Quality.

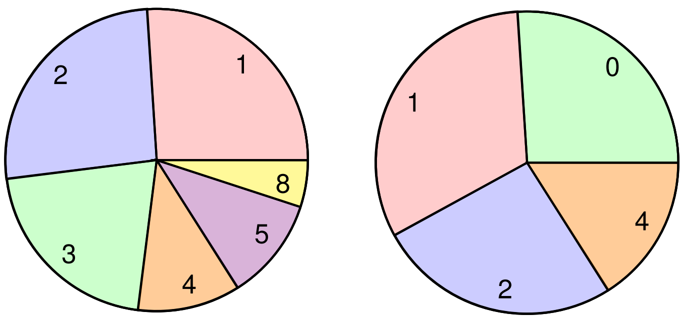
19. El porcentaje de absorción es del 1.6 %.

20. Las tablas de frecuencia son las siguientes:

Goles Barcelona	n_i	f_i	N_i	F_i
1	5	$\frac{5}{19} \approx 0.26$	5	$\frac{5}{19} \approx 0.26$
2	5	$\frac{5}{19} \approx 0.26$	10	$\frac{10}{19} \approx 0.52$
3	4	$\frac{4}{19} \approx 0.21$	14	$\frac{14}{19} \approx 0.73$
4	2	$\frac{2}{19} \approx 0.11$	16	$\frac{16}{19} \approx 0.84$
5	2	$\frac{2}{19} \approx 0.11$	18	$\frac{18}{19} \approx 0.95$
8	1	$\frac{1}{19} \approx 0.05$	19	$\frac{19}{19} = 1$

Goles Real Madrid	n_i	f_i	N_i	F_i
0	5	$\frac{5}{19} \approx 0.26$	5	$\frac{5}{19} \approx 0.26$
1	6	$\frac{6}{19} \approx 0.32$	11	$\frac{11}{19} \approx 0.58$
2	5	$\frac{5}{19} \approx 0.26$	16	$\frac{16}{19} \approx 0.84$
4	3	$\frac{3}{19} \approx 0.16$	19	$\frac{19}{19} = 1$

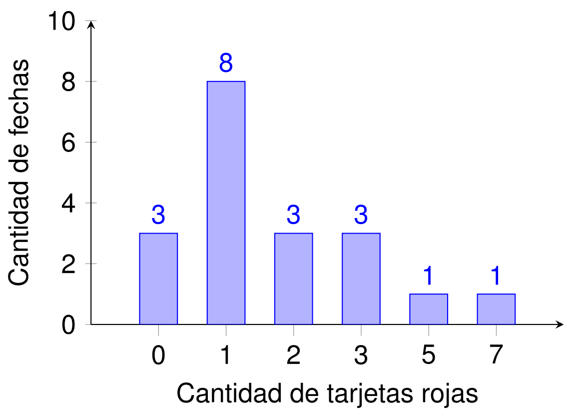
La media para el Barcelona es de 2.8 goles por partido, mientras que para el Real Madrid es de 1.5 goles. Los gráficos circulares respectivos son los siguientes:

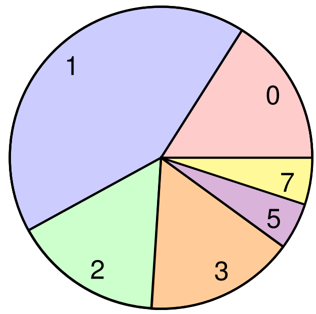


21. (a) La cantidad total de tarjetas rojas en las 19 fechas fue de 35. Luego, la media es de 1.84 tarjetas rojas por fecha, aproximadamente. La tabla de frecuencias es la siguiente:

Tarjetas	n_i	f_i	N_i	F_i
0	3	$\frac{3}{19} \approx 0.16$	3	$\frac{3}{19} \approx 0.16$
1	8	$\frac{8}{19} \approx 0.42$	11	$\frac{11}{19} \approx 0.58$
2	3	$\frac{3}{19} \approx 0.16$	14	$\frac{14}{19} \approx 0.74$
3	3	$\frac{3}{19} \approx 0.16$	17	$\frac{17}{19} \approx 0.90$
5	1	$\frac{1}{19} \approx 0.05$	18	$\frac{18}{19} \approx 0.95$
7	1	$\frac{1}{19} \approx 0.05$	19	$\frac{19}{19} = 1$

(b) Los gráficos son los siguientes:





(c) En 14 fechas.
(d) En el 42 % de las fechas.

22. El alcance máximo es de 35.35 metros, y la altura máxima es de 5.1 metros, aproximadamente. Estos números pueden variar levemente debido al redondeo utilizado.

23. **(a)** Desde 2 metros de altura.
(b) La altura máxima es 3.25 metros, y la alcanza a los 0.5 segundos.
(c) Demora 1.31 segundos en llegar al suelo.

24. El disparo termina en gol, pues la pelota atraviesa la línea de meta a una altura aproximada de 1.98 metros.

25. Se jugarán 190 partidos (19 fechas con 10 partidos cada una).

26. El cuadro es el siguiente, y la opción resultante para la primera fecha corresponde a la última rama de las graficadas en el problema mencionado:

	Partido 1	**Partido 2**	**Partido 3**
Fecha 1	1–6	2–5	3–4
Fecha 2	4–6	5–3	1–2
Fecha 3	2–6	3–1	4–5
Fecha 4	5–6	1–4	2–3
Fecha 5	3–6	4–2	5–1

100 UNL UNIVERSIDAD NACIONAL DEL LITORAL

ediciones UNL

www.unl.edu.ar